

一种快速迭代软阈值稀疏角 CT 重建算法

吴俊峰, 牟轩沁, 张砚博
(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对目前迭代软阈值稀疏角 CT 重建算法收敛速度较慢的问题, 提出了一种基于全变分约束的快速迭代软阈值稀疏角 CT 重建算法. 该算法首先对 CT 稀疏投影数据采用联合代数重建算法(SART)进行重建, 以获得满足数据一致性的重建图像, 然后计算 SART 重建图像的离散梯度变换, 并对其进行软阈值滤波, 最后利用离散梯度变换的伪逆更新重建图像. 由于在迭代过程中利用了前 2 次迭代重建图像作为下一次迭代的初始图像, 因而加快了重建算法的收敛速度. 对 Shepp-Logan 模体进行仿真的实验结果表明: 在无噪、 5×10^4 和 2×10^5 光子泊松噪声情况下, 与 SART 重建算法、基于 Harr 小波的快速迭代软阈值算法以及基于全变分约束的迭代软阈值重建算法相比, 该重建算法的收敛速度有明显提高, 同时能够有效减小图像的相对重建误差.

关键词: 稀疏角; 全变分约束; 迭代软阈值; CT 重建

中图分类号: TN911.73 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)12-0024-06

A Fast Iterative Soft-Threshold Algorithm for Few-View CT Reconstruction

WU Junfeng, MOU Xuanqin, ZHANG Yanbo
(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A fast iterative soft-threshold algorithm is proposed to accelerate the convergence of iterative soft-threshold algorithm for image reconstruction from few-view projections. The algorithm bases on total variation minimization. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) is used to reconstruct image from few-view projections and to meet the constraint of the projection data. Then discrete gradient transform (DGT) of the reconstructed image is calculated and the soft-threshold filtering is performed on the DGT. Finally the reconstructed image is updated using the pseudo-inverse of the DGT. The proposed algorithm takes the images in previous two iterations as the input image for a new iteration, and hence the convergence is accelerated. Experimental results and comparisons with the SART algorithm, the fast iterative soft-threshold algorithm with Harr wavelet constraint, and the iterative soft-threshold filtering algorithm with total variation constraint on the projections of Shepp-Logan phantom under the conditions without noise and corrupted by Poisson noise assuming with 5×10^4 and 2×10^5 photons per detector element show that the proposed algorithm can not only speed up the convergence, but also reduce the relative reconstruction error of images.

Keywords: few-view; total variation constraint; iterative soft-threshold; CT reconstruction

X 射线 CT 成像是一类广泛应用于医疗诊断领域的成熟技术. 然而, 在医疗诊断过程中过量的 X

射线照射对人体有一定的伤害性, 增加人体罹患癌症和遗传疾病的风险, 因此需要在保证成像质量的

情况下尽可能地降低 X 射线的剂量^[1-2]。减少 X 射线投影数目是降低人体 X 射线辐射剂量的有效途径之一,但采样少量的 X 射线投影数据又不能满足 CT 精确重建所要求的奈奎斯特采样定理^[3],此时若直接应用传统的解析重建方法,如滤波反投影算法,对少量投影数据进行重建,往往得不到理想的 CT 重建图像。

近年来,由 Candes 等人^[4]提出的压缩感知理论使得通过远少于内奎斯特采样定理要求的采样数据实现信号的准确恢复成为可能。Sidky 等人^[5-6]首次将该理论引入稀疏角 CT 重建中,提出了一种全变分最小迭代算法,该算法通过交替进行的代数重建算法和梯度下降法分别对投影数据误差项和全变分(TV)项交替最小化,取得了较好的重建效果,然而该算法在梯度下降计算过程中没有标准的算法停止准则和参数选择方案。

Daubechies 等人^[7]提出了一种基于 L1 范稀疏约束的迭代收缩软阈值算法,然而该算法的收敛速度较慢。之后,Beck 等人^[8]为解决模糊图像复原问题,提出了一种基于可逆稀疏变换 L1 范约束的快速迭代收缩软阈值算法,该算法在迭代过程中利用前两次迭代值的一个特殊线性组合作为下一次迭代的初始值来进行算法更新,数学理论证明了该算法的全局收敛率是 $O(1/k^2)$,明显高于迭代收缩软阈值算法的收敛率 $O(1/k)$,其中 k 是迭代次数。

由于离散梯度变换(discrete gradient transform, DGT)的不可逆性,迭代软阈值算法不能直接应用到基于全变分约束的稀疏角 CT 重建领域中,为此文献[9]构造了 DGT 的伪逆形式,利用该伪逆形式得到了基于全变分约束的迭代软阈值稀疏角 CT 重建算法(本文简称为迭代软阈值 CT 重建算法),然而该算法迭代过程中仅用上一次的迭代值更新重建图像,收敛速度较慢,需要迭代几千次才能得到高质量的重建结果。

本文针对文献[9]中迭代软阈值 CT 重建算法收敛速度较慢的问题,借鉴文献[8]的加速策略,提出了一种基于 TV 正则化的快速迭代软阈值 CT 重建算法。该算法将 CT 重建问题归结为采用投影数据均方误差作为数据保真项、TV 作为正则项的无约束优化问题,然后利用快速迭代软阈值重建算法求解该优化问题。算法在每次迭代中利用前 2 次迭代值的一种特殊线性组合作为下一次迭代的初始值,加快了算法的收敛速度。利用 Shepp-Logan 模体进行了仿真实验验证,并同 SART 重建算法、文

献[8]算法以及迭代软阈值 CT 重建算法进行比较。实验结果验证了本文算法的重建效果和收敛速度明显优于其他 3 种算法。

1 基于 TV 最小化的稀疏角 CT 重建模型

假设 $\mathbf{x}=[x_{i,j}]$ 表示一幅 I 行、 J 列的待重建 CT 图像,其中 $x_{i,j}$ 表示待重建图像的第 i 行、 j 列的像素值。为了下文叙述方便起见,同时需定义二维图像 $\mathbf{x}$ 的向量表示形式 $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_n, \dots, x_N]^T$, 其中 $x_n = x_{i,j}$, $n=(i-1)J+j$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$, $N=IJ$ 。

根据 CT 成像的物理过程,CT 重建的数学模型可表示为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}=[a_{m,n}]$ 为 M 行、 N 列的几何投影矩阵,其中坐标为 (m,n) 的元素 $a_{m,n}$ 为加权因子,表示第 n 个像素对第 m 条射线线积分的贡献; $\mathbf{b}=[b_1, \dots, b_m, \dots, b_M]^T$ 为测得的投影数据。

从数学角度分析,CT 中的稀疏角重建问题相当于求解一个大型的欠定代数方程组,属于不适定问题研究范畴。为了得到比较满意的重建结果,重建过程中通常需要引入图像的某种先验信息。目前,图像的离散梯度变换(其 L1 范数为全变分)作为一种稀疏变换已经被广泛应用于基于 CS 理论的 CT 重建领域中^[5-6,9-13],对于一个二维图像 $\mathbf{x}=[x_{i,j}]$ 来说,它的 TV 和 DGT 分别表示为

$$T(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j d_{i,j} d_{i,j} = ((x_{i,j} - x_{i+1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j+1})^2)^{1/2} \quad (2)$$

因此,基于 TV 约束的 CT 图像重建过程等价于求解如下优化问题

$$\min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \mu T(\mathbf{x}) \quad (3)$$

式中: μ 为正则化参数。

2 基于全变分约束的迭代软阈值的稀疏角重建算法

迭代软阈值 CT 重建算法是一种有效的 CT 重建算法,且已被推广应用到 CT 内重建中^[13],但该算法的收敛速度较慢。结合文献[8]中的加速思想,本文提出一种基于全变分约束的快速迭代软阈值 CT 重建算法,算法的详细计算步骤如下。

(1) 计算投影矩阵 $\mathbf{A}$ 。

(2) 初始化图像 $\mathbf{x}^0=0$, $\mathbf{y}^1=\mathbf{x}^0$, $t^1=1$, 其中上角

标变量 k 表示迭代次数.

(3) 执行 SART 重建, 重建公式^[14] 如下

$$\hat{x}_n^k = y_n^k + \lambda^k \frac{1}{a_{+n}} \sum_{m=1}^M \frac{a_{m,n}}{a_{m+}} (b_m - A_m y^k) \quad (4)$$

式中: $a_{+n} = \sum_{m=1}^M a_{m,n} > 0$; $a_{m+} = \sum_{n=1}^N a_{m,n} > 0$; A_m 表示投影矩阵 A 的第 m 行; k 为迭代次数; λ^k 为松弛因子 ($0 < \lambda^k < 2$).

(4) 计算 SART 重建图像的 DGT

$$d_{i,j}^k = ((\hat{x}_{i,j}^k - \hat{x}_{i+1,j}^k)^2 + (\hat{x}_{i,j}^k - \hat{x}_{i,j+1}^k)^2)^{1/2} \quad (5)$$

(5) 对 SART 重建图像的 DGT 进行软阈值滤波操作, 当 $d_{i,j}^k < \mu$, 通过改变 $\hat{x}_{i,j}^k$, $\hat{x}_{i+1,j}^k$ 和 $\hat{x}_{i,j+1}^k$ 使 $d_{i,j}^k = 0$; 当 $d_{i,j}^k \geq \mu$, 改变 $(\hat{x}_{i,j}^k - \hat{x}_{i+1,j}^k)^2$ 和 $(\hat{x}_{i,j}^k - \hat{x}_{i,j+1}^k)^2$ 使 $d_{i,j}^k = d_{i,j}^k - \mu$. 具体计算过程如下

$$x_{i,j}^{k,a} = (2\hat{x}_{i,j}^k + \hat{x}_{i,j+1}^k + \hat{x}_{i+1,j}^k)/4 \quad (6)$$

$$x_{i,j}^{k,a} = \begin{cases} \frac{2\hat{x}_{i,j}^k + \hat{x}_{i,j+1}^k + \hat{x}_{i+1,j}^k}{4}, & d_{i,j}^k < \mu \\ \hat{x}_{i,j}^k - \frac{\mu(2\hat{x}_{i,j}^k + \hat{x}_{i,j+1}^k + \hat{x}_{i+1,j}^k)}{4d_{i,j}^k}, & d_{i,j}^k \geq \mu \end{cases} \quad (7)$$

$$x_{i,j}^{k,b} = \begin{cases} \frac{\hat{x}_{i,j}^k + \hat{x}_{i+1,j}^k}{2}, & d_{i,j}^k < \mu \\ \hat{x}_{i,j}^k - \frac{\mu(\hat{x}_{i,j}^k - \hat{x}_{i+1,j}^k)}{2d_{i,j}^k}, & d_{i,j}^k \geq \mu \end{cases} \quad (8)$$

$$x_{i,j}^{k,c} = \begin{cases} \frac{\hat{x}_{i,j}^k + \hat{x}_{i,j+1}^k}{2}, & d_{i,j}^k < \mu \\ \hat{x}_{i,j}^k - \frac{\mu(\hat{x}_{i,j}^k - \hat{x}_{i,j+1}^k)}{2d_{i,j}^k}, & d_{i,j}^k \geq \mu \end{cases} \quad (9)$$

式中: μ 是软阈值滤波中的阈值, 本文采用投影梯度方法^[15]来自适应确定阈值. 在每次滤波操作中, 阈值应使滤波后的图像 TV 值接近于理想图像的 TV 值, 仿真实验中理想图像即为原始模体, 若利用本文算法对实际 CT 设备获得的少量投影数据进行重建时, 可先对全扫描数据进行 FBP 重建, 用 FBP 重建图像的 TV 值来代替理想图像的 TV 值

$$T(\hat{x}^k) = \sum_i \sum_j S_\mu(d_{i,j}^k, \hat{x}^k) \approx T(x^*) \quad (10)$$

式中: $S_\mu(z) = \begin{cases} z - \mu, & z \geq \mu \\ 0, & z < \mu \end{cases}$; x^* 是理想图像. 式

(10) 可通过二分法来求解^[16].

$$(6) \text{ 计算 } t^{k+1} = \frac{1 + (1 + 4(t^k)^2)^{1/2}}{2}.$$

$$(7) \text{ 计算 } y^{k+1} = x^k + \frac{t^k - 1}{t^{k+1}} (x^k - x^{k-1}). \text{ 与迭代}$$

软阈值重建算法不同的是本文算法在迭代过程中利用 x^k 和 x^{k-1} 的线性组合 y^{k+1} 作为下一次迭代的初值来进行迭代更新, 即迭代过程中利用前 2 次迭代

值的一个特殊线性组合, 作为下一次迭代的初值进行迭代更新.

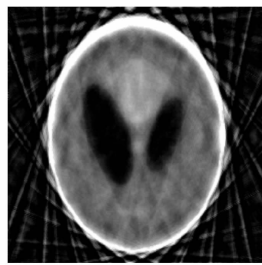
(8) $k \leftarrow k+1$, 重复步骤(3)~(7), 直到算法迭代满足迭代收敛准则.

在步骤(3) SART 重建公式中, 参数 λ^k 取值为 1, 算法的停止迭代收敛准则定义为算法达到最大迭代次数 5 000 次就停止迭代. 当以上参数确定后, 针对不同图像需要调整的参数仅有稀疏角采样个数. 经验表明, 对于 Shepp-Logan 模体图像, 利用 21 个角度的扇束投影数据就能几乎精确重建出 Shepp-Logan 模体图像, 因此本文选择 21 个扇束投影数据来验证所提算法的有效性.

3 实验设计与实验结果分析

本文选择 Shepp-Logan 模体模拟生成基于圆形扫描轨道的扇形束投影数据. 其中, 射线源到旋转中心和探测器的距离分别为 500 mm 和 1 000 mm, 扇角为 45° , 探测单元为 280 个, 大小为 1 mm $\times$ 1 mm, Shepp-Logan 模体大小为 256 $\times$ 256 像素, 每个像素大小是 1 mm $\times$ 1 mm. 所有程序均在 Intel (R) Core(TM) CPU 2.80 GHz 处理器 6 GB 内存的 PC 机上运行, 程序设计采用 Matlab 编程语言实现.

实验在 $[0, 2\pi]$ 范围内均匀采样 21 个扇形束投影数据用于图像重建, 重建结果如图 1 所示. 从图 1 可以看出, 本文提出的算法几乎能够精确重建原始图像, 重建效果明显优于 SART 算法、文献[8]算法



(a) SART 算法



(b) 文献[8]算法



(c) 文献[9]算法



(d) 本文算法

图 1 4 种不同算法的重建结果(显示窗 $[0, 0.5]$)

和文献[9]算法。

为了定量分析本文重建算法的性能,计算了图 1 中不同重建结果与理想图像之间的相对重建误差 (E_{RR})以及相应的重建时间,如表 1 所示。相对重建误差计算公式如下

$$E_{RR} = \frac{\| \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^* \|_2^2}{\| \mathbf{x}^* \|_2^2}$$

(11)

式中: $\mathbf{x}^k$ 是重建图像; $\mathbf{x}^*$ 是理想图像,即原始 Shepp-Logan 模体。

表 1 图 1 中不同算法重建结果的相对重建误差和重建时间比较

算法	E_{RR}	重建时间/min
SART	0.487 7	117.6
文献[8]算法	0.416 0	105.3
文献[9]算法	0.335 0	137.2
本文算法	0.058 4	18.01

由表 1 中的重建误差分析可以看出,本文算法重建图像的重建误差远远低于文献[9]算法,大约是文献[9]算法的 17.4%。再由表 1 的重建时间分析来看,本文的收敛速度大约是文献[9]算法的 7.62 倍。图 2 给出了不同重建算法的相对重建误差随时间变化的曲线,直观地说明了本文算法的收敛速度明显快于 SART 重建算法、文献[8]算法和文献[9]算法。

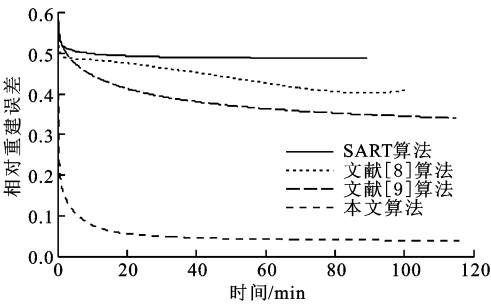
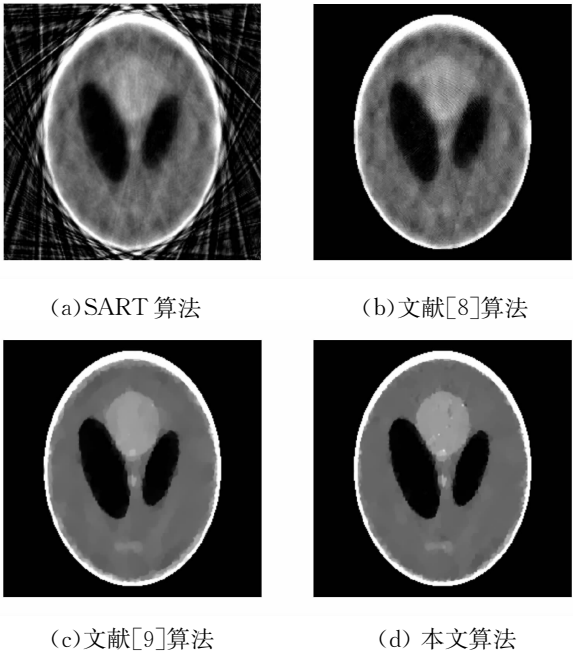


图 2 无噪投影不同重建算法的收敛曲线

为了验证本文算法的抗噪性能,在理想投影数据中加入 5×10^4 光子泊松噪声。不同算法的重建结果如图 3 所示。可以看出,本文算法的重建结果明显优于 SART 重建算法、文献[8]算法和文献[9]算法。表 2 给出了图 3 中重建结果的相对重建误差和重建所需时间。从表 2 中的数据中可以看出,本文算法的收敛速度大约是文献[9]重建算法的 14.6 倍,重建图像的相对重建误差大约是文献[9]重建算法

的 17.4%。图 4 给出了 5×10^4 光子泊松噪声投影情况下不同重建算法的收敛曲线,可以明显看出,本文算法在 5×10^4 光子泊松噪声投影数据下收敛速度快于其他 3 种重建算法。



(a)SART 算法 (b)文献[8]算法 (c)文献[9]算法 (d) 本文算法

图 3 5×10^4 光子泊松噪声情况下不同算法的稀疏角重建结果(显示窗[0, 0.5])

表 2 图 3 中不同算法重建结果的相对重建误差和重建时间比较

算法	E_{RR}	重建时间/min
SART	0.560 6	154.8
文献[8]算法	0.506 1	91.0
文献[9]算法	0.345 8	166.1
本文算法	0.284 9	11.4

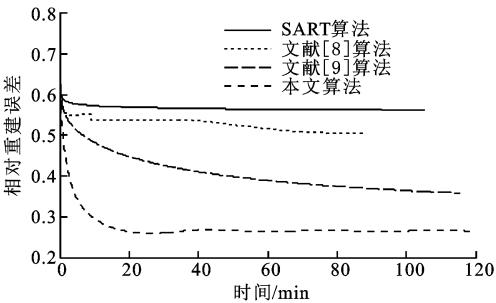


图 4 5×10^4 光子泊松噪声下不同重建算法的收敛曲线

为了进一步验证本文算法的抗噪性能,在理想投影数据中加入 2×10^5 光子泊松噪声。不同算法的重建结果如图 5 所示。可以看出,本文算法重建结果明显优于 SART 重建算法、文献[8]算法和文献[9]

重建算法. 表 3 给出了图 5 中重建结果的相对重建误差和重建所需时间. 从表 3 中的数据中可以看出, 本文算法的收敛速度大约是文献[9]重建算法的 9.5 倍, 重建图像的相对重建误差大约是文献[9]重建算法的 80%. 图 6 给出了在投影数据中加入 2×10^5 光子泊松噪声后不同重建算法的收敛曲线. 可以看出, 本文算法的重建收敛速度明显优于其他 3 种重建算法.

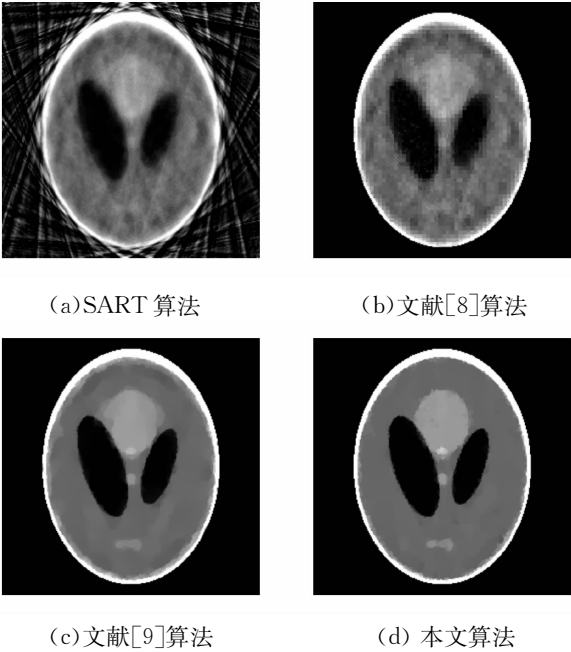


图 5 2×10^5 光子泊松噪声情况下不同算法的稀疏角重建结果(显示窗[0, 0.5])

表 3 图 5 中不同算法重建结果的相对重建误差和重建时间比较

算法	E_{RR}	重建时间/min
SART	0.5598	109.4
文献[8]算法	0.4602	113.3
文献[9]算法	0.3473	141.1
本文算法	0.2797	14.8

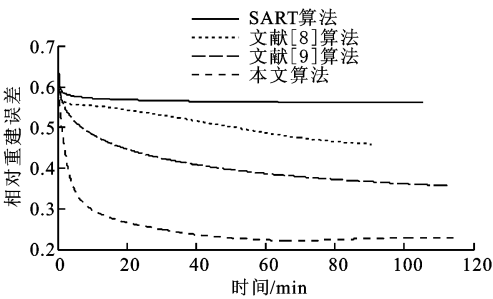


图 6 2×10^5 光子泊松噪声下不同重建算法的收敛曲线

4 结 论

本文提出了一种快速迭代软阈值稀疏角 CT 重建算法, 解决了迭代软阈值 CT 重建算法收敛速度慢的问题. 该算法首先对 CT 稀疏投影数据采用 SART 进行重建, 然后计算 SART 重建图像的离散梯度变换, 进行软阈值滤波, 并利用离散梯度变换的伪逆更新重建图像. 算法在迭代过程中利用前 2 次迭代的估计值作为下一次迭代的初值进行迭代, 加快了算法的收敛速度. 通过对 Shepp-Logan 模体进行的对比仿真实验验证, 在无噪、 5×10^4 和 2×10^6 光子泊松噪声情况下, 相对于所比较的 3 种算法, 本文算法的收敛速度有明显提高, 同时能够有效减小重建图像的相对误差. 后续的研究工作将是验证本文算法在真实 CT 数据重建中的性能, 为压缩感知理论在实际 CT 成像技术中的早日应用提供稳健快速的算法支持.

参考文献:

[1] DEGONZALEZ A B, DARBY S. Risk of cancer from diagnostic X-rays; estimates for the UK and 14 other countries [J]. The Lancet, 2004, 363 (9406): 345-351.

[2] HALL E, BRENNER D. Cancer risks from diagnostic radiology [J]. British Journal of Radiology, 2008, 81 (5): 362-378.

[3] NATTERER F. The mathematics of computerized tomography [M]. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001: 71-84.

[4] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (2): 489-509.

[5] SIDKY E Y, KAO C M, PAN Xiaochuan. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT [J]. Journal of X-ray Science and Technology, 2006, 14(2): 119-139.

[6] SIDKY E Y, KAO C M, PAN Xiaochuan. Image reconstruction in circular cone beam computer tomography by constrained, total-variation minimization [J]. Physics in Medicine and Biology, 2008, 53(17): 4857-4862.

[7] DAUBECHIES I, DEFRISE M, DE MOL C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Communications

- on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [8] BECK A, TEBoulLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 183-202.
- [9] YU Hengyong, WANG Ge. A soft threshold filtering approach for reconstruction from a limited number of projections [J]. Physics in Medicine and Biology, 2010, 55(13): 3905-3916.
- [10] CHEN Guanghong, TANG Jie, LENG Shuai. Prior image constrained compressed sensing (PICCS): a method to accurately reconstruct dynamic CT images from highly undersampled projection data sets [J]. Medical Physics, 2008, 35(2): 660-663.
- [11] 练秋生,郝鹏鹏. 基于压缩感知和代数重建法的 CT 图像重建[J]. 光学技术, 2009, 35(3): 422-425.
LIAN Qiusheng, HAO Pengpeng. Image reconstruction for CT based on compressed sensing and ART [J]. Optical Technique, 2009, 35(3): 422-425.
- [12] 钱姗姗,黄静,马建华,等. 基于投影数据非单调性全变分恢复的低剂量 CT 重建[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1702-1707.
QIAN Shanshan, HUANG Jin, MA Jianhua, et al. Nonmonotone total variation minimization based projection restoration for low dose CT reconstruction[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(7): 1702-1707.
- [13] XU Qiong, MOU Xuanqin, WANG Ge, et al. Statistical interior tomography [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1116-1128.
- [14] ANDERSEN A H, KAK A. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm [J]. Ultrasonic Imaging, 1984, 6(1): 81-94.
- [15] DAUBECHIES I, FORNASIER M, LORIS I. Accelerated projected gradient method for linear inverse problems with sparsity constraints [J]. Journal of Fourier Analysis and Application, 2008, 14(5/6): 764-792.
- [16] YU Hengyong, WANG Ge. SART-type image reconstruction from a limited number of projections with the sparsity constraint [J/OL]. International Journal of Biomedical Imaging, 2010: 1-9[2011-05-05]. <http://www.hindawi.com/journals/ijbi/2010/934847/>.
- [17] 陈希,牟轩沁,杨莹. 一种从衰减数据重建 X 射线球管光谱的方法[J]. 西安交通大学学报, 2006, 40(10): 1056-1068.
CHEN Xi, MOU Xuanqin, YANG Ying. Reconstruction of X-ray tube spectra from attenuation data [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2006, 40(10): 1056-1068.

(编辑 刘杨)