

利用本征正交分解的非线性 Galerkin 降维方法

康伟, 张家忠, 李凯伦

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 提出了一种利用本征正交分解(POD)的非线性 Galerkin 方法,用于复杂流体动力系统的低维建模. 该方法将满足流场边界条件的正交基(POD 模态)张成的完备空间分解为有限维(低阶模态)子空间和无限维(高阶模态)子空间,并采用近似惯性流形逼近高阶模态和低阶模态的作用关系,用低阶分量来表示高阶分量,将无穷维流体动力系统降维成有限维动力系统. 以雷诺数为 200、攻角为 20° 时的 NACA0012 翼型绕流流动问题为例进行了低维建模分析,结果表明:由于考虑了高阶模态的影响,且不改变原系统的拓扑结构,因此该降维方法能够用较少的模态数来获得准确的动力学描述,弥补了传统 POD 降维方法由于忽略高阶模态影响而出现的不足,由此验证了该方法的有效性.

关键词: 本征正交分解;近似惯性流形;动力系统;降维;非线性

中图分类号: O241 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)11-0058-05

Nonlinear Galerkin Method for Dimension Reduction Using Proper Orthogonal Decomposition

KANG Wei, ZHANG Jiazhong, LI Kailun

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Nonlinear Galerkin method using POD modes is presented for low-dimensional modeling of the fluid dynamical system. The method splits the complete space spanned by the POD modes satisfying the boundary condition of the flow field into two subspaces — a finite-dimensional one spanned by low-order modes and its complement spanned by high-order modes. Then the interaction nature between the low-order modes and high-order modes is considered via the introduction of approximate inertial manifold. Furthermore, nonlinear Galerkin method using POD modes is chosen to approximate the nonlinear partial differential equations for fluids and reduce the system from infinite dimension to lower dimension. The flow past NACA0012 airfoil at $Re=200$ and the attack angle of 20° is simulated for low-dimensional modeling analysis to verify the efficiency of the method. The results show that because the effect of high-order modes is taken into account, the present method enables to give an accurate description of the system's dynamic behaviors and preserve the topological structure of the system with fewer modes, compared with conventional POD method.

Keywords: proper orthogonal decomposition; approximate inertial manifold; dynamic system; dimension reduction; nonlinearity

近年来,高维、强非线性的复杂流动物理模型正在成为计算流体力学的研究热点^[1-2]. 在采用有限体积法、有限元法等数值方法对这类系统进行求解时,

得到的离散方程规模大、维数高,这就对计算机的容量和速度提出了极高的要求. 另一方面,数值模拟只能得到系统在给定参数下的稳定解,而对于离散后

的高维动力系统,则不便于在变参数范围内对动力系统的稳定性进行分析以及对非稳定解的确定和跟踪.因此,对高维或者无穷维流体动力系统的降维建模就成为研究中亟待解决的问题.

对于复杂动力系统,常用的降维方法包括惯性流形/近似惯性流形方法、本征正交分解(POD)方法、中心流形方法等^[3],其中 POD 方法被广泛应用于流体动力系统的降维建模^[4-7].这是由于 POD 方法计算量相对较小,且基于高分辨率的数值结果或实验数据具有明确的物理意义.更重要的是,POD 方法与 Galerkin 投影方法相结合,提供了一种有效的降维方法,即将方程的解投影到由 POD 模态张成的完备空间中,得到相应的低维动力系统.然而,传统 POD 方法在进行低维建模时,模态数的选取或高阶模态的取舍会影响计算结果的精度甚至可靠性.这是因为在非线性流体动力系统中,高阶模态与低阶模态之间存在着非线性的耦合关系,由于非线性动力系统对初边值极其敏感,微小的扰动(如高阶模态的不合理截断)在长时间之后也可能会造成动力系统拓扑性质的改变. Ahuja 等人^[5]在对前缘涡物理模型进行低维建模时,发现当 $t > 25$ s 时,12 或 16 个 POD 模态的低维系统得到的长期行为与直接数值模拟得到的结果不符.这说明,传统 POD 降维方法由于高阶模态的截断造成该系统解的拓扑性质质发生改变,因而得出错误的结果. Noack 等^[6]在对圆柱绕流问题进行低维建模分析时,发现采用传统 POD 方法得到的低维动力系统无法准确地描述原系统的瞬时行为以及变雷诺数下的长期行为.针对这一问题, Noack 提出了偏移模态,用于修正由 POD 模态得到的时均解与原流体动力系统的定常解之间的偏差,以获得准确的动力学描述.对于圆柱绕流问题,偏移模态在模态中对应了单独出现的不规则模态^[7],这类模态主要在高阶模态中出现,引入偏移模态就相当于考虑了高阶模态的影响.但是,在计算偏移模态时,需要得到原系统的定常解,特别是要求系统的非稳态定常解,这就增加了计算的难度和时间.

本文基于本征正交分解,提出一种非线性 Galerkin 方法用于复杂流体动力系统的低维建模分析,将构成满足流场边界条件的正交基(POD 模态)张成的完备空间分解为有限维(低阶模态)子空间和无限维(高阶模态)子空间,并采用近似惯性流形逼近高阶模态和低阶模态的耦合作用关系,用低阶分量来表示高阶分量,将无穷维流体动力系统降维成有限维动力系统,考虑了高阶模态的影响,而不改变

原系统的拓扑结构,弥补了传统 POD 降维方法出现的不足.

1 POD 方法

1.1 POD 的基本理论

本征正交分解(POD)方法是由 Lumley 于 1967 年首先引入湍流相干结构研究中的^[8],其实质是从一组时间序列的空间数据中寻找在均方意义上的最优正交基函数空间,所得到的基函数并不是真正意义上的模态,而是与流场特征结构相联系的流场模态(这里称为 POD 模态).由于所得的 POD 模态完全依赖于实验或者高精度数值模拟,并没有引入任何先验假设,因此该模态可以用来比较客观地分析流动现象和构造流动模型.更重要的是,由于所得的模态构成了完备的正交基,且表征了流动中最主要的结构特征,因此将 Navier-Stokes 方程在 POD 模态张成的空间上作 Galerkin 投影,可以将无限维的动力系统变成低维的流动模型,这样避免了对高维动力系统数值分析,能极大地节省计算时间和资源,并可以有效地利用动力学理论对低维模型进行理论分析.

选取 M 个瞬态速度场 $\{v(x, t_k)\}_{k=1}^M$ 构成快照集合,将快照写成平均值与脉动量的和

$$u(x, t_k) = v(x, t_k) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v(x, t_i) \quad (1)$$

利用 $\{v(x, t_k)\}_{k=1}^M$ 构成一组时间序列的空间数据集,寻找一组最优正交基 $\{\phi | i=1, \dots, \infty\}$,建立映射 $\Phi: \mathbf{R}^N \rightarrow S$,使得原系统与投影在正交基上的降维系统的误差

$$Q = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\|u_k - \Phi u_k\|) \quad (2)$$

达到最小.

这一问题等价于寻找合适的正交基函数 $\{\phi_i | i=1, \dots, \infty\}$,满足最大值问题

$$\max_{\phi \in L^2(\Omega)} (\langle |u, \phi|^2 \rangle / \|\phi\|^2) \quad (3)$$

式中: $L^2(\Omega)$ 是定义在空间区域 Ω 上的 L^2 函数空间; $(\cdot, \cdot)$ 表示该函数空间上的内积; $\|\phi\| = (\phi, \phi)^{1/2}$; $\langle \cdot \rangle$ 表示算术平均运算.

利用变分法,该最大值问题可转化为特征值问题

$$\int_{\Omega} C(x, y) \phi(y) dy = \lambda \phi(x) \quad (4)$$

式中: $C(x, y) = \langle u(x, t) \otimes u(y, t) \rangle$ 为 u 的自相关函数,也称为 POD 的核; $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$. 求解此特征值

问题可以得到相应的特征向量,即为 POD 模态. 由于实际应用中快照都是在离散空间点上的实验数据或数值模拟结果,这时的自相关函数可以表示为

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i) \mathbf{u}^T(\mathbf{y}, t_i) \quad (5)$$

对于计算流体力学问题,快照包含的空间点数 N 远大于所选取的快照数 M . 如果直接求解特征值问题(式(4)),则待求解的矩阵阶数为 $N \times N$,将使求解过程变得困难,且造成较大的误差. 为了解决这一问题,本文采用 Sirovich 提出的快照法,使得在流体动力系统中更高效快捷地提取 POD 模态集成为可能. 该方法的主要思想是利用原函数空间元素与特征值问题(式(4))中的特征模态处在同一线性空间中,从而可以利用原有函数空间快照的线性组合来表示特征模态,即

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{k=1}^M A_{ik}^* \mathbf{u}_k \quad (6)$$

将式(6)代入式(4)中,得到

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} \quad (7)$$

式中: A_i 为对应特征值 λ_i 的特征函数; $R_{ij} = \frac{1}{M} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ ($i, j=1, 2, \dots, M$). 这样,所需求解的特征值问题只有 M 阶,远小于空间点 N 的量级.

1.2 Galerkin 投影

基于得到的 POD 模态,采用 Galerkin 方法可以得到流体动力系统的低维模型. 速度表示为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n a_k(t) \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ 为流场平均值, $\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})$ 为第 k 个 POD 模态, $a_k(t)$ 为傅里叶系数. 将不可压 Navier-Stokes 方程投影在由 POD 模态 $\{\boldsymbol{\varphi}_i | i=1, \dots, \infty\}$ 张成的空间中,可以得到

$$\frac{da_i}{dt} = f_i(a_j, Re, \dots) = \frac{1}{Re} \sum_{j=0}^n l_{ij} a_j + \sum_{j,k=0}^n q_{ijk} a_j a_k, \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

式中: $l_{ij} = (\boldsymbol{\varphi}_i, \Delta \boldsymbol{\varphi}_j)_\Omega$; $q_{ijk} = (\boldsymbol{\varphi}_i, \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_k))_\Omega$; $(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_j)_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_j d\Omega$; $a_0 \equiv 1$.

2 非线性 Galerkin 方法

近似惯性流形理论认为,系统的高、低阶分量间存在某种近似作用规律,这种作用规律可以用来确定近似惯性流形,逼近高阶分量与低阶分量的耦合关系,把高维(或无穷维)动力系统降维成有限维动力系统,而不改变原系统的拓扑性质^[9-10].

为了构造这种作用规律,定义 P_k 为动力系统的解空间 $v \in V$ 的正交投影算子,将 v 投影到 POD 模态的前 k 阶分量构成的子空间中,记 $p = P_k v$. 令 $q = (I - P_k)v = Qv$, 则 $v = p + q$. 将投影算子 P_k, Q 应用于方程(8)中,得到

$$\frac{dp}{dt} = f(p + q) \quad (9)$$

$$\frac{dq}{dt} = g(p + q) \quad (10)$$

由于流体黏性的作用,高阶模态将被衰减掉,因此,近似惯性流形可以从下面的关系式中得到

$$F(q) = g(p + q) = 0 \quad (11)$$

即 $q = G(p)$. 将 $Q = G(p)$ 代入方程(9)中,即可得到系统的解.

对于方程(11)的求解,由于对流项与扩散项在数量级上的差异,使得 $F(q)$ 的 Jacobian 矩阵严重病态,故需要采用修正的牛顿迭代法^[11]进行求解.

由于 POD 模态张成了满足流场边界条件的完备正交基空间, P_k 是 POD 模态的前 k 阶分量构成的子空间, Q 是高阶模态构成的无穷维空间上的投影算子,取后 M 个 POD 模态对其进行截取,则在本文中 POD 模态张成的空间里,解的形式可以表示为

$$a(t) = p(t) + G(p) \quad (12)$$

3 算例与分析

对 $Re=200$ 、攻角为 20° 时的 NACA0012 翼型绕流问题,采用 CBS 算法^[12]进行数值模拟. 图 1 所示为计算区域网格和翼面附近的局部网格. 归一化时间步长取为 0.000 5,计算到 250 000 步时,每隔 100 步输出流场. 由图 2 可见,升阻力系数随时间周期性地变化,说明流场发生了周期性演化. 由于翼型后缘附近的流场能够反映流场涡脱落的演化过程,故选取翼型后缘附近一点 $A(0.959\ 2, -0.255\ 3)$ 的速度时间历程作为流动系统动力学描述的参照,用于比较分别采用传统 POD 方法(TP 方法)与基于 POD 的非线性 Galerkin 方法(AP 方法)得到的低维模型对系统长期行为描述的差异.

选取一个周期内的 55 个流场快照构成流场的数据集合,采用快照法提取 POD 模态,其对应的模态特征值分布如图 3 所示. 从图中可以看出,前 12 阶得到的特征值成对分布,低阶特征值占的能量比例较大,第一阶 POD 模态占系统总能量的 49.4%. 图 4 给出了前 4 阶 POD 模态在流动方向上的速度等值线图. 从图 3 和图 4 可以看出,成对出现的

POD 模态的流场拓扑结构比较接近,但对比图 4a 与 4b、4c 与 4d 可以发现,模态之间存在着相位差.

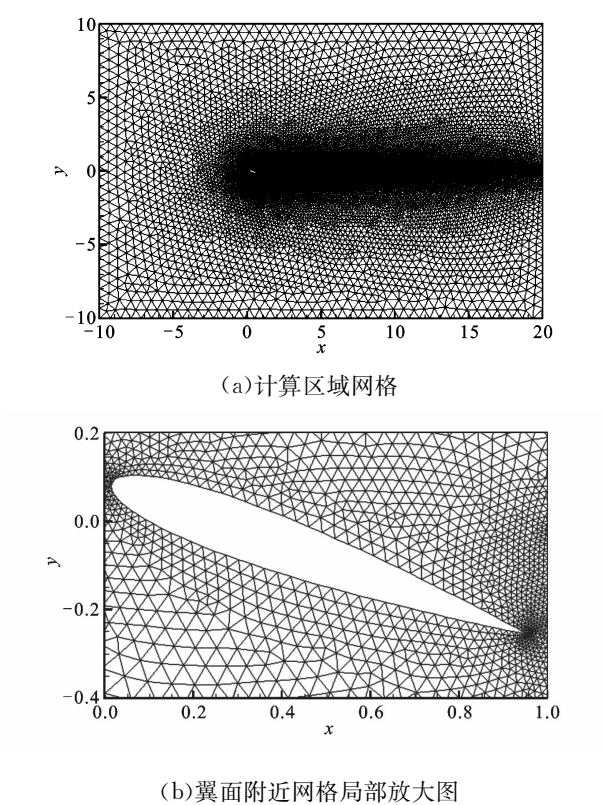


图 1 计算网格与翼面附近网格局部放大图

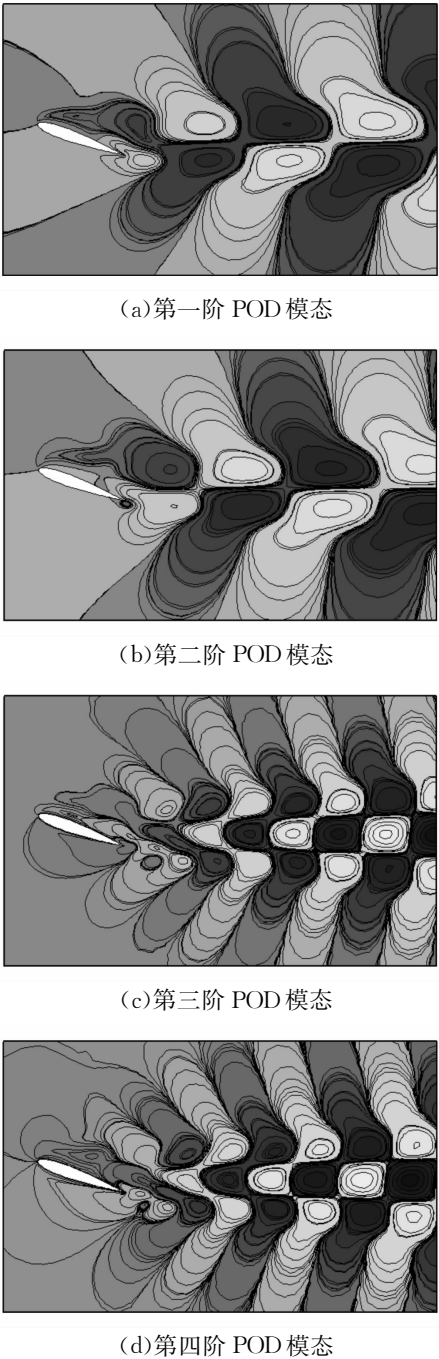
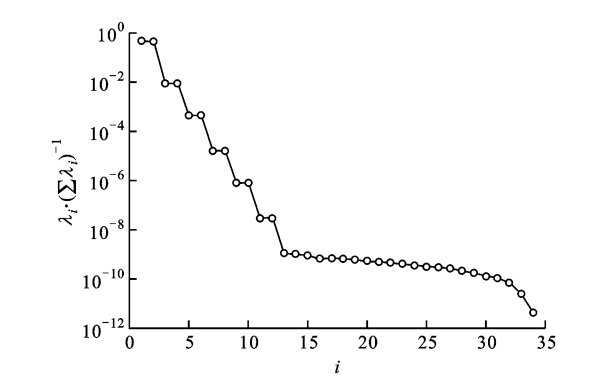
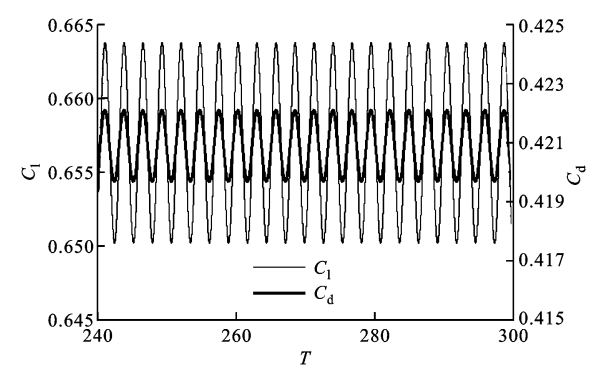


图 4 POD 模态在流动方向的速度等值线
(亮部为正,暗部为负)

3.1 3 阶模态低维系统的动力行为比较

前 3 阶 POD 模态占系统能量的 98.95%,故选取这 3 阶 POD 模态构成模态空间,进行 Galerkin 投影得到低维动力系统.对于 AP 方法,与低阶模态耦合的高阶模态取为 3 阶.表 1 列出了 TP 和 AP 2 种方法得到的周期运动频率和振幅与数值模拟结果的比较,从表中可以看出,这 2 种方法得到的频率结果相同,且与数值模拟结果比较接近,但所得的振幅差异明显.由于模态数较少且忽略了高阶模态的作

用,TP方法得到的振幅较数值模拟的结果相差了一个数量级,而AP方法的结果虽然由于选取的模态数较少,所得系统的振幅与数值模拟结果有所差异,但保持在同一数量级上.从图5的时间历程中可以看出:在短时间内($T < 200$),2种方法对动力系统的描述吻合良好;当 $T > 200$ 时,2种方法对动力系统的描述发生了变化——TP方法得到的速度振动幅度继续递增,而AP方法得到的速度振动幅度趋于稳定.

根据非线性动力学理论^[10],低维系统平衡点的导算子可以用来判定低维系统平衡点的稳定性.TP方法对应系统导算子的特征根为 $((0.090\ 68 \pm 0.169\ 49)i, -0.182\ 40)$.出现一对共轭复根,说明系统的定常解失稳,变为周期运动,但是从图5中可以看到, $T=500$ 时速度振动幅度仍未达到稳定.通过计算发现,约在 $T > 1\ 000$ 时,TP方法得到的低维系统才进入周期运动,而对于AP方法,约在 $T > 400$ 时系统已变为周期运动.这说明,在保证系统的拓扑性质不变的前提下,AP方法得到的系统由于考虑了高阶模态的耦合作用,因此加快了计算收敛速度,缩小了简化的低维系统与原系统长期行为之间的差距.

表1 3阶模态动力系统周期运动的频率和振幅比较

计算方法	频率	振幅
数值模拟	0.364 5	0.001 48
TP方法	0.370 0	0.033 04
AP方法	0.370 0	0.005 08

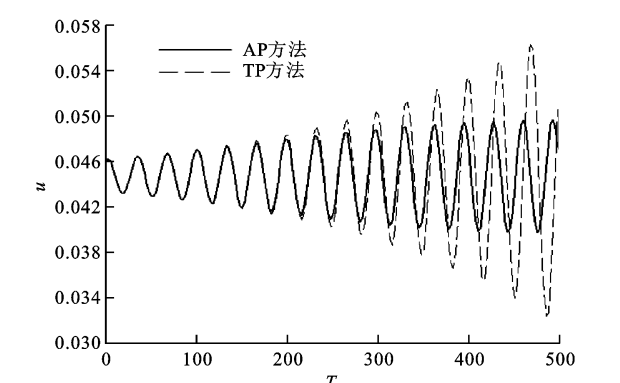


图5 低维系统的长期行为比较

3.2 20阶模态低维系统的动力行为比较

采用TP方法,选取20阶POD模态构成模态空间,进行Galerkin投影建立低维动力系统.这时,系统的运动为周期运动,且与数值模拟得到的结果接近.对于AP方法,分别选取6阶、10阶POD模态进行低维建模,其中与低阶模态耦合的高阶模态数分别为6阶、4阶.从表2可以看出,3种情况得到

的频率和振幅都与数值模拟结果比较接近.对比A点流向速度的时间历程(见图6)可以看出,AP方法在6、10阶模态时描述的系统行为与TP方法描述的20阶模态低维系统行为十分吻合,在2-范数意义下的误差分别为 2.345×10^{-3} 和 2.569×10^{-6} .这说明,相对于传统的POD方法,采用非线性Galerkin方法可以选取更少的模态对系统的动力学行为进行描述.由于在计算对流项时计算量为 $O(n^3)$ (其中 n 为模态数),所以更少的模态数意味着可以大幅节省计算时间.

表2 20阶模态动力系统周期运动的频率和振幅比较

计算方法	频率	振幅
数值模拟	0.364 5	0.001 48
TP方法	0.370 0	0.001 28
AP方法(6阶)	0.370 0	0.001 22
AP方法(10阶)	0.370 0	0.001 28

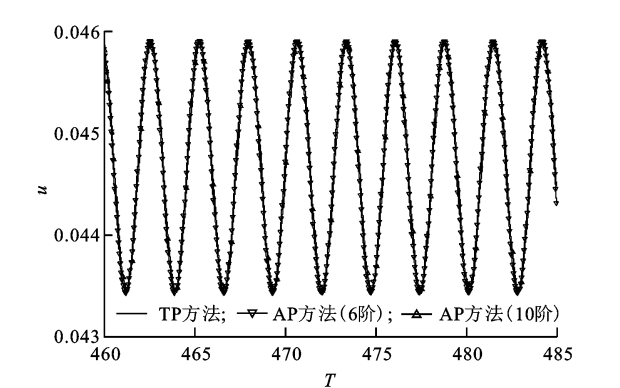


图6 不同模态数下低维系统的长期行为比较

4 结 论

本文提出了一种基于本征正交分解的非线性Galerkin方法,用于低维动力系统的建模:采用近似惯性流形逼近低阶模态和高阶模态的耦合关系,用低阶分量来表示高阶分量,将无穷维流体动力系统降维成有限维动力系统.以 $Re=200$ 、攻角为 20° 时的NACA0012翼型绕流低维系统建模为例,验证了本文所提出的方法的有效性.分析结果表明,由于引入了高阶模态的影响,该方法加快了计算的收敛速度,缩小了得到的低维系统与原系统在长期行为描述上的差异,在保证系统拓扑性质不变的前提下,能够用较少的模态数获得系统长期动力行为的准确描述,节省了计算时间,弥补了传统POD降维方法由于忽略高阶模态可能造成系统拓扑性质改变的不足.

参考文献:

- [1] KAMAKOTI R, SHYY W. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2004, 40(8): 535-558.
- [2] BENDIKSEN O, SEBER G. Fluid-structure interactions with both structural and fluid nonlinearities [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 315(3): 664-684.
- [3] REGA G, TROGER H. Dimension reduction of dynamical systems: methods, models, applications [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41(1): 1-15.
- [4] GERHARD J, PASTOOR M, KING R. Model-based control of vortex shedding using low-dimensional Galerkin models, AIAA paper 2003-4262 [R]. Reston, VA, USA: AIAA, 2003.
- [5] AHUJA S, ROWLEY C, KEVREKIDIS I. Low-dimensional models for control of leading-edge vortices: equilibria and linearized models [C]// *Proceedings of 45th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, USA: AIAA, 2007: 1-12.
- [6] NOACK B, AFANASIEV K, MORZYNSKI M. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 497: 335-363.
- [7] SENGUPTA T K, SINGH N, SUMAN V. Dynamical system approach to instability of flow past a circular cylinder [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, 656: 82-115.
- [8] HOLMES P, LUMLEY J, BERKOOZ G. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998: 86-127.
- [9] 李开泰, 侯延仁. N-S 方程一般近似惯性流形构造和逼近 [J]. *计算数学*, 1999, 21(3): 269-282.
- LI Kaitai, HOU Yanren. Construction and approximation of general approximate inertial manifolds for N-S equations [J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 1999, 21(3): 269-282.
- [10] 张家忠. 非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2010: 88-96.
- [11] 李庆扬. 非线性方程组的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 286.
- [12] 康伟, 张家忠. 翼型局部弹性自激振动的增升减阻效应研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2011, 45(5): 94-101.
- KANG Wei, ZHANG Jiazhong. Numerical analysis of lift enhancement and drag reduction by self-induced vibration of localized elastic airfoil [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2011, 45(5): 94-101.

(编辑 葛赵青)