

# 一种有限容积法中极点奇异单元的处理方法

鲁录义, 危卫, 罗昔联, 顾兆林

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 针对采用极坐标系结构化网格计算非轴对称流动会出现的奇异性问题, 以圆形腔顶部驱动流为例分析奇异性问题产生的原因, 并通过局部坐标系下压力梯度项的分解, 提出了一种极坐标系结构化网格中心奇异单元离散格式中压力梯度项的处理方法. 圆形腔顶部驱动流的数值结果表明: 经过压力修正的极坐标系结构化网格算法与单元数高于其数十倍的非结构化网格算法具有一致的计算精度. 与同类处理方法相比, 该算法不需要对极点处的网格进行特殊处理, 在局部坐标系下, 仅对极点处网格奇异单元的离散格式压力梯度项进行正交分解处理, 极大地降低了有限容积法的实施难度, 且保证了算法的准确有效性.

**关键词:** 有限容积法; 奇异性; 极坐标系

**中图分类号:** TQ026.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)03-0095-05

## Numerical Treatment of Singularity Cells Around the Polar Axis for Finite Volume Method

LU Luyi, WEI Wei, LUO Xilian, GU Zhaolin

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The reason of non-physical profiles of the lid driven flow in a closed circular cavity was analyzed to avoid singularity in solving a non-axisymmetrical fluid flow problem using a polar cylindrical grid. A new numerical method was proposed to treat these singularity elements by decomposing the pressure gradient term. The present method can obviously avoid the singularity without increasing the calculation amount. Compared with the unstructured grid, the same level of accuracy can be obtained using the present method with much fewer cells in a Cartesian coordinate system. Unlike the conventional methods, this method does not need special treatment of the cells. Our results indicate that the present method will reduce the difficulty of adopting the finite volume method and ensure its feasibility by orthogonal decomposition treatment of the pressure gradient term in the discretization scheme at the singularity cells.

**Keywords:** finite volume method; singularity; polar coordinate system

在科学与工程领域中, 许多椭圆型方程的问题都非常适合采用有限容积法进行求解, 特别是对于直角坐标系统中几何形状规则的計算区域. 当計算区域为环形、柱形或球形特征时, 如槽道流、圆形射流等, 在极坐标或柱坐标系下可以容易地进行结构化网格划分, 同时 N-S 方程也可以非常方便地以相应的极坐标或柱坐标形式给出. 对于二维问题, 当計

算区域包含圆心时, 在  $r=0$  处网格线汇聚成一个点, 此点周围的单元由四边形退化为三角形. 对于非轴对称流动问题, 必须对这些三角形单元进行特殊处理.

一种被普遍采用且简单地避免这种奇异性问题的方法是采用贴体网格进行計算, 甚至改变网格划分并采用直角坐标系统来处理<sup>[1]</sup> (见图 1a). 但是,

采用这样的网格划分时,包含A、B、C、D点的单元将发生高度变形,而且网格线也失去了正交性,模拟精度必然受到影响.第二种处理方法是采用图1b中的混合网格<sup>[2-3]</sup>,即采用直角坐标系统计算圆心附近的区域,采用极坐标系统处理远离圆心的区域.由于两套不同坐标系统转换,也将导致整体计算精度下降.第三种方法是采用圆形单元<sup>[4]</sup>代替三角形单元,(见图1c),由于中心圆形单元与周围多个单元相邻,圆形单元不得不进行特殊处理,动量方程和压力修正方程都变得相当复杂,且效果并不理想<sup>[5]</sup>.

实际上,在采用保留退化后三角形网格(见图1d)计算纯传热问题时,并不会产生任何奇异性,即离散方程并不需要做任何修改,因为圆心处单元面积与热流量均为0,而且退化后单元的正交性并没有改变.通过对圆心周围退化后三角形单元的分析,离散方程中的每个单元的对流扩散系数、每个界面通量等计算都是正确的,三角形单元发生奇异性主要是由于压力梯度不正确计算引起的.因此,本文提出一种极坐标系统结构化网格中退化三角形单元中的压力梯度计算公式,并对公式进行了验证.

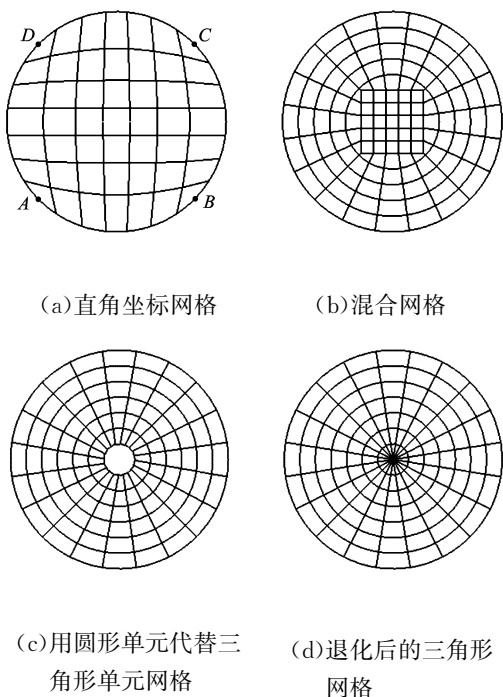


图1 不同类型的网格划分

## 1 极坐标下的控制方程

二维极坐标系统中的稳态流动的控制方程<sup>[6]</sup>如下

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha u \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v \phi) =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_{\phi} r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + S_{\phi} \quad (1)$$

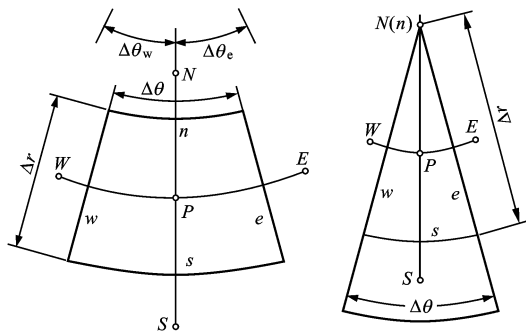
式中: $\phi$ 为通用变量; $u$ 为径向( $r$ 方向)速度; $v$ 为环向( $\theta$ 方向)速度; $\rho$ 为流体密度; $\Gamma_{\phi}$ 和 $S_{\phi}$ 分别为变量 $\phi$ 的广义扩散系数和广义源项.

采用同位网格计算时,所有的求解变量均在同一套网格上,考虑 $r$ - $\theta$ 平面上的一个控制容积(见图2),分别对 $u$ 、 $v$ 方程做控制容积积分,可以得到如下离散形式<sup>[7]</sup>

$$a_P u_P = \sum a_{nb} u_{nb} + b - (p_e - p_w) \Delta r \quad (2)$$

$$a_P v_P = \sum a_{nb} v_{nb} + b - (p_n - p_s) r \Delta \theta \quad (3)$$

式中: $a_P$ 和 $a_{nb}$ 分别为离散方程组中节点本身和相邻节点上的影响系数; $b$ 为方程(1)中源项的积分; $p_e$ 、 $p_w$ 、 $p_n$ 和 $p_s$ 均为构成控制容积的4个界面上的压力,由节点压力采用线性插值而得.



(a) 四边形 (b) 退化三角形

图2  $r$ - $\theta$ 平面上的控制容积

为了避免不合理的棋盘压力场,实施同位网格算法时一般采用动量插值,一种常见的做法是在计算界面流速时引入相邻两点的压力差.为此,可以将式(2)、式(3)改写成为如下形式

$$u_P = \hat{u}_P - (\Delta r / a_P) (p_e - p_w) \quad (4)$$

$$v_P = \hat{v}_P - (r \Delta \theta / a_P) (p_n - p_s) \quad (5)$$

式中: $\hat{u}_P$ 和 $\hat{v}_P$ 为假拟速度<sup>[8]</sup>.从式(4)和式(5)可得

$$u_e = \hat{u}_e - (\Delta r / a_P)_e (p_P - p_E) \quad (6)$$

$$v_n = \hat{v}_n - (r \Delta \theta / a_P)_n (p_P - p_N) \quad (7)$$

式中: $\hat{u}_e$ 和 $\hat{v}_n$ 为控制单元东界面和北界面的假拟速度<sup>[8]</sup>.

为便于阐述圆心退化单元引起的奇异性问题,本文首先对计算传热学的经典算例——水平环形空腔内的自然对流进行计算,并与文献[9]中给出的采用光学方法所测定的结果进行对比.为便于对比,计算中采用该文实验的几何参数,即:水平环形空腔

的外内直径之比  $D_{out}/D_{in} = 2.6$ , 内外壁面的温度 ( $T_{in}$  和  $T_{out}$ ) 保持均匀恒定值, 空气的  $Pr$  为 0.7, 计算网格数为 72(环向)  $\times$  30(径向). 图 3 为  $Ra = 4.7 \times 10^4$  时, 计算结果与文献[9]中给出的干涉仪测量结果的对比, 可以看出计算结果与实验结果能很好地吻合. 进一步定量地将计算结果与实验结果进行对比, 结果如表 1 所示. 从表 1 可以看出:  $K_{in}$  和  $K_{out}$  值差别很小, 说明计算收敛, 已经达到热平衡. 对比相同  $Ra$  下内外归一化当量导热系数, 本文的结果与文献[9]结果的最大偏差不超过 2.24 %. 因此, 对于不包含圆心处退化单元的计算问题, 采用极坐标下结构化网格可以得到精确解.

表 1 环形空间自然对流结果

| $Ra$            | $K_{in}$ |       | 误差/% | $K_{out}$ |       | 误差/%  |
|-----------------|----------|-------|------|-----------|-------|-------|
|                 | 计算值      | 文献[9] |      | 计算值       | 文献[9] |       |
| $10^3$          | 1.085    | 1.081 | 0.37 | 1.086     | 1.084 | 0.18  |
| $10^4$          | 2.055    | 2.010 | 2.24 | 2.032     | 2.005 | 1.35  |
| $5 \times 10^4$ | 3.045    | 3.024 | 0.69 | 2.954     | 2.973 | -0.64 |

注:  $K$  为量纲一的当量导热系数.

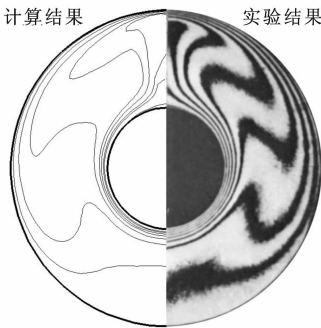


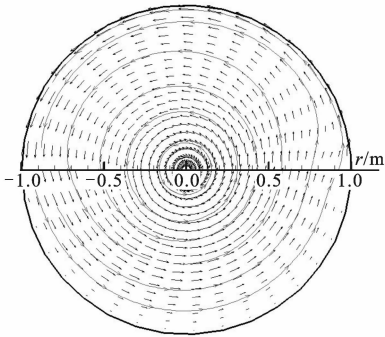
图 3 等温线的计算结果与实验结果比较

2 单元的奇异性

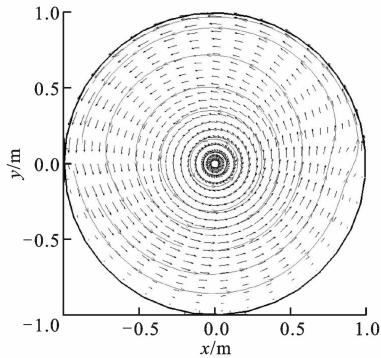
下面以圆形区域的稳态驱动流为例, 说明退化三角形单元的奇异性问题.

对于圆形区域的稳态驱动流, 计算区域的半径为 1.0 m, 圆的上半弧旋转驱动速度为 1.0 rad/s, 下半弧静止; 内部流体的黏度为  $0.01 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 密度为  $1.0 \text{ kg/m}^3$ . 为了便于比较, 采用极坐标下的结构化程序和直角坐标系下非结构化程序(计算区域采用 Delaunay 方法<sup>[8,10]</sup>进行三角形单元划分, 分别进行计算, 空间项离散采用中心差分格式, 计算结果如图 4 所示. 对比图 4 中速度矢量与流线可看

出, 两种不同网格系统的计算结果的差别是明显的. 从速度矢量来看, 前者在接近中心处的单元只有旋转速度, 而没有径向速度. 从流线来看, 前者计算的涡心位于圆心处, 而后者计算的涡心则偏离圆心. 这也就是说, 对圆心周围三角形单元不进行任何处理, 对于数值计算而言离散方程并没有任何奇异性, 程序也不会发散, 但从物理意义上说是不合理的.



(a)极坐标系下的结构网格



(b)直角坐标系下的非结构化网格

图 4 两种网格系统计算的速度矢量与流线图

导致两种不同网格系统计算结果的差异的原因如下. 对于极坐标系下的结构化网格, 虽然在中心的单元由四边形退化为三角形, 但网格线的正交性并没有发生变化, 即两单元中心连线仍与它们的界面垂直(见图 2b). 因此, 对于动量方程和压力修正方程的离散而言, 其相邻单元离散方程系数的计算并不会受影响(退化后的  $n$  界面的离散方程系数也是正确的, 因为其面积为 0, 离散方程系数也为 0), 导致不合理物理现象出现的主要原因是由式(2)和式(3)压力梯度项的非正确计算引起的. 对于压力梯度, 一般是采用散度定理将压力梯度由体积分转化为面积分, 即

$$-\int_V \nabla p dV = -\oint_A p d\mathbf{A}$$

(8)

式中:  $V$  表示控制容积;  $\mathbf{A}$  为控制容积表面积的单位

矢量,指向单元外.对于图2a中的四边形,考虑到网格族线的正交性,使式(7)的离散形式在 $u$ 和 $v$ 方程中的表达分别为

$$-e_u \cdot \oint_A p d\mathbf{A} = -(p_e - p_w)_P \Delta r \quad (9)$$

$$-e_v \cdot \oint_A p d\mathbf{A} = -(p_n - p_s)_P r \Delta \theta \quad (10)$$

式中: $e_u$ 、 $e_v$ 分别为 $u$ 方向和 $v$ 方向的单位矢量.式(9)和式(10)就是式(2)和式(3)中压力项的表达.对于图2b所示圆中心处的退化三角形,其 $w$ 和 $e$ 界面与 $s$ 界面并不垂直,进行类似的简化是不可行的,必须将界面上的压力进行正交分解,式(8)在 $u$ 和 $v$ 方向的表达式分别为

$$-e_u \cdot \oint_A p d\mathbf{A} = -(p_e \cos(\Delta\theta_e/2) - p_w \cos(\Delta\theta_w/2))_P \Delta r \quad (11)$$

$$-e_v \cdot \oint_A p d\mathbf{A} = -(p_n - p_s)_P r \Delta \theta + (p_e \sin(\Delta\theta_e/2) - p_w \sin(\Delta\theta_w/2))_P \Delta r \quad (12)$$

因此,式(2)和式(3)相应修改如下

$$a_P u_P = \sum a_{nb} u_{nb} + b_P - (p_e \cos(\Delta\theta_e/2) - p_w \cos(\Delta\theta_w/2))_P \Delta r \quad (13)$$

$$a_P v_P = \sum a_{nb} v_{nb} + b_P - (p_n - p_s)_P r \Delta \theta + (p_e \sin(\Delta\theta_e/2) - p_w \sin(\Delta\theta_w/2))_P \Delta r \quad (14)$$

### 3 算例的考核与分析

沿用上一节的算例,计算区域单元采用图1d所示类型,单元数量为36(环向)×20(径向),空间离散采用中心差分方法,压力修正采用式(13)和式(14),代数方程组的求解在周向采用CTDMA算法<sup>[7,11]</sup>,计算得到的结果如图5所示.对比图5与图4b可知,采用压力修正处理后,极坐标系下结构化网格与直角坐标系下的非结构化网格的计算结果定性一致.

为了定量确定采用退化后网格算法的计算精度,本文首先基于直角坐标系非结构化算法,不断细化网格,得到与网格无关的数值解.对于直角坐标系的非结构化网格,计算分别采用2586个单元、5850个单元、10256个单元、23328个单元计算,并比较计算区域垂直中心线上的速度,结果显示10256个单元与23328个单元所计算的速度分布曲线重合,因此本文采用10256个单元计算得到的结果为网格无关基准解.

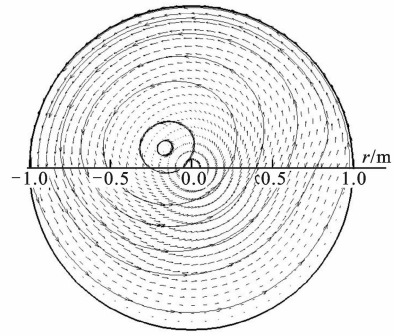
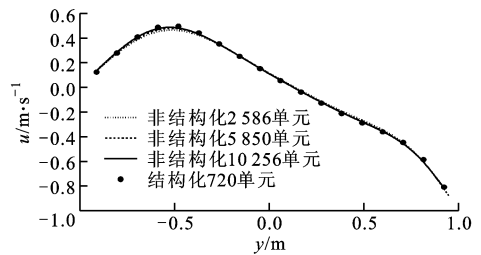
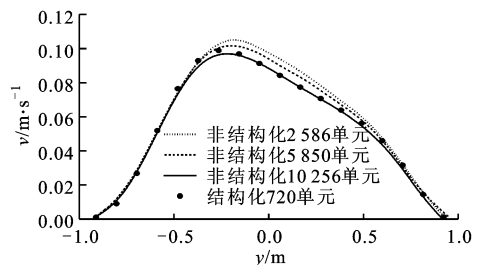


图5 压力修正后极坐标系下结构化网格计算的速度矢量与流线图

为了检验压力项修正后极坐标系下结构化网格的计算精度,下面对比垂直对称线上的速度值,即直角坐标系下 $x=0$ 或极坐标系下 $\theta=90^\circ$ (或 $270^\circ$ )上的速度值(见图6).由图6a的 $u$ 速度分布曲线可看出,直角坐标系非结构化网格的单元数对 $u$ 速度分布的影响较小,而压力修正后的极坐标系的结构化网格也得到了相同的速度分布.由图6b可看出,直角坐标系非结构化网格的单元数对 $v$ 速度的影响较大,但压力修正后,极坐标系下的结构化网格得到的 $v$ 速度与直角坐标系下非结构化网格得到的网格无关基准解相吻合,而且极坐标系下的结构化网格所需要的单元数量要比直角坐标系下网格无关解所需的非结构化网格单元数小2个数量级.因此,虽然极坐标系下的结构化网格的单元数较少,但压力修正后该方法具有较高的精度.



(a)  $u$  速度



(b)  $v$  速度

图6 垂直对称线上的速度分布

## 4 结 论

本文针对极坐标系统中极点附近结构化网格单元因退化产生的非物理解进行分析,并对退化单元内的压力梯度离散项进行修正,提出了一种适合于有限容积法的极点奇异性单元的极坐标系下的网格处理方法。关于圆形区域的稳态驱动流的数值计算表明,压力修正后,极坐标系的结构化算法与单元数高于其数十倍的非结构化算法具有一致的计算效果,证明该方法具有较高的精度和效率。同时,与其他奇异性单元处理方法相比,本文的算法具有简单、易于实施等特点。

## 参考文献:

- [1] XU X F, LEE J S, PLETCHER R H. A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low Mach number in Cartesian coordinates [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 203:22-48.
- [2] VERZICCO R, ORLANDI P. A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical co-ordinates [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 123:402-414.
- [3] EGGEELS J G M. Direct and large eddy simulation of turbulent flow in cylindrical pipe geometry [D]. The Netherlands: Delft University of Technology, 1994.
- [4] MA L, INGHAM D B, WEN X. A finite volume method for fluid flow in polar cylindrical grids [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1998, 28: 663-677.
- [5] XUE S C, PHAN-THIEN N, TANNER R I. Fully three-dimensional, time-dependent numerical simulations of Newtonian and viscoelastic swirling flows in a confined cylinder: method and steady flows [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1999, 87:337-367.
- [6] HE Y L, TAO W Q, QU Z G, et al. Steady natural convection in a vertical cylindrical envelope with adia-

batic lateral wall [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, 47: 3131-3144.

- [7] 聂建虎,李增耀,陶文铨,等. 周期性三对角阵方法与反复迭代法的比较[J]. *西安交通大学学报*, 2000, 34(7):21-25.
- NIE Jianhu, LI Zengyao, TAO Wenquan, et al. Heat transfer and fluid flow analysis using collocated cylindrical coordinates in three dimensions [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2000, 34(7):21-25.
- [8] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京:科学出版社, 2000.
- [9] KUEHN T H, GOLDSEIN R J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders [J]. *J Fluid Mech*, 1976, 74 (4): 695-719.
- [10] 宇波. 内翅片管中的对流换热及非结构化网格中有限容积法的研究[D]. 西安:西安交通大学能源与动力工程学院, 1998.
- [11] 陶文铨. 数值传热学[M]. 2版. 西安:西安交通大学出版社, 2004.

## [本刊相关文献链接]

竖直环管内低压水过冷沸腾数值模拟. *西安交通大学学报*, 2008, 42(7):855-859.

微通道中极性流体流动特性的研究. *西安交通大学学报*, 2007, 41(3):274-278.

一种求解 N—S 方程的自适应直角网格方法. *西安交通大学学报*, 2009, 43(11):11-17.

气泡堆积法生成曲线多边形区域非结构化网格及其应用. *西安交通大学学报*, 2009, 43(11):109-113.

多分散系统不同粒径颗粒碰撞的多重八叉树搜索算法. *西安交通大学学报*, 2008, 42(3):304-308.

利用能量守恒和径向基函数插值的流固耦合界面数据传递方法. *西安交通大学学报*, 2009, 43(9):114-119.

(编辑 王焕雪)