

时滞惯性流形在三维壁板颤振数值分析中的应用

梅冠华, 张家忠

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 应用时滞惯性流形(IMD)对三维壁板颤振问题进行了数值分析. 采用 von Karman 几何大变形理论和一阶活塞理论分别描述平板变形和气动力, 由此给出了系统的非线性偏微分控制方程; 采用基于 IMD 的非线性 Galerkin 方法, 将控制方程的解投影到由其线性算子的特征函数所张成的完备空间内, 并截取有限阶模态来逼近真实解, 从而将原无穷维动力系统近似为有限维动力系统; 根据 IMD 思想, 构造了反映高、低阶模态关系的时滞表达式, 使得在数值模拟过程中无需通过复杂数值积分即可直接获取高阶位移分量, 从而降低了系统维数, 缩减了计算量; 对系统的平面稳定、屈曲失稳、极限环振动和非简谐周期振动进行了详细分析, 求取了平面稳定区域边界. 与传统 Galerkin 方法(TGM)的比较表明, IMD 能够达到 TGM 的计算精度, 并使计算时间缩减了 7%~11%, 说明 IMD 具有高效、省时的特性, 可广泛应用于多自由度耗散型动力系统的求解.

关键词: 时滞惯性流形; 非线性 Galerkin 方法; 壁板颤振

中图分类号: O323 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)09-0040-07

Numerical Analysis of 3-D Panel Flutter by Inertial Manifolds with Delay

MEI Guanhua, ZHANG Jiazhong

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The inertial manifolds with delay (IMD) was applied to analyze numerically the three-dimensional panel flutter problem. First, the von Karman's large deformation theory and the first-order piston theory were used to describe the panel deformation and the aerodynamic load, respectively, and the nonlinear partial differential governing equations of the system were presented. Then the IMD based nonlinear Galerkin method was employed to project the solutions of the governing equations onto the complete space spanned by the eigenfunctions of equations' operators. With the truncation of modes to approach the solution, the original infinite dimensional dynamic system is approximated to a finite one. Further, a time-delay expression which implies the interaction between higher and lower modes was constructed. With the time-delay expression presented, the higher displacement modes can be obtained directly without a complicated numerical integration, resulting in a system with less degree-of-freedom and the reduction of computation time. Finally, four typical steady states of the system were analyzed with the method, and the system flat stable boundary was calculated. The comparison between the IMD and traditional Galerkin method (TGM) shows that IMD has the same accuracy and reduces the computation time by 7%-11%. It is likely that the method presented can be applied to other dissipative dynamic systems with large degree-of-freedom.

Keywords: inertial manifolds with delay; nonlinear Galerkin method; panel flutter

壁板颤振是指飞行器上暴露于高速气流中的壁板在特定参数下发生的一种自激振动现象,在超声速和高超声速飞行器上较易发生。壁板颤振引发的非线性振动将对飞行器结构的疲劳强度、飞行性能和飞行安全带来不利影响^[1]。该问题的深入研究对于此类非线性现象的识别、控制和利用,以及飞行器的设计,具有十分重要的意义^[2-3]。

对于三维壁板颤振模型,平板一般采用 von Karman 几何大变形理论,气动力采用一阶活塞理论,由此给出的系统控制方程是典型的二阶耗散型非线性偏微分发展方程。对此类方程的求解可采用传统 Galerkin 方法(TGM),然而模态数的选取对于 TGM 至关重要,若选取过少,则不能获得精确解,反之则将耗费大量的计算空间和时间。

在某种程度上,惯性流形(IM)为无穷维动力系统由有限维动力系统逼近提供了准则,其在保证计算精度的同时降低了对计算空间和时间的要求。就常见的一阶耗散型动力系统,如流体动力系统,以及二阶耗散型动力系统,如固体动力系统而言,惯性流形的存在是已被证明了的。基于惯性流形思想所构造的各种算法也不断涌现出来,用以缩减系统自由度,从而在数值计算时减少数值迭代次数,减小计算误差^[4]。事实上,惯性流形、近似惯性流形(AIM)和时滞惯性流形(IMD)的概念反映了非线性发展方程的高阶模态与低阶模态间存在的相互作用规律^[5-6]。IMD 反映出高阶分量的当前值不但依赖于当前低阶分量的值,而且还依赖于高阶分量在某个时间间隔之前的值^[7-8]。较之 AIM,IMD 更加符合实际情况,其存在条件不仅大为宽松,且具有良好的收敛性和稳定性^[9]。

本文采用基于 IMD 思想的非线性 Galerkin 方法,将原无穷维动力系统用有限维动力系统进行逼近,并由此构造出含有时滞的高、低阶模态的相互关系,使得在数值模拟过程中无需通过复杂数值积分即可直接获取高阶位移分量,从而缩减了系统的自由度,简化了计算。对系统的 4 种典型稳态响应(平面稳定、屈曲失稳、极限环振动和非简谐周期振动)进行了数值模拟,对系统的平面稳定区域边界进行了求取,通过全面比较 IMD 和 TGM 表明,IMD 可达到 TGM 的计算精度,并使计算时间缩减了 7%~11%,说明 IMD 具有高效、省时的优势,适用于同类问题的求解。

1 力学模型

三维壁板颤振模型如图 1 所示,其中:平板长度

为 a ;宽度为 b ;厚度为 h ;密度为 ρ ;弹性模量为 E ;泊松比为 ν ;边界上初始拉伸内力 $N_x^{(0)}$ 和 $N_y^{(0)}$ 均匀分布;上、下表面初始压力差为 Δp_0 ;上表面沿 x 方向的来流速度为 U_∞ ,马赫数 $M_\infty > 1$,空气密度为 ρ_∞ ;平板四边均为简支边界条件。

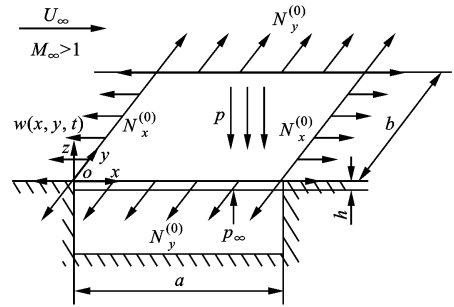


图1 壁板气动弹性模型

若平板采用 Von Karman 大变形假设,则系统的控制方程^[10]为

$$D \nabla^4 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (p - p_\infty) + \Delta p_0 - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

式中:算子 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $D = Eh^3 / (12 \times (1 - \nu^2))$ 为平板的弯曲刚度; Φ 为应力函数。当 $2^{1/2} < M_\infty < 5$ 时,气动载荷可用一阶活塞理论^[11-12]描述,即

$$p - p_\infty = \frac{2q}{M_\infty} \left(\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3)$$

式中: q 为动压, $q = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$ 。平板四边简支的边界条件为

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= 0; \quad w|_{x=a} = 0; \quad w|_{y=0} = 0; \\ w|_{y=b} &= 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0 \end{aligned}$$

2 TGM 求解方程

构造满足四边简支边界条件的双三角级数形式平板位移

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

事实上, $\left\{ \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; m, n=1, 2, 3, \dots, \infty \right\}$ 正是系统控制方程中算子 ∇^4 的特征函数集, 是解空间的完备基函数, 故控制方程的解可向该函数空间投影。

将式(4)代入式(2), 利用积化和差公式整理右端项, 展开后得

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi^4 m l A_{nm} A_{kl}}{4a^2 b^2} \cdot \left\{ (nk - ml) \cos \frac{(m+k)\pi x}{a} \cos \frac{(n+l)\pi y}{b} + (nk + ml) \cos \frac{(m+k)\pi x}{a} \cos \frac{(n-l)\pi y}{b} + (nk + ml) \cos \frac{(m-k)\pi x}{a} \cos \frac{(n+l)\pi y}{b} + (nk - ml) \cos \frac{(m-k)\pi x}{a} \cos \frac{(n-l)\pi y}{b} \right\} \quad (5)$$

其中 Φ 由特解 Φ_p 和通解 Φ_h 构成, $\Phi = \Phi_p + \Phi_h$. 特解可由下式构造

$$\Phi_p = \frac{Eh}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} m l A_{nm} A_{kl} \cdot \left\{ \frac{nk - ml}{[(m+k)^2 + (a/b)^2(n+l)^2]^2} \cdot \cos \frac{(m+k)\pi x}{a} \cos \frac{(n+l)\pi y}{b} + \frac{nk + ml}{[(m+k)^2 + (a/b)^2(n-l)^2]^2} \cdot \cos \frac{(m+k)\pi x}{a} \cos \frac{(n-l)\pi y}{b} + \frac{nk + ml}{[(m-k)^2 + (a/b)^2(n+l)^2]^2} \cdot \cos \frac{(m-k)\pi x}{a} \cos \frac{(n+l)\pi y}{b} + \frac{nk - ml}{[(m-k)^2 + (a/b)^2(n-l)^2]^2} \cdot \cos \frac{(m-k)\pi x}{a} \cos \frac{(n-l)\pi y}{b} \right\} \quad (6)$$

需要特别注意的是, 当 $m=k$ 且 $n=l$ 时, 式(6)中的最后一项分母和分子同时为 0, 此时该项对于特解 Φ_p 没有贡献, 应为 0, 而通解 Φ_h 即为下述方程的解

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi_h = 0 \quad (7)$$

可假设

$$\Phi_h = \frac{1}{2} (\bar{N}_x y^2 + \bar{N}_y x^2 - 2\bar{N}_{xy} xy) \quad (8)$$

从数学意义上讲, $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$ 和 $\bar{N}_{xy}$ 是由 Φ 的边界条件确定的积分常数; 从物理意义上讲, 它们是与通解 Φ_h 相关的各个应力函数在边界上的应力合力。

从平均意义上讲, Φ_h 的边界条件是在边界上中面无延伸, 即

$$\int_0^b \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0; \quad \int_0^b \int_0^a \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0 \quad (9)$$

对于中面剪切力 N_{xy}^{av} 不存在 $N_{xy}^{av} = 0$ 的限制. 应变与应力函数 Φ 、位移 w 的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

根据应力函数 Φ 的定义, 则

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

综合式(9)~(12)得出

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \frac{Eh\pi^2}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{nm}^2 + \frac{\nu}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_{nm}^2 \right) \\ \bar{N}_y &= \frac{Eh\pi^2}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_{nm}^2 + \frac{\nu}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{nm}^2 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

显然, $\bar{N}_{xy} = 0$ 时便可求出通解 Φ_h , 同时得到了 Φ 的表达式

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_h \quad (14)$$

引入如下无量纲参数

$$x^* = x/a; \quad y^* = y/b; \quad \tau = t \left(\frac{D}{\rho h a^4} \right)^{1/2};$$

$$W_{ij} = \frac{A_{ij}}{h}; \quad \lambda = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2 a^3}{M_{\infty} D};$$

$$R_x = \frac{N_x^{(0)} a^2}{D}; \quad R_y = \frac{N_y^{(0)} a^2}{D};$$

$$\eta = \frac{a}{b}; \quad \mu = \frac{\rho_{\infty} a}{\rho h}; \quad \Delta p = \frac{\Delta p_0 a^4}{Dh}$$

根据 Galerkin 方法, 将式(14)和式(4)代入式(1)中, 对方程两端同时乘以试探函数(与基函数相同)

$$\delta w_{ij} = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad i=1, 2, 3, \dots, j=1, 2, 3, \dots,$$

然后对方程两端在区间 $[0, a] \times [0, b]$ 上进行积分和无量纲化处理, 整理后得到系统离散化的无量纲常微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{ij}}{d\tau^2} &= -\pi^4 [i^2 + (\eta j)^2]^2 W_{ij} - \\ &\quad \pi^2 (i^2 R_x + \eta^2 j^2 R_y) W_{ij} + \\ &\quad \frac{4[(-1)^i - 1][(-1)^j - 1]}{ij\pi^2} \Delta p - \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\lambda\mu}{M_\infty}\right)^{1/2} \frac{dW_{ij}}{d\tau} - 2\lambda \sum_{m=1, m \neq i}^{\infty} \frac{mi[(-1)^{m+i}-1]}{m^2-i^2} W_{mj} +$$

$$f_{FH^*} + f_{FPI^*} + f_{FP2^*}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

式中

$$f_{FH^*} = -\frac{3}{2}\pi^4 \eta^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m^2/\eta^2 +$$

$$\nu n^2)i^2 + (n^2\eta^2 + \nu m^2)j^2] W_{mi}^2 W_{nj}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

$$f_{FPI^*} = \frac{3}{4}(1-\nu^2)\pi^4 \eta^4 \cdot$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} ml W_{mi} W_{kl} W_{rs} \cdot$$

$$[(nk - ml)G_1(\eta, m+k, n+l, r, s, i, j) +$$

$$(nk + ml)G_1(\eta, m+k, n-l, r, s, i, j) +$$

$$(nk + ml)G_1(\eta, m-k, n+l, r, s, i, j) +$$

$$(nk - ml)G_1(\eta, m-k, n-l, r, s, i, j)]$$

$$i = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

$$f_{FP2^*} = -\frac{3}{2}(1-\nu^2)\pi^4 \eta^4 \cdot$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} ml W_{mi} W_{kl} W_{rs} \cdot$$

$$[(nk - ml)G_2(\eta, m+k, n+l, r, s, i, j) +$$

$$(nk + ml)G_2(\eta, m+k, n-l, r, s, i, j) +$$

$$(nk + ml)G_2(\eta, m-k, n+l, r, s, i, j) +$$

$$(nk - ml)G_2(\eta, m-k, n-l, r, s, i, j)]$$

$$i = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$G_1(\eta, x, y, r, s, i, j) =$$

$$\frac{r^2 y^2 + s^2 x^2}{[x^2 + \eta^2 y^2]^2} G(x, r, i) G(y, s, j) \quad (19)$$

$$G_2(\eta, x, y, r, s, i, j) =$$

$$\frac{xyrs}{[x^2 + \eta^2 y^2]^2} G(r, x, i) G(s, y, j) \quad (20)$$

$$G(x, y, z) = -g(x+y+z) - g(-x+y+z) +$$

$$g(x-y+z) + g(x+y-z) \quad (21)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (22)$$

注意:在计算 G_1 和 G_2 时,若 $x=y=0$,则分子、分母同为0,此时 G_1, G_2 应取0.

在进行动力学分析时,令 $V_{ij} = \frac{dW_{ij}}{d\tau}$,将方程(15)转化为一阶常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_{ij}}{d\tau} &= V_{ij} \\ \frac{dV_{ij}}{d\tau} &= -\pi^4 [i^2 + (\eta j)^2]^2 W_{ij} - \\ &\pi^2 (i^2 R_x + \eta^2 j^2 R_y) W_{ij} + \\ &\frac{4[(-1)^i - 1][(-1)^j - 1]}{ij\pi^2} \Delta p - \left(\frac{\lambda\mu}{M_\infty}\right)^{1/2} V_{ij} - \\ &2\lambda \sum_{m=1, m \neq i}^{\infty} \frac{mi[(-1)^{m+i}-1]}{m^2-i^2} W_{mj} + \\ &f_{FH^*} + f_{FPI^*} + f_{FP2^*} \\ &i = 1, 2, 3, \dots; \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

这样,给定初始值,即可运用各类数值积分方法进行求解.

3 基于 IMD 的非线性 Galerkin 方法求解方程

根据 IMD 思想,非线性耗散动力系统高、低阶模态存在着强烈耦合关系,且该关系并非简单的瞬态行为,而是与模态发展历史相关,就此可构造出含有时滞的高、低阶模态的相互耦合关系,从而降低系统维数,节省计算时间^[9]. 截取方程(15)的前 $2 \times M \times N$ 阶模态,设定前 $M \times N$ 阶模态为低阶模态,后 $M \times N$ 阶模态为高阶模态,时间步长为 $\Delta\tau$, W_{ij}^k 对应 k 时刻 i, j 阶模态的值,则 k 时刻前 $M \times N$ 阶低阶模态的方程为

$$\frac{d^2 W_{ij}^k}{d\tau^2} = -\pi^4 [i^2 + (\eta j)^2]^2 W_{ij}^k -$$

$$\pi^2 (i^2 R_x + \eta^2 j^2 R_y) W_{ij}^k +$$

$$\frac{4[(-1)^i - 1][(-1)^j - 1]}{ij\pi^2} \Delta p - \left(\frac{\lambda\mu}{M_\infty}\right)^{1/2} \frac{dW_{ij}^k}{d\tau} -$$

$$2\lambda \sum_{m=1, m \neq i}^{2M} \frac{mi[(-1)^{m+i}-1]}{m^2-i^2} W_{mj}^k +$$

$$f_{FH^*} + f_{FPI^*} + f_{FP2^*}$$

$$i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

对于 k 时刻后 $M \times N$ 阶高阶模态,结合 IMD 思想,对 $dW_{ij}^k/d\tau$ 采用欧拉法差分格式,对 $d^2 W_{ij}^k/d\tau^2$ 采用中点差分格式,则有

$$\frac{dW_{ij}^k}{d\tau} = \frac{W_{ij}^{k+1} - W_{ij}^k}{\Delta\tau}; \quad \frac{d^2 W_{ij}^k}{d\tau^2} = \frac{W_{ij}^{k+1} - 2W_{ij}^k + W_{ij}^{k-1}}{\Delta\tau^2}$$

$$i = M+1, M+2, \dots, 2M; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (25)$$

由此得到 k 时刻之后的 $M \times N$ 阶高阶模态的代数表达式

$$\begin{aligned} & \frac{W_{ij}^{k+1} - 2W_{ij}^k + W_{ij}^{k-1}}{\Delta\tau^2} = \\ & -\pi^4 [i^2 + (\eta j)^2]^2 W_{ij}^k - \pi^2 (i^2 R_x + \eta^2 j^2 R_y) W_{ij}^k + \\ & \frac{4[(-1)^i - 1][(-1)^j - 1]}{ij\pi^2} \Delta p - \\ & \left(\frac{\lambda\mu}{M_\infty} \right)^{1/2} \frac{W_{ij}^{k+1} - W_{ij}^k}{\Delta\tau} - \\ & 2\lambda \sum_{m=1, m \neq i}^{2M} \frac{mi[(-1)^{m+i} - 1]}{m^2 - i^2} W_{mj}^k + \\ & f_{FH^*} + f_{FPI^*} + f_{FP2^*} \\ & i = M+1, M+2, \dots, 2M; \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)中的 f_{FH^*} 、 f_{FPI^*} 、 f_{FP2^*} 项的指标 m, k, r 为 $1, 2, \dots, 2M, n, l, s$ 为 $1, 2, \dots, N$, W_{nm} 、 W_{kl} 和 W_{rs} 均为 k 时刻的值. 这样, 下一时刻的高阶 W_{ij}^{k+1} 可直接通过式(26)由当前时刻的低阶 W_{ij}^k 、高阶 W_{ij}^k 和引入的时间滞后的上一时刻高阶 W_{ij}^{k-1} 来获得. 然而, 在 TGM 中, 高阶 W_{ij}^{k+1} 是通过 $dW_{ij}^k/d\tau = V_{ij}^k$ 的数值积分获取的, 即需要当前时刻的高阶 V_{ij}^k , 还要通过上一时层 $dV_{ij}^{k-1}/d\tau$ 的数值积分来获取, 其求解过程相当繁琐. 因此, IMD 方法避免采用数值积分来求解高阶 W_{ij}^{k+1} , 也无需求解高阶 V_{ij}^k , 进而大幅缩减了计算量, 节省了计算时间. TGM 和 IMD 的高阶 W_{ij}^{k+1} 求解流程如图 2 所示. 由于时间滞后的引入, 在 IMD 计算开始时需要初始化 2 个时间层的值, 第 2 时间层的初始值可由第 1 时间层初始值的数值积分求得.

4 IMD 与 TGM 的对比

数值模拟前需确定计算所需的模态数. 为获得精确解, 来流沿 x 方向至少需要 4~6 阶模态, 沿 y 方向仅需 1 阶模态. 这是因为: 从物理角度来说, 来流问题是以 x 方向为主导的, y 方向的高阶模态很难激发出来; 从数学角度来说, 活塞理论给出的气动压力仅与 $\partial w/\partial x$ 和 $\partial w/\partial t$ 相关, y 方向的高阶模态对气动力的影响很小^[10]. y 方向模态数的取舍验证如图 3 所示. 图 3 显示, x 方向取 4 阶模态, y 方向分别取 1 阶和前 2 阶模态, 不同参数下系统极限环振动幅值差别微乎其微, 所以在以下数值模拟中, x 方向选取 6 阶(3 个低阶、3 个高阶)模态, y 方向取 1 阶模态.

在考察系统稳态响应时, 固定系统参数 $\Delta p_0 =$

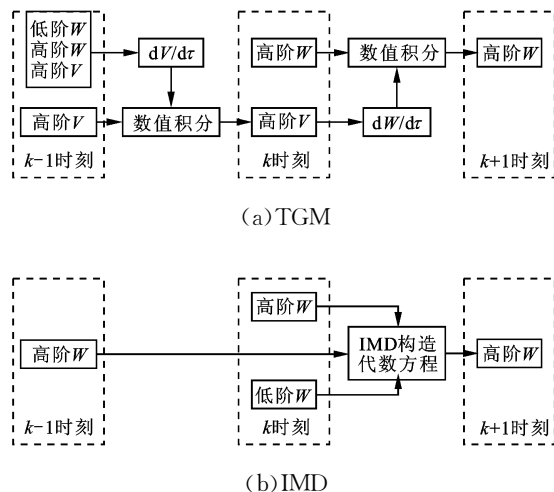


图 2 TGM、IMD 高阶 W_{ij}^{k+1} 求解对比

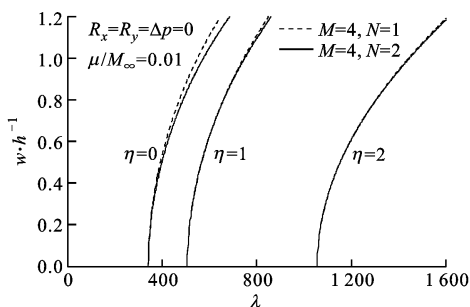


图 3 y 方向模态数对极限环振动幅值的影响

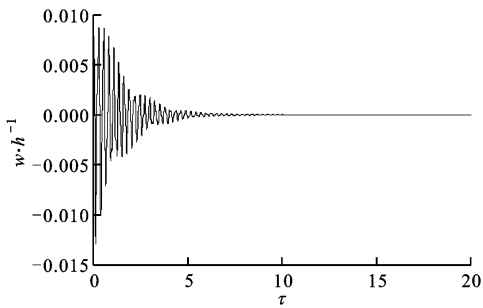
0, $\mu/M_\infty = 0.01$, $\eta = 1$, 初始位移 $W^0 = 0.01 \cdot \sin(\pi x^*) \sin(\pi y^*)$, 初始速度 $V^0 = 0$, 同时取 $x^* = 0.75$ 、 $y^* = 0.5$ 为参考点, 采用 4 阶 Runge-Kutta 数值积分方法进行计算, 计算时间步长 $\Delta\tau = 0.001$, 计算终止时 $\tau = 20$. 在不同 R_x 、 R_y 和 λ 下通过 4 种典型稳态响应来比较 IMD 和 TGM 的计算时间和计算精度, 并对一个具有实际意义且较为复杂、耗时的问题——系统平面稳定区域边界的获取进行计算, 以深入比较 IMD 和 TGM.

4.1 平面稳定

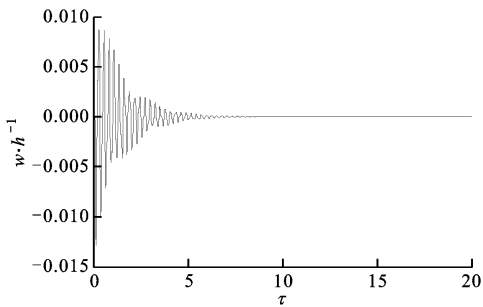
取 $\lambda = 200$, $R_x = R_y = 0$, TGM 与 IMD 的位移时间历程如图 4 所示. 从图 4 看出: 二者几乎一致, 对于初始扰动, 系统经过衰减振动最终收敛到 0 点平衡位置; TGM 耗时 8.879 s, IMD 耗时 7.985 s, IMD 的耗时减少了 10.1%.

4.2 极限环振动

取 $\lambda = 600$, $R_x = R_y = 0$, TGM 和 IMD 的稳态位移时间响应如图 5 所示. 从图 5 看出: 二者的响应幅值和频率相同, 极限环振动相同, 只是达到稳态的时间有所不同; TGM 耗时 8.629 s, IMD 耗时 8.017 s, IMD 耗时减少了 7.09%.

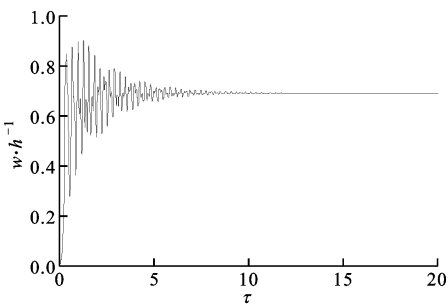


(a)TGM

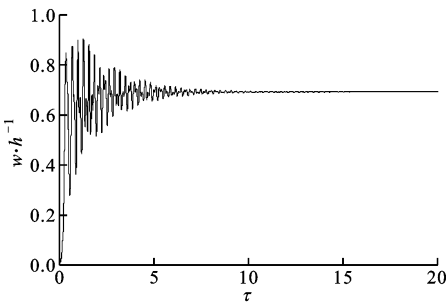


(b)IMD

图 4 平面稳定系统的位移时间历程



(a)TGM



(b)IMD

图 6 屈曲系统的位移时间历程

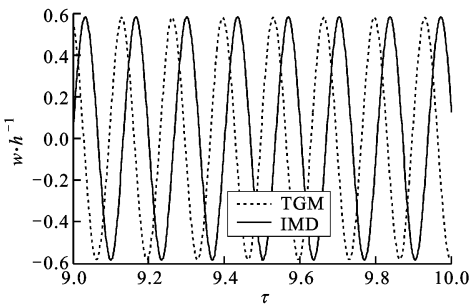
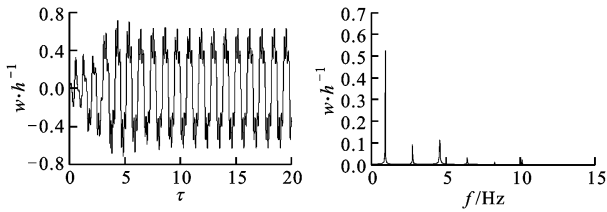
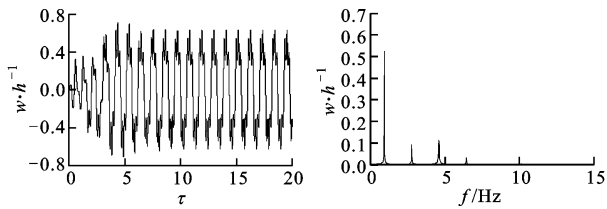


图 5 极限环振动系统的稳态位移时间历程



(a)TGM



(b)IMD

图 7 非简谐周期振动系统的位移时间历程及频谱图

4.3 屈曲失稳

取 $\lambda=100, R_x=R_y=-4\pi^2$, TGM 和 IMD 的位移时间历程如图 6 所示. 从图 6 看出: 二者的表现近乎相似, 系统最终均达到 $W=0.691\ 9$ 的变形位置; TGM 耗时 8.808 s, IMD 耗时 8.039 s, IMD 耗时减少了 8.73%.

4.4 非简谐周期性振动

取 $\lambda=201, R_x=R_y=-4\pi^2$, 系统表现为非简谐的周期振动, TGM 和 IMD 的位移时间历程及频谱如图 7 所示. 从图 7 看出: 二者再次表现出了惊人的相似, 从频谱图上可以清晰地发现, 二者的频率成分以及对应频率下的幅值大小近乎完全一样, 说明 IMD 方法精度很高; TGM 耗时 8.645 s, IMD 耗时 8.010 s, IMD 耗时减少了 7.35%.

4.5 平面稳定区域边界

对实际系统而言, 一般要尽量避免壁板结构发生颤振或屈曲, 使系统工作在平面稳定区域, 因此平面稳定区域的边界求取对于高速飞行器的设计来说意义重大. 系统分析时需进行迭代, 这将耗费大量的计算时间, 故本文引入 IMD 与 TGM 的对比算例. 算例中: $\lambda=1\sim600, \Delta\lambda=1$; 在每一个 λ 下, 引入 $R=-R_x/\pi^2=-R_y/\pi^2$, 初始范围为 $[0, 5]$. 据此考察系统在此范围上下限的稳态响应, 然后逐步缩小此范围, 直到求得系统由平面稳定转变为颤振或屈曲时

的临界参数 R_{cr} 为止(收敛精度设为 1×10^{-5}).

在参数平面上,将不同的 (λ, R_{cr}) 点连接起来,从而获得了系统平面稳定区域的边界.由 IMD 和 TGM 求得的平面稳定区域边界如图 8 所示,从图 8 看出二者结果十分吻合.就计算时间而言,TGM 耗时 684 355.105 s,IMD 耗时 607 521.086 s,IMD 耗时较 TGM 减少了 11.23%,说明 IMD 对实际中的复杂计算是高效的.可以预测,对于多自由度的耗散动力系统利用 IMD,其高效特性将更加显著.

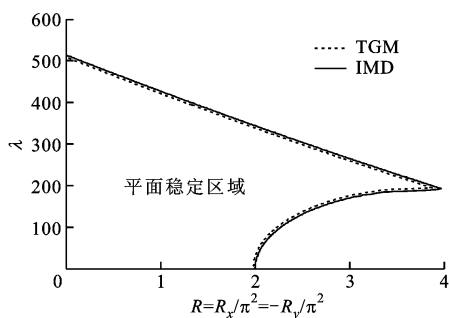


图8 系统平面稳定区域边界的对比

5 结 论

本文将基于 IMD 的非线性 Galerkin 方法应用于三维壁板颤振问题的求解中,构造出了反映系统高、低阶模态相互关系的时滞表达式,使得在数值模拟过程中无需通过复杂数值积分,也无需计算高阶速度分量,直接求解代数方程便可获取高阶位移分量,从而达到缩减计算量和节省计算时间的效果.进一步,通过分析系统 4 种典型稳态响应,即平面稳定、屈曲失稳、极限环振动和非简谐周期振动,以及在一个具有实际意义且较为复杂耗时的系统平面稳定区域边界求取上,验证了 IMD 和 TGM 在计算精度相同的条件下,IMD 能够有效地节省计算时间,说明 IMD 具有高效、省时的特性.

可以预测,IMD 应用于更加复杂的耗散型高维或多自由度动力系统,将同样会起到缩减系统自由度、简化计算和减少计算时间的效果.

参考文献:

- [1] 杨智春,夏巍,孙浩. 高速飞行器壁板颤振的分析模型和分析方法[J]. 应用力学学报, 2006, 23(4): 537-542.
YANG Zhichun, XIA Wei, SUN Hao. Analysis of panel flutter in high speed flight vehicles [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 23(4): 537-542.

- [2] 康伟,张家忠. 翼型局部弹性自激振动的增升减阻效应研究[J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(5): 94-101.
KANG Wei, ZHANG Jiazhong. Numerical analysis of lift enhancement and drag reduction by self-induced vibration of localized elastic airfoil [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(5): 94-101.
- [3] DOWELL E H, TANG D. Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics[J]. AIAA Journal, 2002, 40(9): 1697-1707.
- [4] 张家忠,刘雁,陈党民. 二阶耗散动力系统的降维对解长期行为的误差估计[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(7): 861-866.
ZHANG Jiazhong, LIU Yan, CHEN Dangmin. Error estimate for the influence of model reduction of nonlinear dissipative autonomous dynamical system on the long-term behaviors [J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(7): 861-866.
- [5] FOIAS C, SELL G R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations [J]. Journal of Differential Equations, 1988, 73(2): 309-353.
- [6] FOIAS C, MANLEY O, TEMAM R. On the interaction of small eddies in two-dimensional turbulence flows [J]. Math Modeling and Numerical Analysis, 1988, 22(1): 93-114.
- [7] DEBUSSCHE A, TEMAM R. Inertial manifolds with delay [J]. Appl Math Lett, 1995, 8(2): 21-24.
- [8] 戴正德,郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [9] 张家忠,陈丽莺,梅冠华,等. 基于时滞惯性流形的浅拱动力屈曲研究[J]. 振动与冲击, 2009, 28(6): 100-103.
ZHANG Jiazhong, CHEN Liying, MEI Guanhua, et al. Dynamic buckling analysis of shallow parabolic arch based on the method of inertial manifolds with time delay [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(6): 100-103.
- [10] DOWELL E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate: I [J]. AIAA Journal, 1966, 4(7): 1267-1275.
- [11] ASHLEY H, ZARTARIAN G. Piston theory: a new aerodynamic tool for the aeroelastician [J]. Journal of the Aeronautical Science, 1956, 23(12): 1109-1118.
- [12] ZHANG W W, YE Z Y, ZHANG C A, et al. Supersonic flutter analysis based on a local piston theory [J]. AIAA Journal, 2009, 47(10): 2321-2328.

(编辑 苗凌)