

# 错位安装对多联组配轴承转子系统 动力学特性的影响

罗平, 刘恒, 景敏卿

(西安交通大学机械电子及信息系统研究所, 710049, 西安)

**摘要:** 针对多联组配轴承在安装过程中出现错位时, 错位是否影响转子系统稳定运行的问题, 建立了柔性转子系统的有限元模型, 推导了错位安装的轴承非线性力的公式, 采用数值积分的方法分析了错位安装对转子系统的非线性动力学特性的影响. 通过与正常安装转子系统的对比发现, 错位安装是影响多联组转子系统稳定性的重要因素之一. 当错位量一定时, 可较大地减小系统失稳区域的宽度, 当错位在  $x$  方向时, 可使  $x$  方向的振幅随错位量的增大而减小, 但错位在  $y$  向的振幅变化幅度不大. 研究表明, 适当的错位有助于改善转子系统运行的稳定性.

**关键词:** 错位; 非线性动力特性; 稳定性

**中图分类号:** O347.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)07-0106-06

## Influence of Misdisplacement on Dynamic Characteristics System of Rotor Supported by Combined Ball Bearings

LUO Ping, LIU Heng, JING Mingqing

(Institute of Mechatronics and Information Systems, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** Aiming at the problem whether the stable operation of rotor system is influenced as installed displacement appears in one of ball bearings, a finite element model of the flexible rotor is established and the formula of the nonlinear force about misdisplacement installed bearing is derived. The numerical integral is employed to analyze the influence of installed displacement on the dynamic characteristics of the rotor system. Compared with the systems supported by bearings normally installed and ones with misdisplacement, it can be found that the installed displacement plays one of important factors on the stability of the rotor system. A certain misdisplacement makes the width of the system instability region narrower; if the displacement appears in  $x$  direction, the amplitude in  $x$  direction is smaller with the increasing installed displacement, while the amplitude in  $y$  direction does not change obviously. The analytic results show that the proper misdisplacement is beneficial for stable operation of the rotor system.

**Keywords:** misdisplacement; nonlinear dynamics characteristic; stability

多联组配角接触球轴承具有高精度、高转速、高刚度等基本使用特性, 除了单列角接触球轴承本身的技术外, 还有组配方面的特殊技术要求. 因此, 组配轴承多应用于机床、精密仪器、高速离心机等领域<sup>[1]</sup>. 目前, 国内外对于单列球轴承支承的转子系

统的研究比较多: 白长青<sup>[2]</sup>研究了轴承间隙对转子系统稳定性的影响, 结果表明滚动轴承间隙量是影响转子系统动力稳定性的一个重要因素; Yamamoto<sup>[3]</sup>对有径向间隙的球轴承支承的垂直转子的解析解进行了研究; Tiwari 和 Gupta<sup>[4]</sup>建立了滚动轴承

支承的刚性水平转子模型,并研究了内部径向间隙对系统动力学特性的影响;Sinou<sup>[5]</sup>建立了轴承-转子系统的有限元模型,并考虑了间隙和非线性赫兹接触力对系统稳定性的影响,研究了不平衡量对转子系统非线性特性的影响.但是,关于多联组配角接触球轴承支承的转子系统的研究却鲜见报道.

本文考虑了游隙、不平衡力以及转子在高速转动中的陀螺效应,建立了多联组轴承转子系统的铁摩辛柯梁模型.在建立轴承模型过程中,考虑到多联组轴承的宽度,本文采用两组具有轴承非线性力的弹簧进行模拟,运用预测追踪的 CPNF 法<sup>[6]</sup>研究了系统控制参数改变时的转子系统非线性特性,并且比较分析了轴承错位对系统非线性特性的影响.

## 1 系统模型建立

如图 1 所示,滚动轴承-转子系统是一个典型的非线性动力系统,该系统由线性部分(柔性转轴)和局部非线性部分(滚动轴承、盘)组成.将图 1 的轴承-转子模型进行离散,根据图 2 建立有限元模型.转子-轴承系统的动力学方程可表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{K}$  分别为系统的质量矩阵、陀螺矩阵、刚度矩阵; $\mathbf{F}$  为周期为  $T$  的外力(包括重力和不平衡力)与滚动轴承施加于转子的非线性轴承力之和.

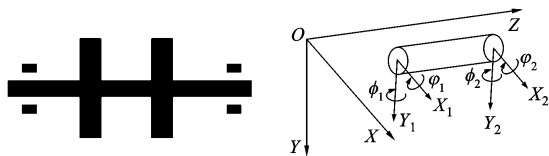


图 1 轴承-转子模型图

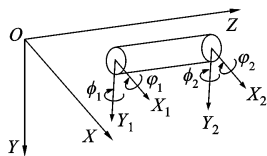


图 2 转子有限元模型单元

## 2 滚动轴承的非线性力

角接触球轴承受力后在滚动体与内外滚道处发生接触弹性变形,轴承接触力与变形之间的关系可用赫兹公式来计算.根据赫兹弹性接触理论,第  $j$  个滚珠与内外滚道间的接触力  $Q_j$  与弹性变形量  $\delta_j$  之间的关系可表示为<sup>[7]</sup>

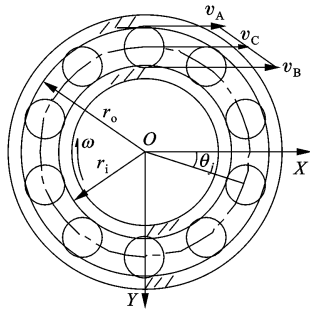
$$Q_j = k_j \delta_j^{3/2} \quad (2)$$

式中: $k_j$  为滚珠与内外滚道间的总等效刚度系数<sup>[7]</sup>.

建立如图 3 所示的滚动轴承坐标系,其中第  $j$  个滚珠在  $t$  时间转动的角度为

$$\theta_j = \frac{2\pi}{N_b}(j-1) + \omega_c t, \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (3)$$

式中: $N_b$  为滚珠个数; $\omega_c$  为滚珠公转的角速度.在本文中,滚动轴承的外圈与轴承座固结不转动,内圈与转轴一起旋转.



$\omega$ :转轴的转速; $v_A$ 、 $v_B$ :滚珠与轴承内、外圈接触点的转速;  
 $v_C$ :滚珠的公转速度; $r_i$ 、 $r_o$ :轴承内、外圈的滚动半径

图 3 滚动轴承模型

### 2.1 正常安装轴承的受力变形

根据图 3 的模型,滚珠公转的角速度可表示为

$$\omega_c = \frac{\omega r_i}{r_i + r_o} \quad (4)$$

因此,当考虑了径向间隙  $\gamma$  时,第  $j$  个滚珠的弹性变形表示为

$$\delta_{\theta j} = (x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) \cos \alpha - \gamma \quad (5)$$

式中: $x$ 、 $y$  分别为轴承内圈中心点在水平和垂直方向的位移; $\alpha$  为轴承的接触角.

### 2.2 错位安装轴承的变形

图 4 为错位安装与正常安装轴承的对照图,模型中轴承内圈中心点的偏移量即为错位量

$$e = ((e_x)^2 + (e_y)^2)^{1/2} \quad (6)$$

式中: $e_x$ 、 $e_y$  分别为  $e$  在  $x$ 、 $y$  方向的分量,其错位角度

$$\theta_e = \arctan e_y / e_x \quad (7)$$

错位后的间隙由  $\gamma$  变为  $\gamma_e$ (随角度而变化),则径向间隙

$$\gamma_e = \gamma - e \cos(\theta_j - \theta_e) \quad (8)$$

当考虑了  $\gamma_e$  时,第  $j$  个滚珠的弹性变形表示为

$$\delta_{\theta j} = (x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) \cos \alpha - \gamma_e \quad (9)$$

由式(5)和式(9),可得第  $j$  个滚珠与内外圈的接触力

$$Q_{\theta j} = \begin{cases} k_j (\delta_{\theta j})^{3/2}, & \delta_{\theta j} \geq 0 \\ 0, & \delta_{\theta j} < 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N_b \quad (10)$$

根据式(2),同时考虑轴承的阻尼,可得整个轴

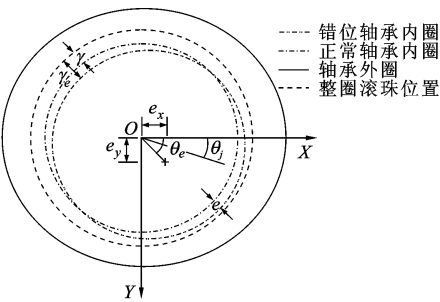


图 4 错位安装轴承间隙模型

承的非线性力在  $x,y$  方向的分力

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -c_b \dot{x} - \sum_{j=1}^{N_b} Q_{\theta j} \cos \alpha \cos \theta_j \\ f_y &= -c_b \dot{y} - \sum_{j=1}^{N_b} Q_{\theta j} \cos \alpha \cos \theta_j \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中： $c_b$  为接触阻尼，根据文献[8]查得  $c_b$  和等效刚度系数的关系为

$$c_b = 1.0 \times 10^{-5} k_j (\delta_{\theta j})^{1/2} \quad (12)$$

本文中的轴承参数见表 1。经计算  $k_j$  为  $1.0831 \times 10^{10} \text{ N/m}^{3/2}$ 。

表 1 轴承参数

| 参 数        | 参数值  |
|------------|------|
| 内圈滚道半径/mm  | 46   |
| 外圈滚道半径/mm  | 62   |
| 轴承内径/mm    | 80   |
| 内圈沟曲率半径/mm | 4.08 |
| 外圈沟曲率半径/mm | 4.61 |
| 球直径/mm     | 7.94 |
| 接触角/(°)    | 15   |
| 节圆半径/mm    | 54   |
| 滚珠个数       | 16   |

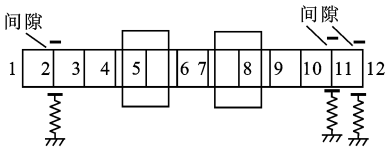
3 数值模拟方法及结果讨论

如图 5 所示，用 2 个弹性支承的弹簧模拟多联组轴承，弹性力为轴承非线性力，转子的结构参数如下：轴直径为 80 mm，轴段长度为 550 mm，圆盘的宽度为 80 mm，圆盘的直径为 120 mm，材料密度为  $7\,800 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量为  $2.03 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，泊松比为 0.3。将图 1 所示的转子系统均匀离散为 11 个单元和 12 个节点，每个节点有 4 个自由度，节点 2、11、12 处为滚动轴承支承（节点 11 处的轴承在安装

时发生错位），节点 5、8 处为盘所在位置，系统不平衡质量取为盘的偏心质量，质量偏心作用于  $OXY$  平面内。当在  $x,y$  方向的质量偏心为  $0,20 \text{ }\mu\text{m}$  时，研究了非线性动力系统稳态周期解随外参数（转速）变化的稳定性分岔规律，用打靶法求解系统的周期解，然后用延续算法和 PNF(Poincaré Newton Floquet)法结合的 CPNF(Continued Poincaré Newton Floquet)方法追踪预估外参数变化时的周期解。当已求得系统外参数( $\mu=\mu_n$ )的周期解  $X_n$  时，则第  $n+1$  步的预估为

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - \left[ \frac{\partial H(X, \mu)}{\partial X_s} \right]^{-1} \frac{\partial H(X, \mu)}{\partial \mu} \Delta \mu \\ \mu_{n+1} &= \mu_n + \Delta \mu \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

然后，在  $\mu=\mu_{n+1}$  处用打靶法进行校准。当系统控制参数  $\mu$  发生改变时，根据 Floquet 特征乘子模，可判断非线性动力系统是否失稳和周期解的分岔形式。



1~12:离散后系统的节点数

图 5 有限元离散后的转子系统

3.1 错位对系统稳定性的影响

针对图 5 中离散后的转子系统，选取  $\gamma=6 \text{ }\mu\text{m}$ ，研究其非线性特性。表 2 为轴承正常安装时（节点 11 处），多联组轴承转子的转速  $\omega(8\,000 \text{ r/min}) < \omega < 9\,600 \text{ r/min}$  的主 Floquet 乘子  $\lambda$ ，运用预测追踪的 CPNF 方法求得分岔点所对应的转速分别为  $8\,330 \text{ r/min}$  和  $9\,268 \text{ r/min}$ ，此时 Floquet 乘子模的最大值  $|\lambda|=1$ 。如图 6 所示，系统的运动状态先为周期运动，随着转速的增加，当  $\omega=8\,330 \text{ r/min}$  时，在分岔点处发生了 2 次 Hopf 分岔，并且系统进入到概周期运动。图 7 为  $\omega=9\,000 \text{ r/min}$  时系统的运动状态，当转速进一步增大、在  $\omega=9\,268 \text{ r/min}$  时，系统在分岔点处又回到了周期运动。此时，系统失稳区域的宽度为  $938 \text{ r/min}$ （见图 6b）。

在  $\gamma=6 \text{ }\mu\text{m}$ 、 $e_y=0 \text{ }\mu\text{m}$ 、 $e_x=6 \text{ }\mu\text{m}$  时，求得系统的分岔点所对应的转速分别为  $9\,089 \text{ r/min}$  和  $9\,423 \text{ r/min}$ ，分岔点前后转速所对应的主 Floquet 乘子如表 3 所示。图 8 为节点 11 处的位移分岔图，其运动规律与正常安装情况下大致相同，只是系统运动失稳区域的宽度大大减小，由正常安装时的  $938 \text{ r/min}$

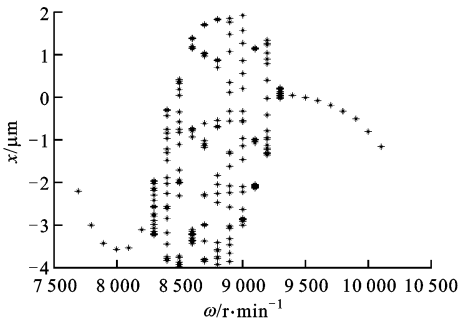
减小为 334 r/min.

表 2  $\gamma$  为 6  $\mu\text{m}$  时分岔点前后转速的主 Floquet 乘子

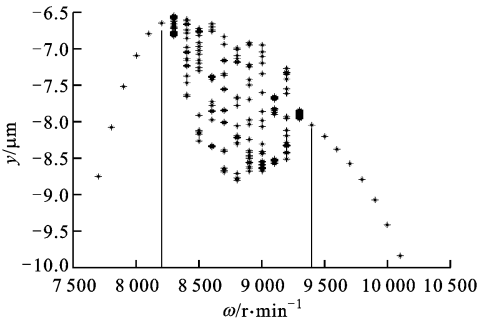
| $\omega/\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$ | $\lambda$                        | $ \lambda $ |
|---------------------------------------|----------------------------------|-------------|
| 8 000                                 | $-0.347\ 6\pm\ 0.845\ 7\text{i}$ | 0.846 4     |
| 8 400                                 | $0.309\ 8\pm\ 1.118\ 0\text{i}$  | 1.160 1     |
| 8 800                                 | $-0.273\ 6\pm\ 1.295\ 6\text{i}$ | 1.324 2     |
| 9 200                                 | $-0.630\ 9\pm\ 0.844\ 9\text{i}$ | 1.054 4     |
| 9 600                                 | $-0.848\ 0\pm\ 0.189\ 0\text{i}$ | 0.868 8     |

表 3  $e_x$  为 6  $\mu\text{m}$  时分岔点前后转速的主 Floquet 乘子

| $\omega/\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$ | $\lambda$                        | $ \lambda $ |
|---------------------------------------|----------------------------------|-------------|
| 8 800                                 | $-0.723\ 9\pm\ 0.462\ 0\text{i}$ | 0.858 7     |
| 9 000                                 | $-0.264\ 9\pm\ 0.920\ 1\text{i}$ | 0.957 5     |
| 9 200                                 | $-0.417\ 0\pm\ 0.942\ 0\text{i}$ | 1.030 2     |
| 9 400                                 | $-0.554\ 3\pm\ 0.842\ 2\text{i}$ | 1.008 3     |
| 9 600                                 | $-0.624\ 6\pm\ 0.645\ 4\text{i}$ | 0.898 2     |



(a)  $x$  方向的位移分岔

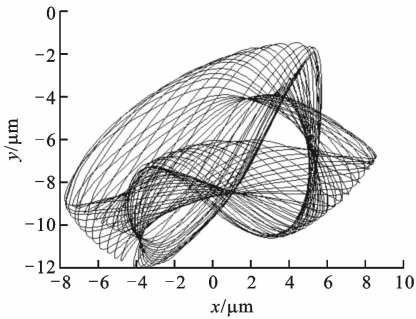


(b)  $y$  方向的位移分岔

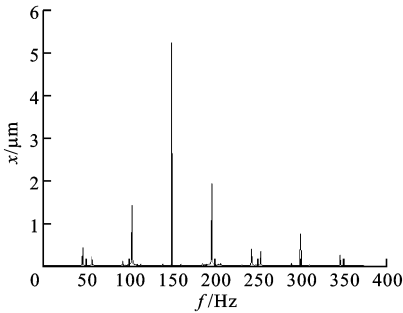
图 6 系统节点 11 处的位移分岔图( $\gamma=6\ \mu\text{m}$ )

如表 4 所示,在  $\gamma=6\ \mu\text{m}$ 、 $e_y=0\ \mu\text{m}$ 、 $e_x=4\ \mu\text{m}$  时,系统分岔点所对应的转速分别为 8 510 r/min 和 9 426 r/min.此时,系统失稳区域的宽度为 916 r/

min,与正常安装的系统的失稳宽度相差不多.



(a) 节点 11 处的轴心轨迹



(b) 节点 11 处的  $x$  方向幅值谱

图 7  $\omega=9\ 000\ \text{r/min}$  时系统的概周期运动

表 4  $e_x$  为 4  $\mu\text{m}$  时分岔点前后转速的主 Floquet 乘子

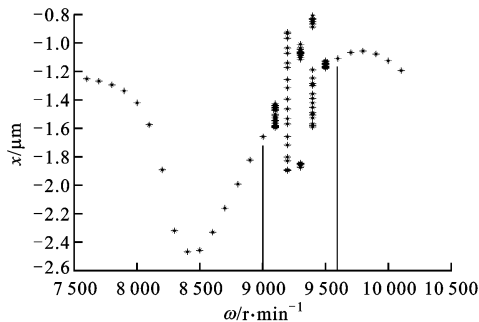
| $\omega/\text{r}\cdot\text{min}$ | $\lambda$                        | $ \lambda $ |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------|
| 8 400                            | $0.297\ 6\pm\ 0.799\ 2\text{i}$  | 0.852 8     |
| 8 800                            | $-0.158\ 4\pm\ 1.239\text{i}$    | 1.249 5     |
| 9 200                            | $-0.573\ 1\pm\ 1.012\ 9\text{i}$ | 1.163 8     |
| 9 600                            | $-0.128\ 7\pm\ 0.861\ 7\text{i}$ | 0.871 3     |

如表 5 所示,在  $\gamma=6\ \mu\text{m}$ 、 $e_y=0\ \mu\text{m}$ 、 $e_x=2\ \mu\text{m}$  时,系统分别在 8 317 r/min 和 9 324 r/min 处发生分岔.此时,失稳区域的宽度最大,为 1 007 r/min.

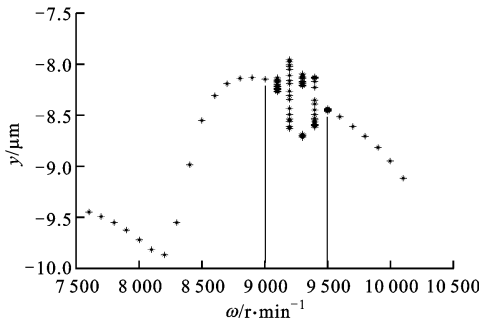
表 5  $e_x$  为 2  $\mu\text{m}$  时分岔点前后转速的主 Floquet 乘子

| $\omega/\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$ | $\lambda$                        | $ \lambda $ |
|---------------------------------------|----------------------------------|-------------|
| 8 200                                 | $-0.441\ 3\pm\ 0.726\ 0\text{i}$ | 0.849 6     |
| 8 600                                 | $0.047\ 5\pm\ 1.342\ 8\text{i}$  | 1.343 7     |
| 9 000                                 | $-0.451\ 4\pm\ 1.117\ 0\text{i}$ | 1.204 8     |
| 9 400                                 | $-0.683\ 7\pm\ 0.642\ 2\text{i}$ | 0.938 0     |

通过 3 种不同错位量与正常安装时的对比分析,可以看出轴承的错位安装是影响多联组转子系统稳定性的重要因素之一.当错位量较小时,错位安

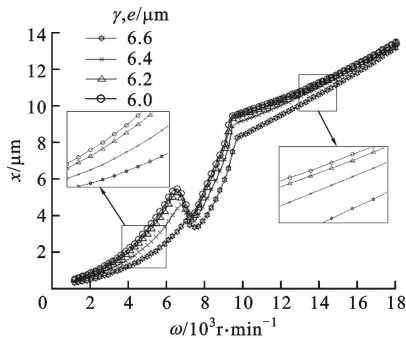


(a)  $x$  方向位移分岔

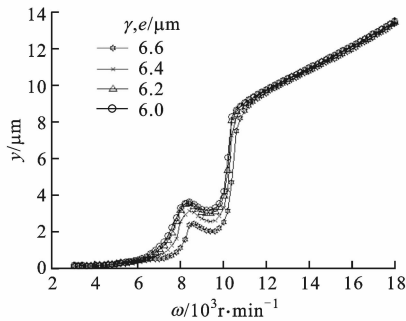


(b)  $y$  方向位移分岔

图8 节点11的位移分岔图( $\delta_x=6\text{ }\mu\text{m}$ )



(a)  $x$  方向振幅



(b)  $y$  方向振幅

图9 节点11处的振幅对比

装使得整个系统的稳定性有所下降,其失稳区域的宽度变大.当错位量变大时,整个系统的稳定性状况获得了一定的改善,失稳区域的宽度随着错位量的增加而变窄,说明一定的错位量对整个系统的稳定性是有帮助的.

### 3.2 错位对系统振动量的影响

振动量是影响转子系统运转平稳性的一个因素,对于机床,过大的振动量使得加工出的工件达不到设计的要求,因此有必要对系统的振动量与轴承错位的关系进行研究.图9为以上几种情况下节点11处的振幅随转速变化的对比图,由图9a可以看到,在轴承偏置方向,系统 $x$ 方向的振幅随着错位量的增大而变小,而 $y$ 方向的振幅变化幅度则不大.当转速进一步增加时,系统进入失稳状态,虽然系统失稳,但这时 $x$ 、 $y$ 方向的振幅变化情况也是比较明显的,即随着错位量的增大而不断变小.当系统穿出失稳区再次进入周期稳定状态时,系统的振幅变化情况与在失稳区以前的周期运动时的振幅增减状况一样.图10为正常安装与错位时, $\omega=5\,000\text{ r/min}$ 节点11处的轴心轨迹,可以看到, $x$ 方向的振幅是随错位量的增大而减小,而 $y$ 方向的振幅变化却不大.

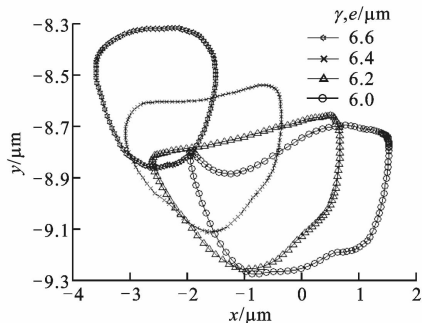


图10 节点11处的轴心轨迹( $\omega=5\,000\text{ r/min}$ )

## 4 结 论

本文建立了错位安装的轴承非线性力的模型,并对比分析了轴承错位安装与安装正常的转子系统的非线性现象.研究发现,轴承的错位安装是影响多联组配转子系统稳定性的重要因素之一,一定的错位量使得系统失稳区域的宽度大为减小,这对改善转子系统的稳定性是有帮助的.当错位在 $x$ 方向时,可使 $x$ 方向的振幅随着错位量的增大而不断减小.由于错位在 $y$ 方向的振幅变化幅度并不大,因此轴承一定的错位对多联组配轴承转子系统稳定的运行是有帮助的.

参考文献:

[1] 杨晓蔚. 国外组配角接触球轴承技术 [J]. 轴承, 2009 (2): 57-62.  
YANG Xiaowei. Foreign technology for matched angular contact ball bearings [J]. Bearing, 2009(2):57-62.

[2] 白长青,许庆余,张小龙. 考虑径向间隙的滚动轴承平衡转子系统的非线性动力稳定性 [J]. 应用数学与力学, 2006, 27(2): 159-169.  
BAI Changqing, XU Qingyu, ZHANG Xiaolong. Nonlinear stability of balanced rotor due to the effect of ball bearing internal clearance [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(2): 159-169.

[3] YAMAMOTO Y. On the vibration of a shaft supported by bearing having radial clearance [J]. Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineering, 1995(21): 182-192.

[4] TIWARI M, GUPTA K. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 238: 723-756.

[5] SINOU J J. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009 (44): 1713-1732.

[6] SUNDARARAJAN P, NOACH S T. Dynamics of forced nonlinear systems using dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-Length continuation method-application to rotor systems [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(1): 10-22.

[7] HARRIS T A. Rolling bearing analysis [M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 1984:160-162.

[8] KRAMER E. Dynamics of rotors and foundations [M]. New York, USA: Springer, 1993:140-141.

(编辑 管咏梅)