

Chebyshev 谱元法求解含吸收边界的 二维均匀稳定流场的声传播

耿艳辉, 秦国良

(西安交通大学流体机械研究所, 710049, 西安)

摘要: 从群速度的角度推导了包含均匀稳定来流的二维波动方程的 1 阶吸收边界条件, 基于 Chebyshev 谱元法提出了二维均匀稳定来流波动方程的求解方法. 在空间上采用谱元方法, 在时间上采用隐式 Newmark 积分法, 从而获得了波动方程的离散形式. 经具体算例验证表明: 与 1 阶 Clayton-Engquist-Majda 吸收边界条件相比, 所推导的吸收边界条件能更有效地削弱边界上的数值反射, 避免解的失真, 求解方法在空间上具有谱精度, 在时间上达到了 2 阶精度.

关键词: 吸收边界条件; 声传播; 谱元法; 隐式 Newmark 积分法; 群速度

中图分类号: O42 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)03-0100-07

Chebyshev Spectral Elements Method for 2-Dimensional Acoustic Propagation Problem in a Uniform Mean Flow with Absorbing Boundary Condition

GENG Yanhui, QIN Guoliang

(Institute of Fluid Machinery, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In this study, the Chebyshev spectral elements approximation was applied to solve the acoustic propagation problem in the subsonic uniform mean flow. From the group velocity, the first-order Eliane-Dan-Thomas absorbing boundary condition was derived for the boundaries of the solution domain. In this approach, the discretization of the wave equation is based on the spectral elements in space and the implicit Newmark method in time marching. The numerical results with higher-order spectral accuracy in space and second-order accuracy in time agree well with the benchmark solutions. Compared with the first-order Clayton-Engquist-Majda absorbing boundary condition for the same wave problem, the first-order Eliane-Dan-Thomas absorbing boundary condition proposed here can effectively reduce the numerical reflection on boundaries and avoid solution distortion.

Keywords: absorbing boundary condition; wave propagation; spectral element method; implicit Newmark method; group velocity

气动声学是气体动力学和声学的交叉学科, 是研究空气动力噪声的基础, 该领域的开拓者是 Lighthill^[1]. 计算气动声学(CAA)是在计算流体力学(CFD)基础上发展起来的, 即用数值方法来解

决气动声学的问题. 在实际中, 声场量和流场量的数量级相差甚远, 目前计算气动声学所使用的方法多为低阶精度方法, 如有限元法、有限差分法等, 它们在认识流动导致噪声的机理上有一定的局限性. Pa-

tera^[2]利用谱精度的特点,结合有限元法,提出了谱元法。

在无界或半无界区域上,数值方法的实际计算区域总是有限的,并且需要引入人工边界来限制计算范围,在这些边界上还要加入无反射人工边界条件,以确保所求得解很好地逼近无界区域上的解.对波动方程来说,无反射人工边界条件会使人工边界上的非物理反射尽可能小,对区域内部的影响在允许的误差范围内,所以称之为吸收边界条件(ABC).

Clayton-Engquist-Majda (CEM) 吸收边界条件^[3-5]的使用最为普遍,它是由无来流的波动方程推导获得的. Renaut 等^[6]将其引入到伪谱法中,邵秀民等^[7]将其引入到波动方程的差分格式中,许靖^[8]将1阶CEM吸收边界条件引入到谱元法中,以计算静止介质中的波动方程.在有来流的情况下,CEM吸收边界条件不能很好地吸收人工反射,因此有必要研究来流下波动方程的吸收边界条件.

Eliane 等^[9]从群速度和相速度入手,推导了各向异性-对流介质的波动方程所对应的下游边界的高阶吸收边界条件(简称EDT吸收边界条件),并给出了精度和适定性分析.群速度(波列)作为整体的传播速度,其携带了波的能量,揭示了波内能量转移的大小和方向;相速度是指波的相位在空间中传递的速度.群速度影响耗散,相速度影响色散.本文的吸收算子只依赖于群速度,有别于传统的依赖于相速度的算子.本文在推导二维均匀稳定流场中的矩形区域边界上的吸收边界条件时利用了文献[9]的思想.

1 数学模型

平面矩形区域 $\Omega = \{(x, y) : \Gamma_4 \leq x \leq \Gamma_2, \Gamma_1 \leq y \leq \Gamma_3\}$, $\partial\Omega$ 为区域边界, $\mathbf{n}$ 为边界外法线方向,时域为 $(0, T)$. 各项同性且在 x 方向有均匀稳定来流的二维波动方程^[10]为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2c_0 Ma \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} - c_0^2 \left((1 - Ma^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

式中: c_0 为声速; p 为广义声压; t 为时间; x, y 为平面点坐标; f 为源项; $Ma = \frac{U}{c_0}$ 为马赫数; U 为均匀稳定来流速度. 式(1)的初始条件为

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, y, 0) = p_1(x, y) \in \Omega \quad (3)$$

计算区域如图1所示. 边界 $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$, 在边界上引入了1阶吸收边界条件.

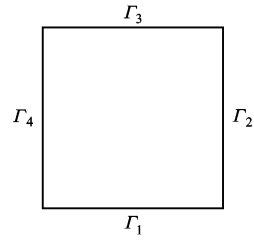


图1 计算区域

2 1阶EDT吸收边界条件

对于任意波动方程

$$\left(\alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - 2\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right) p = 0 \quad (4)$$

若入射角为0, 推导精度取 $O(K_2^2)$, 文献[9]中 Γ_2 对应的1阶吸收边界条件为

$$B_0 u = \left[(\alpha_{11} + \beta_1^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} - \left(\beta_2 - \frac{\alpha_{12}\beta_1}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} (\alpha_{11} + \beta_1^2)^{1/2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(1 + \frac{\beta_1^2}{\alpha_{11}} - \frac{\beta_1}{\alpha_{11}} (\alpha_{11} + \beta_1^2)^{1/2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] p = 0 \quad (5)$$

对应于式(1), 则

$$\alpha_{11} = c_0^2 (1 - Ma^2); \quad \alpha_{22} = c_0^2 \\ \beta_1 = c_0 Ma; \quad \beta_2 = 0; \quad \alpha_{12} = 0 \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 可以得到有均匀稳定来流的 Γ_2 的1阶吸收边界条件

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c_0 (Ma)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (7)$$

文献[9]仅推导了有来流的波动方程在下游边界上的吸收边界条件. 下面, 本文用文献[9]的方法, 推导精度取 $O(K_2^2)$ 后得到有均匀稳定来流的波动方程在上游边界 Γ_4 上的1阶吸收边界条件

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{1}{c_0 (1 - Ma)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (8)$$

式(1)是针对 x 方向均匀稳定来流的, 推导精度取 $O(K_2^2)$ 的吸收边界条件与推导精度取 $O(K_2)$ 的边界条件是一致的, 其中 K_1, K_2 为慢度. 本文取 $O(K_1)$ 推导得到的 Γ_1, Γ_3 的1阶吸收边界条件均为

$$\Gamma_1, \Gamma_3: \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (9)$$

式(7)~式(9)的理论反射系数为0. 本文慢度 K 定义如下

$$K = \frac{1}{V_p} = \frac{k}{\omega} \quad (10)$$

式中: $k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数, λ 为波长. 由此, 则有

$$K = \frac{2\pi}{\lambda\omega} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{u} \quad (11)$$

式中: T 为周期; u 为波速. 可见, K 为波速的倒数. 慢度矢量定义为 $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} = (K_1, K_2)$. 下文中推导的吸收边界条件简称为 1 阶 EDT 吸收边界条件.

3 变分问题及空间谱元离散

式(1)~式(3)和式(7)~式(9)相应的变分问题可以表述为: 寻找 $p \in H^1$, 在 $t=0$ 时满足 $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$, $\frac{\partial p}{\partial t}(x, y, 0) = p_1(x, y) \in \Omega$, 并且对 $\forall v \in H^1$ 时, 下式成立

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} v d\Omega + 2c_0 Ma \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) v d\Omega + \\ & c_0^2 \iint_{\Omega} \left[(1 - Ma^2) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega = \\ & \iint_{\Omega} f v d\Omega + c_0^2 (1 - Ma^2) \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \frac{\partial p}{\partial x} v dy + \\ & c_0^2 \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \frac{\partial p}{\partial y} v dx \end{aligned} \quad (12)$$

将式(6)代入式(5), 可以得到有均匀稳定来流时 Γ_2 的 1 阶吸收边界条件

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c_0(1+Ma)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (13)$$

将式(7)、式(9)代入式(12)得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} v d\Omega + 2c_0 Ma \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) v d\Omega + \\ & c_0^2 \iint_{\Omega} \left[(1 - Ma^2) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega = \\ & \iint_{\Omega} f v d\Omega - c_0^2 (1 - Ma) \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial t} v dy - \\ & c_0^2 (1 + Ma) \int_{\Gamma_4} \frac{\partial p}{\partial t} v dy - c_0 \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \frac{\partial p}{\partial t} v dx \end{aligned} \quad (14)$$

对于上述变分问题, 本文采用 Chebyshev 谱逼近进行离散. 将求解区域 Ω 分解成 N 个互相不重叠的求解单元 Ω_i , 即 $\Omega = \sum_{i=1}^N \Omega_i$, 将第 i 个单元通过坐标变换转换为标准单元 e , 并在 e 内选取 Chebyshev 多项式的极值点作为插值点. 分别以 $\ddot{p}$ 、 $\dot{p}$ 表示 $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ 、

$\frac{\partial p}{\partial t}$, 式(4)通过谱元离散后得到的单元方程为

$$M_e \ddot{p}^i(t) + C_e \dot{p}^i(t) + K_e p^i(t) = S_e \quad (15)$$

式中

$$M_e = B_{jp}^i B_{kq}^i \quad (16)$$

$$K_e = c_0^2 (1 - Ma^2) A_{jp}^i B_{kq}^i + c_0^2 B_{jp}^i A_{kq}^i \quad (17)$$

$$C_e = 2c_0 Ma C_{jp}^i B_{kq}^i + c_0 (1 - Ma) B_{kq}^i \Big|_{\Gamma_2} + c_0 (1 + Ma) B_{kq}^i \Big|_{\Gamma_4} + c_0 B_{jp}^i \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \quad (18)$$

$$S_e = B_{jp}^i B_{kq}^i f_{jk}^i \quad (19)$$

式(15)~式(19)中, A_{jp}^i 、 A_{kq}^i 、 B_{jp}^i 、 B_{kq}^i 、 C_{jp}^i 的表达式可参见文献[10]. 当 $Ma=0$ 时, 式(15)~式(17)与文献[8]中的表达式是一致的, 即在静止介质中, 2 种吸收算子的吸收效果是一样的. 将各单元矩阵合成为总体矩阵, 便可得到一般形式的动力学运动方程

$$M \ddot{p}^i(t) + C \dot{p}^i(t) + K p^i(t) = S \quad (20)$$

式(20)即为关于时间的二阶常微分线性方程.

4 算例

在时域上求解微分方程组有隐式和显式 2 种积分法^[11]. 显式积分法一般是条件稳定, 隐式积分法是绝对稳定. 考虑到算法的稳定性, 本文选择隐式 Newmark 方法, 具体方法参见文献[11].

下面通过算例来验证 1 阶 EDT 吸收边界条件在均匀稳定流场中声传播应用的可靠性. 在各项同性介质中, x 方向有均匀稳定来流的声传播波动方程为^[10]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2c_0 Ma \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} - c_0^2 \left((1 - Ma^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = Q(x, y, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (21)$$

$$Q(x, y, t) = \epsilon e^{-\alpha[(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2]} \sin(\omega t) \quad (22)$$

式中: $Q(x, y, t)$ 为单极子声源项; ϵ 为声源振幅; α 为衰减系数; ω 为角频率; x_s 、 y_s 为声源位置坐标. 在单极子声源中, $\epsilon=0.5$, $\alpha=\frac{\ln 2}{2}$, $\omega=20\pi$ rad/s, x_s 、 $y_s=0$, $c_0=340.29$ m/s, $Ma=0.6$. 为了突出表现吸收边界的吸收效果, 二维平面矩形区域 $\Omega = \{(x, y): -2.5 \text{ m} \leq x \leq 2.5 \text{ m}, -20 \text{ m} \leq y \leq 20 \text{ m}\}$, $\partial\Omega$ 为边界, 时域为 $(0, T)$, 初始条件为

$$p(x, y, 0) = 0 \in \Omega$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \in \Omega$$

并在边界 $\partial\Omega$ 中加入 1 阶 EDT 吸收边界条件(式(7))

~式(9)).

本文在空间上进行谱元离散,在时间上采用隐式 Newmark 积分法. 计算区域将划分为 2×16 个单元,每个单元采用 4 阶 Chebyshev 多项式进行离散,这样计算区域中共有 585 个节点. 基准解的计算区域 $\Omega = \{(x, y) : -20 \text{ m} \leq x \leq 20 \text{ m}, -20 \text{ m} \leq y \leq 20 \text{ m}\}$,将其划分为 16×16 个单元,在每个单元上采用 4 阶 Chebyshev 多项式进行离散,这样整个区域共有 4 225 个节点. 取时间步长 $\Delta t = 0.001 \text{ s}$,则均匀稳定流场中单极子声源辐射的声场在 1 阶 CEM 吸收边界条件和 1 阶 EDT 吸收边界条件下的辐射云图如图 2 所示.

从图 2 可以看出,与 1 阶 CEM 吸收边界条件 (CEM 条件)相比,1 阶 EDT 吸收边界条件(EDT

条件)能更好地削弱边界上的数值反射. 当 $t = 0.005 \text{ s}$ 时,声波已传播至边界 Γ_2 ,通过与基准解对比可见,采用 CEM 条件的声波已经出现人工反射,表现为靠近 Γ_2 处声波出现收缩,而采用 EDT 条件的声波在边界 Γ_2 附近与基准解吻合良好. 当 $t = 0.01 \text{ s}$ 时,采用 CEM 条件的声波在 Γ_2 附近收缩更加明显,不再圆润,而采用 EDT 条件的声波,其外观特征表现良好. 当 $t = 0.02 \text{ s}$ 时,声波传播至边界 Γ_4 ,采用 CEM 条件的声波在靠近 Γ_4 处出现轻微收缩,而在 Γ_2 附近收缩更严重. 当 $t = 0.03 \text{ s} \sim 0.04 \text{ s}$ 时,采用 CEM 条件的声波在 Γ_2 和 Γ_4 附近失真更加明显,而采用 EDT 条件的声波在边界 Γ_2 附近开始出现微小失真. 当 $t = 0.05 \text{ s}$ 时,2 种边界条件的声波均出现失真,这可能是隐式 Newmark 积分法

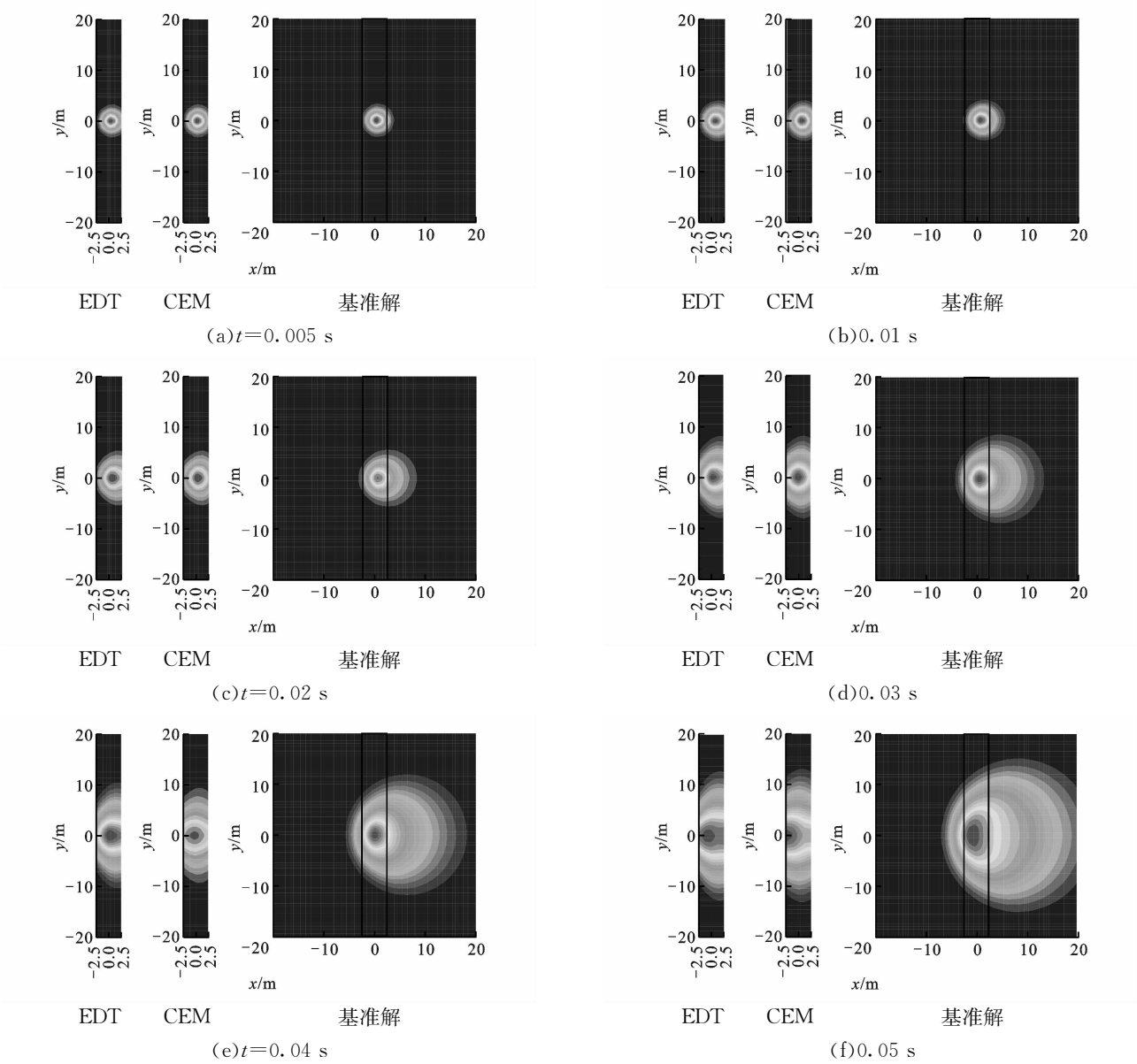


图 2 $Ma=0.6$ 时的声辐射云图对比

产生的耗散和色散随着时间的推移而增大造成的。总体来说,图2从直观上证明了EDT条件可应用于均匀稳定流场中的无界声传播计算,在吸收边界附近或穿越吸收边界时的声波,几乎没有出现数值反射的现象,也未影响计算区域内的传播,说明采用EDT条件基本上消除了数值反射带来的解的失真。

沿 x 、 y 方向的声压型线分别如图3和图4所示。从图3可以看出:采用CEM条件的声波在 $t=0.01$ s 时已经出现微小反射,随着时间的推移,由人工反射引入的误差逐渐增大;采用EDT条件的声波在 $t=0.03$ s 时出现微小反射,在 $t=0.05$ s 时对主声场的影响比较明显。总体来说,对于均匀稳定流

场中的声传播问题,EDT条件较之CEM条件能更有效地削弱人工反射。

从图4可以看出,采用CEM条件的声波在 $t=0.03$ s 时出现人工反射,而采用EDT条件的声波在 $t=0.04$ s 时出现微小反射。随着时间的推移,特别是在 $t=0.05$ s 时2种条件产生的人工反射对主声场的影响都比较明显。

下面考查边界节点 $(-2.5, 0.0)$ 、 $(2.5, 0.0)$ 和内部节点 $(0.0, 2.5)$ 、 $(1.25, 0.0)$ 的声压解,其数值解 p_c 与基准解 p_b 的比较见表1~表4。由表中数据可以看出,EDT条件应用于均匀稳定流场的无界声传播中具有更好的吸收效果。

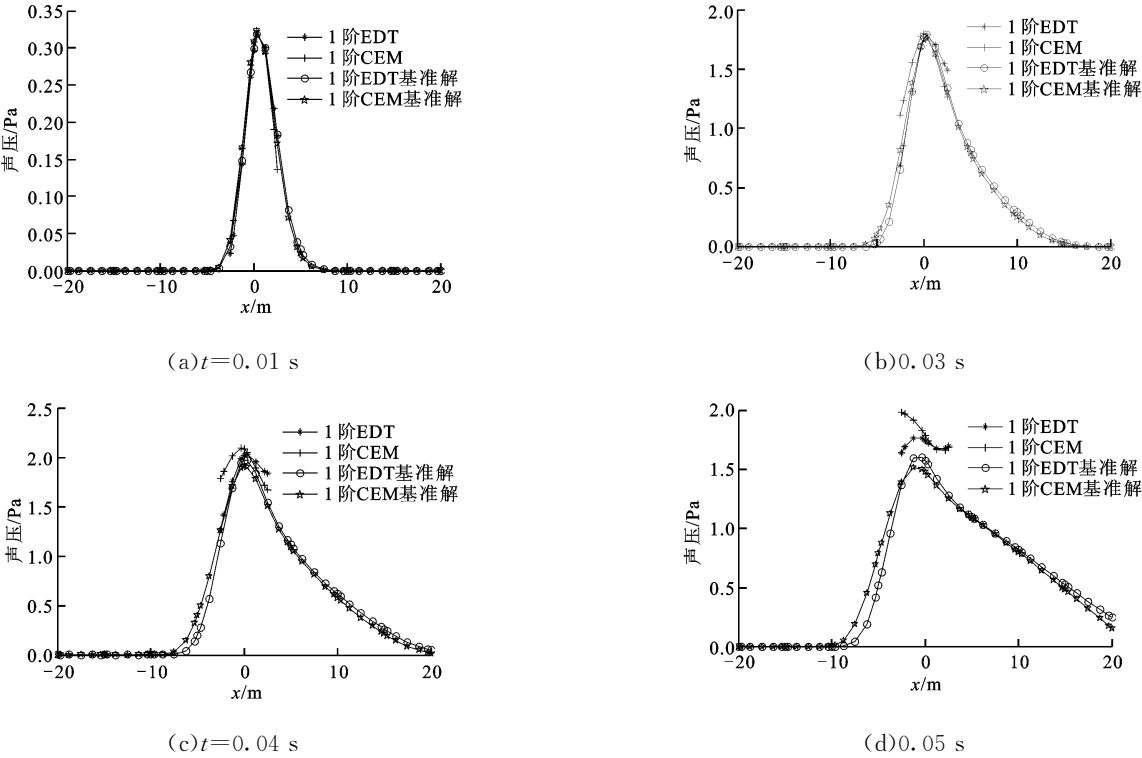


图3 x 方向的声压型线($y=0, Ma=0.6$)

表1 节点 $(-2.5, 0.0)$ 的声压解

t/s	p_c/Pa		p_b/Pa		绝对误差/ Pa		相对误差/ $\%$	
	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM
0.01	0.023 494	0.043 391	0.031 899	0.040 842	0.008 405	-0.002 549	26.348 790	-6.241 120
0.02	0.216 744	0.390 362	0.226 694	0.303 218	0.009 950	-0.087 144	4.389 177	-28.739 700
0.03	0.690 500	1.114 038	0.651 768	0.808 652	-0.038 732	-0.305 386	-5.942 610	-37.764 800
0.04	1.270 429	1.783 690	1.125 738	1.261 554	-0.144 691	-0.522 137	-12.853 000	-41.388 400
0.05	1.641 308	1.981 561	1.370 326	1.392 976	-0.270 982	-0.588 585	-19.775 000	-42.253 800

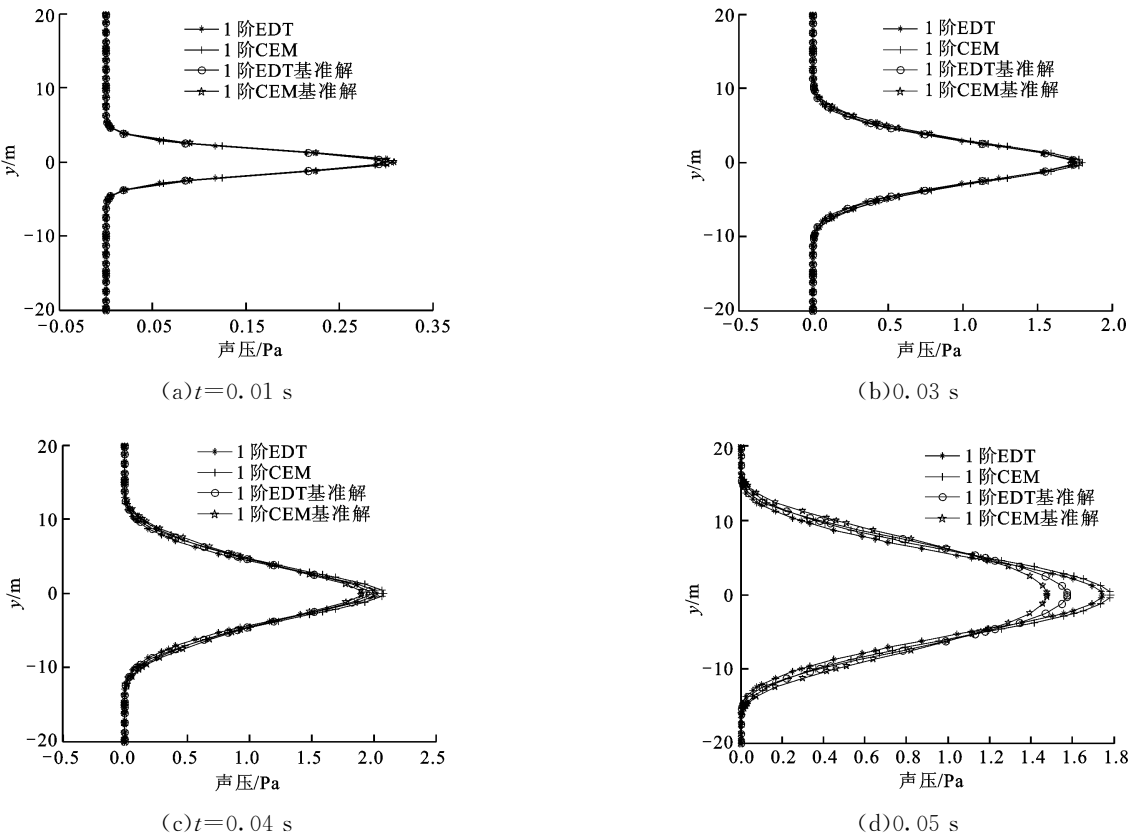


图 4 y 方向的声压型线($x=0, Ma=0.6$)

表 2 节点(2.5,0.0)的声压解

t/s	p_c/Pa		p_b/Pa		绝对误差/ Pa		相对误差/ $\%$	
	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM
0.01	0.182 018	0.136 811	0.182 995	0.170 587	0.000 977	0.033 776	0.533 894	19.799 870
0.02	0.830 227	0.665 953	0.787 080	0.758 304	-0.043 147	0.092 351	-5.481 910	12.178 620
0.03	1.493 084	1.267 309	1.338 956	1.300 409	-0.154 128	0.033 100	-11.511 100	2.545 353
0.04	1.838 278	1.674 310	1.541 995	1.502 582	-0.296 282	-0.171 728	-19.214 200	-11.428 900
0.05	1.699 010	1.685 527	1.279 376	1.248 786	-0.419 634	-0.436 742	-32.799 900	-34.973 300

表 3 节点(0.0,2.5)的声压解

t/s	p_c/Pa		p_b/Pa		绝对误差/ Pa		相对误差/ $\%$	
	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM
0.01	0.083 987	0.089 932	0.084 989	0.090 334	0.001 003	0.000 402	1.179 619	0.444 657
0.02	0.521 877	0.564 088	0.531 377	0.558 424	0.009 500	-0.005 664	1.787 734	-1.014 301
0.03	1.115 811	1.176 055	1.135 427	1.148 163	0.019 617	-0.027 891	1.727 680	-2.429 226
0.04	1.520 070	1.591 929	1.518 982	1.488 778	-0.001 088	-0.103 151	-0.071 625	-6.928 562
0.05	1.555 437	1.606 779	1.469 466	1.394 500	-0.085 971	-0.212 279	-5.850 518	-15.222 610

表 4 节点(1.25,0.0)上的声压解

t/s	p_c/Pa		p_b/Pa		绝对误差/ Pa		相对误差/ $\%$	
	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM	EDT	CEM
0.01	0.300 079	0.292 937	0.300 795	0.294 402	0.000 715	0.001 465	0.237 786	0.497 671
0.02	1.048 154	0.992 188	1.056 814	1.033 004	0.008 660	0.040 816	0.819 434	3.951 211
0.03	1.702 607	1.606 111	1.680 312	1.633 233	-0.022 295	0.027 122	-1.326 838	1.660 624
0.04	1.953 434	1.886 272	1.836 650	1.774 165	-0.116 784	-0.112 107	-6.358 538	-6.318 842
0.05	1.673 325	1.667 506	1.422 275	1.360 313	-0.251 051	-0.307 193	-17.651 350	-22.582 518

5 结 论

本文从群速度角度推导了包含均匀稳定来流的声波动方程在二维矩形区域的 4 个边界上的吸收边界条件,在空间上进行谱元离散,在时间上采用隐式 Newmark 积分法,在单元上采用 4 阶精度的 Chebyshev 谱函数进行逼近,在边界上分别采用 EDT 条件和 CEM 条件进行数值模拟. 通过与基准解的对比看出,在有限的网格剖分下,采用 4 阶 Chebyshev 谱逼近在空间上达到了 4 阶精度,在时间上达到了 2 阶精度,表明隐式 Newmark 积分法具有绝对的稳定性. 与 CEM 条件相比,在均匀稳定流场的无界声传播计算中,EDT 条件在人工边界上有更好的吸收效果,算法的精度提高. 基于均匀稳定来流的 EDT 条件在边界处的理论反射系数为 0,但是实际算例表明,边界处仍然存在人工反射,这可能是由离散误差和求解矩阵方程时的算法精度不足引起的.

今后的工作可以从以下几方面展开:加密网格并采用高阶的 Chebyshev 谱逼近;探索高精度的时间处理方法,如在时间上进行谱元离散;发展更高精度的吸收边界条件;寻找求解矩阵方程的高精度算法.

参考文献:

[1] LIGHTHILL M J. On sound generated aerodynamically: I General theory [J]. Proceedings of the Royal Society of London; Series A Mathematical Physical and Engineering Sciences, 1952;564-587.

[2] PATERA A T. A spectral element; method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(3): 468-488.

[3] CLAYTON R, ENGQUIST B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations [J]. Bulletin of Seismological Society of America, 1977, 67(6);1529-1540.

[4] ENGQUIST B, MAJDA A. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves [J]. Applied Mathematical Sciences, 1977, 74(5);1765-1766.

[5] ENGQUIST B, MAJDA A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves [J].

Mathematics of Computation, 1977, 31(139): 629 - 651.

[6] Renaut R, Froehlich J. Pseudospectral Chebychev method for the 2D wave equation with domain stretching and absorbing boundary conditions [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124;324-336.

[7] 邵秀民, 刘臻. 带吸收边界条件的声波方程显示差分格式的稳定性分析 [J]. 计算数学, 2001, 23(2):163-186.

SHAO Xiumin, LIU Zhen. Stability analysis of explicit finite difference schemes for the acoustic wave equation with absorbing boundary conditions [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2001, 23(2);163-186.

[8] 许靖, 秦国良, 朱昌允. 谱元方法求解含吸收边界的声学问题 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(7):875-878.

XU Jing, QIN Guoliang, ZHU Changyun. Chebyshev spectral elements method for wave equation with absorbing boundary conditions [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(7):875-878.

[9] ELIANE B, DAN GIVOLI, THOMAS H. High-order absorbing boundary conditions for anisotropic and convective wave equations[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(4):1099 -1129.

[10] 张荣欣, 秦国良. 用切比雪夫谱元方法求解均匀流场中的声传播问题 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(7): 120-124.

ZHANG Rongxin, QIN Guoliang. Chebyshev spectral elements method for acoustic propagation problem in a uniform mean flow [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(7);120-124.

[11] 朱昌允, 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解波动方程时显式与隐式差分方法的比较 [J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(9);1142-1145.

ZHU Changyun, QIN Guoliang, XU Zhong. Comparison of explicit central difference method and implicit Newmark method using Chebyshev spectral element method for wave equations [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(9);1142-1145.

(编辑 苗凌)