

带集中质量块薄板的移频数值仿真

向建华, 廖日东, 蒲大宇  
(北京理工大学机械与车辆学院, 100081, 北京)

**摘要:** 通过对带有附加质量块薄板的理论分析和频率计算, 从中获取了影响薄板系统动态特性的质量块主要参数, 再运用有限元方法系统地分析了质量块的质量、位置、数量、所处介质和分布面积对薄板频率的影响规律. 数值仿真结果表明: 通过添加质量块来实现结构移频, 应尽量采用质量为结构总质量 10% 以下的集中质量块, 并放置于振型波峰处, 以获得最大的频率改变量; 沉浸于重质流体的薄板需要更大的附加质量, 才能获得与轻质流体相同的频率改变量; 对于高阶模态, 应尽可能多地在振型峰值上布置质量块并呈对称分布. 在此基础上开展的薄板移频技术的应用研究, 可为实际薄板结构修改时调整固有频率以避开工作频率、减小振动提供指导.

**关键词:** 集中质量; 薄板; 移频; 有限元

**中图分类号:** TU433   **文献标志码:** A   **文章编号:** 0253-987X(2010)11-0082-05

Numerical Simulation on Frequency Shift of Thin Plate with Lumped Mass Block

XIANG Jianhua, Liao Ridong, PU Dayu  
(School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** The theoretical analysis and frequency calculation of a thin plate with additional mass blocks were performed to achieve the main parameters of mass blocks that affect the dynamic characteristics of the thin plate. The influence of mass block parameters such as mass value, position, quantity, media, and distribution area on the frequency of the thin plate was discussed with the finite element method. The numerical simulation results show that, when the structural frequency shift is realized by adding mass blocks, it is necessary to lay the lumped mass blocks whose mass value is less than 10% of the total structure mass at the wave peak of the structural mode shape so that the greatest shift of frequency can be achieved. For the thin plate immersed in heavyweight fluid, much greater additional mass should be added to obtain the required shift of frequency. Moreover, for the high-rank mode shape, mass blocks should be symmetrically laid at the wave peak of the structural mode shape. The further application study on frequency shift of thin plates on the basis of this study may be useful for altering natural frequency and reducing vibration in the modification of thin plate structure.

**Keywords:** lumped mass; thin plate; frequency shift; finite element

通过修改结构的质量来进行结构降噪设计, 需要考虑结构所受的各种激励, 以避免结构共振. 在复杂环境下, 设备的激励频率难以预测, 且设备结构的固有频率会随着工况发生变化, 所以在设计时就需要调整结构的动态特性<sup>[1]</sup>. 解决上述问题, 采用基于集中质量的频率调整方法是理想的选择, 即通过调整结构质量分布而引起的固有频率偏移来实现避振, 如螺栓法等<sup>[2]</sup>. 因此, 有必要系统地研究集中质

量在不同参数变化下的结构频率变化规律,探索其使用范围.

本文采用能量方法,从带有质量块的薄板频率计算式中寻找影响薄板系统动态特性的质量块的主要参数,在此基础上运用有限元方法系统分析了质量块参数对薄板系统固有频率的影响规律,以此为工程中薄板结构的降噪设计提供理论参考.

1 带附加质量块的薄板振动理论研究

薄板一般定义为板厚小于中面最小尺寸的 1/5 的等厚板,它可以承受中面力和横向力,而这 2 个力会分别产生纵向振动和横向振动. 噪声辐射主要是由薄板结构横向振动产生的,其自由振动微分方程为<sup>[3]</sup>

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

式中: $D=Eh^3/(12(1-\mu^2))$ 为薄板的弯曲刚度, $E$ 为弹性模量, $\mu$ 为泊松比; $h$ 为板厚; $w$ 为弯曲挠度函数; $\rho$ 为薄板的密度.

基于能量法对式(1)进行化简,得到

$$DKA = \omega^2 MA \tag{2}$$

式中: $K$ 是刚度矩阵; $M$ 是质量矩阵; $A$ 是未知系数矢量.

对式(2)进行各阶模态频率和模态振型求解,得到 4 边简支薄板第 $(m,n)$ 阶模态频率的解析解为

$$\omega = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left( \frac{D}{M} \right)^{1/2} \tag{3}$$

式中: $M$ 为薄板整体质量; $\omega$ 为角频率; $m,n$ 分别为  $X$  向和  $Y$  向模态项数.

当薄板带有质量块时,由式(1)可以得到其振动微分方程为

$$D \nabla^4 w + \{ \rho h + M' \delta(x-u) \delta(x-v) \} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

式中: $M'$ 和 $(u,v)$ 为集中质量块的质量和位置.

当考虑质量块的大小,即实际质量块存在分布面积时,其自由振动微分方程为

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m' A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

式中: $m'$ 是单位面积的质量; $A$ 是分布质量面积.

基于式(3),针对式(4)和式(5)求解,可以得到质量块的不同数量和不同分布下的薄板模态频率.

单一质量块下的薄板模态频率为

$$\omega^2 = \frac{2U_{\max}}{\iint \gamma(x,y) w^2(x,y) dx dy + M'(k,h) w^2(k,h)} \tag{6}$$

多个质量块下的薄板模态频率为

$$\omega^2 = \frac{\iint D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\left( \iint \gamma(x,y) w^2(x,y) dx dy + \sum_j M'_j(k_j,h_j) w^2(k_j,h_j) \right)} \tag{7}$$

考虑质量块分布下的薄板模态频率为

$$\omega^2 = \frac{2U_{\max}}{\iint \gamma(x,y) w^2(x,y) dx dy + \iint m'(x,y) w^2(x,y) dx dy} \tag{8}$$

式(6)、式(8)中: $U_{\max}$ 为薄板最大应变能,其值为

$$U_{\max} = \iint \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \tag{9}$$

由式(6)~式(8)可知,集中质量块的质量大小、位置、数量及分布面积对薄板振动频率和振型分布均有影响.

由式(3)可知,在薄板简支工况时,第 $(2,1)$ 阶模态(即 $m=2,n=1$ )相当于将边长 $a$ 缩短为 $a/2$ 时的第 $(1,1)$ 阶模态,它们有相同的振型和模态频率,这为研究提供了便利. 因此,本文研究主要集中于薄板第 $(1,1)$ 阶模态随着质量块参数的变化规律.

2 集中质量对薄板固有频率的影响规律

为便于表述,本文定义了质量比和频率比,质量比为增加的质量块质量与原薄板质量之比,频率比为增加质量块前后的薄板固有频率之比.

薄板采用合金钢材料,密度为 7 820 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为 2.068×10<sup>11</sup> N/m<sup>2</sup>,泊松比为 0.29. 有限元模型采用壳单元,质量块采用集中质量单元,而分布质量则通过增加局部单元密度来实现,施加边界条件时薄板采用了 4 端简支的约束方式. 下面将讨论质量块的影响.

2.1 块的质量影响

薄板长宽比从 1:1~1:4 共 4 种,质量比从 5%~50%共 6 种,质量块位置在薄板的对称中心. 计算得到各工况下的薄板第 $(1,1)$ 阶模态频率如图 1 所示.

从图 1 可知,附加质量增加 5%能使薄板结构

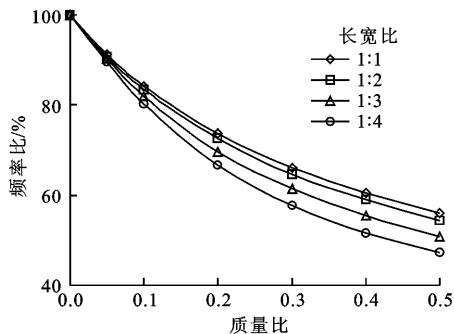


图1 薄板的质量与频率变化曲线

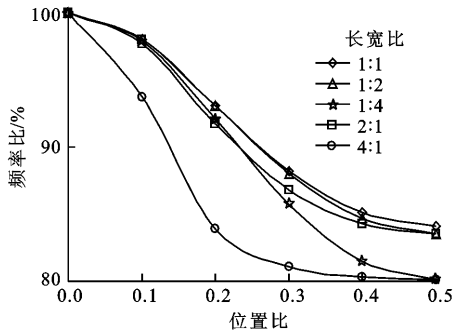


图2 质量块的位置与频率变化曲线

固有频率下降10%，附加质量增加10%则薄板固有频率下降15%~20%，而其后逐渐趋缓，当附加质量增加到50%时，频率下降了45%~60%。因此，增加5%~10%左右的质量对薄板固有频率的影响最为显著；随着附加质量的增加，薄板对质量块的固有频率敏感度明显下降。此外，随着薄板的长宽比增加，质量对频率的影响程度相对增大，但不显著。所以，当长宽比较大时，可以由小质量来调整薄板的固有频率。

## 2.2 块的位置影响

为了研究质量块在薄板长短轴上的移动对频率的影响规律，本文计算了长短轴长度比分别为1:1、1:2、1:4、2:1、4:1共5种工况。质量块的移动方向都是从长边边缘向中心移动，第1~第3种工况模拟了质量块在X轴上的移动，第4、第5种工况模拟了质量块在Y轴上的移动（第4、第5种工况的长短轴长度比和第2、第3种工况的长短轴长度比相反）。计算时，薄板加载的附加质量块的质量比为5%，并设边界的位置比（质量块的位置与薄板边长之比）为0，中心的位置比为0.5。

图2列出了质量块在长边上由边界到中心逐渐变化时的薄板第1阶模态频率。图2结果表明：①质量块放置于薄板对称中心（位置比为0.5，即第1阶振型峰值位置）时，频率变化最大，而质量块放置于边界时，这种变化几乎为0；②质量块沿X和Y轴非线性变化，而在薄板的边缘区域和中心区域频率变化不大，在中部椭圆形区域频率变化较大，也就是说在薄板中部区域质量块对位置的敏感度最低，在此处附加质量块将具有较高的稳健性；③短轴相对于长轴，变化幅度更为平均，更接近于线性变化，因此从稳健性角度上看，质量块应更多地布置在长轴方向上。

## 2.3 块的数量影响

高阶模态一般有多个并列峰值，因此有必要研

究质量块的数量问题。在质量比为5%、薄板的长短轴长度比分别为1:1、1:2、1:4的情况下，对高阶模态（如第(2,2)、第(2,3)模态）随质量块数量的变化规律进行了分析，结果如下（限于篇幅，本文只给出相关结论，详细数据参见文献[4]）。

(1)将质量块完全放置于一个波峰处的模态频率改变量小于将质量平均分配到所有峰值点后的频率改变量。

(2)质量块数相同，质量不均匀分配的频率改变量小于均匀分配的情况。

(3)多峰值下增加质量块会使得振型不再对称分布，而在加载质量块处的波峰峰值降低，随着分配质量的增加，峰值呈现下降趋势。

(4)质量块分布在振型节线上，在一定的质量限制下其对振型和频率影响很小。

(5)质量块对称分布的模态频率改变量总体上优于不对称分布的情况。

综上，在薄板结构的工程设计中，对于高阶模态应将添加的质量平均分配，并放置于模态的所有峰值点上或者放置的峰值点尽可能多，放置位置应该对称分布，这样便可以保证最好的频率调整效果。

## 2.4 块的介质影响

工程中，许多薄板放置于液体中或者放置在薄板与液体的一个接触面上，这对频率的影响较大，需要综合考虑<sup>[5]</sup>。为此，本文建立了薄板与流体双面接触的流固耦合模型，并浸没于无限流体域中，流体采用密度为850 kg/m<sup>3</sup>的润滑油。图3的计算结果表明，随着质量块质量的增加，薄板双面浸没于油中的频率变化明显小于无油浸没工况，即加载流体使得薄板对质量块质量的频率的敏感度有所降低。因此，浸没于液体中的薄板要得到等同于无流体加载的薄板频率改变量，需要更大的质量比。

## 2.5 分布质量的面积影响

在实际工程应用中，理想的质量块是不存在的，

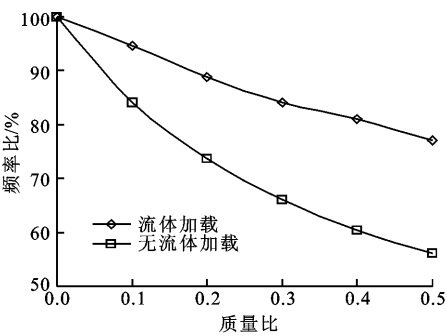


图 3 加载流体时质量与频率的变化曲线

它们都具有一定的高度和面积,精确计算时需要考虑这些高度和面积的影响。

图 4 显示了薄板长宽比为 1 : 1、1 : 2、1 : 4 时,在分布质量加载下薄板固有频率的变化规律,其中的面积比表示分布质量占有面积和薄板总面积的比值,0 代表集中质量,1 代表分布于整个薄板表面(分布形状和薄板形状一致),本文质量比仍设定为 5%。

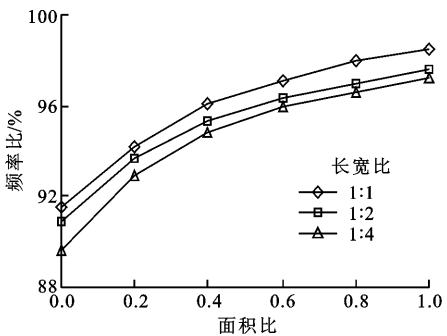


图 4 分布质量的面积与频率的变化曲线

由图 4 可知,3 种长宽比在整体上有相同的近乎平行的变化规律,曲线斜率变小,表征面积越小频率变化越大。因此,在采用集中质量方法修正频率时,应该尽可能减小加载质量的面积。

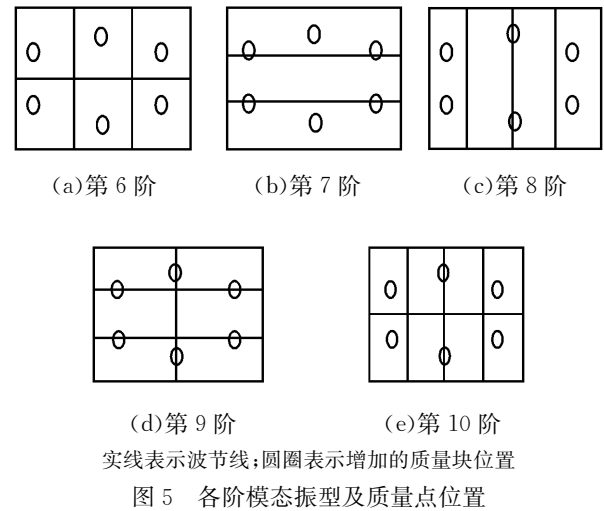
### 3 薄板结构的移频技术应用研究

基于集中质量块参数对薄板频率的影响规律,本文进一步开展了薄板结构的移频技术应用研究。设薄板长 0.3 m,宽 0.4 m,厚度 0.001 m,受到法向激励力,频率范围为 260~270 Hz。原结构模态频率分布如表 1 中修改前频率所示,模态振型如图 5 所示。针对模态分析结果得出,激励力可能激发起薄板第 7、第 8 阶模态的振动,所以采用基于集中质量块的频率调整方法可调整薄板第 7、第 8 阶模态频率,使之远离 260~270 Hz 频段。

表 1 模态频率对比

| 模态阶次     | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 修改前频率/Hz | 243 | 257 | 269 | 302 | 349 |
| 修改后频率/Hz | 209 | 238 | 243 | 302 | 310 |

第 5 阶模态分别为第(2,3)、第(3,1)、第(4,1)、第(2,3)和第(4,2)模态。在设计中,质量块的改动会影响高阶模态频率,并有可能使得模态次序发生较大变化,因此当通过降低第 7、第 8 阶模态频率使其偏离激励频率时,需要保证第 9、第 10 阶模态频率没有较大变化,且不能改变结构的模态次序。



从本文第 2 节中的质量块参数对薄板固有频率的影响规律可知,质量块应该尽可能放置于第 7、第 8 阶模态的波峰处,放置于第 9、第 10 阶模态的波节处,并保持对称性,但从图 5 可知,这一原则不可能完全实现。振型采用如图 6 所示的质量块分布,共有 6 个质量块,质量块质量总和为薄板总质量的 10%。其中的 2 个质量块用于控制第 7 阶模态,放置于 2 个波峰上,另外 4 个质量块用于控制第 8 阶模态,放置于波峰两侧,以防止对第 9 阶模态造成影响,且能增强频率降低的效果,弥补质量块未在峰值中央的不足。由于质量块完全在波节之上,所以对第 9 阶模态没有任何影响。4 个质量块位于 2 个波峰边缘处,所以应考虑对第 10 阶模态的影响。低于第 7 阶的模态频率没有变化或者变化很小,所以不会出现在 260~270 Hz 频段,计算时列出了第 6 阶模态,以作参考。

修改后的模态频率结果见表 1,从中可见第 7、第 8 阶模态频率完全移开了 260~270 Hz 频段,这 2 个阶次的模态频率降低了 10% 左右,而第 9 阶模

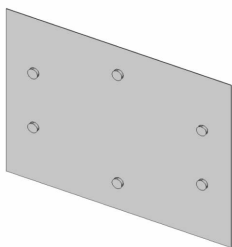
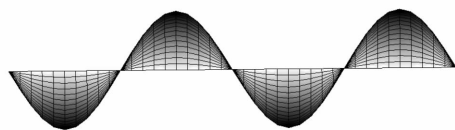


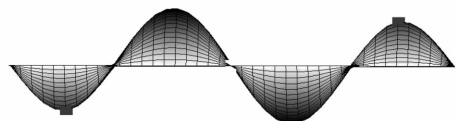
图6 薄板质量块位置示意图

态没有变化,第6、第10阶模态有较大的降幅,但未改变基本频率分布,并在允许的变化范围内.各阶模态基本保持原有振型,在质量块的位置上,峰值略有下降.修改前后的第8阶模态振型对比如图7所示.

应用实例证明,合理地布置集中质量块能有效改变薄板结构的动态特性,使薄板频率远离可能激发共振的频段,从而提高结构的振声特性.



(a)修改前



(b)修改后

图7 第8阶模态振型对比

## 4 结 论

为了通过修改结构的质量达到结构降噪设计的目的,本文对带附加质量块的薄板振动理论和质量块参数对薄板固有频率的影响进行了研究,并基于此深入展开了薄板结构的移频技术应用研究,结论如下.

(1)质量块应放置于振型波峰处,以获得最大的频率改变量.波节处的质量块对频率影响很小,质量块质量应小于结构总质量的10%,才能获得较高的质量频率比.

(2)沉浸于重质流体的薄板需要附加更大的质

量,这样才能获得与轻质流体相同的频率改变量.

(3)高阶模态移频时应尽可能多地在振型峰值上布置质量块并呈对称分布,应尽可能减小质量块的覆盖分布面积.

## 参考文献:

- [1] CONSTANS E W, KOOPMANN G H, BELEGUNDIE A D. The use to minimize the radiated sound power of vibrating shells: theory and experiment [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 217(2): 335-350.
- [2] LOW K H, CHAI G B, LIM T M, et al. Comparisons of experimental and theoretical frequencies for rectangular plates with various boundary conditions and added mass [J]. International Journal of Mechanical Science, 1998, 40(11): 1119-1131.
- [3] CREMER L, HECKL M. Structure-borne sound: structural vibrations and sound radiation at audio frequencies [M]. Berlin, Germany: Springer, 2005.
- [4] 蒲大宇. 内燃机薄板结构振声特性分析与实验研究 [D]. 北京: 北京理工大学机械与车辆学院, 2008.
- [5] KERBOUA Y, LAKIS A A, THOMAS M, et al. Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid [J]. Applied Mathematical Modeling, 2008, 32(12): 2570-2586.

## [本刊相关文献链接]

采用遗传算法的自适应随机共振系统弱信号检测方法研究. 西安交通大学学报, 2010, 44(3): 32-36.

采用余弦拟合的随机共振反演技术研究. 西安交通大学学报, 2010, 44(1): 41-45.

自适应移频变尺度随机共振在故障诊断中的应用. 西安交通大学学报, 2009, 43(7): 69-73.

铝合金薄板在疲劳载荷下孔洞聚合试验中的材料损失. 西安交通大学学报, 2009, 43(3): 121-124.

铜长条薄板在疲劳载荷下裂纹聚合的试验研究和一个新发现. 西安交通大学学报, 2009, 43(2): 121-124.

航空铝合金薄板在疲劳载荷下孔洞聚合的试验研究和一个新发现. 西安交通大学学报, 2009, 43(1): 125-128.

(编辑 苗凌)