

Richtmyer-Meshkov 不稳定性的格子 Boltzmann 数值模拟

冯永昌, 李会雄, 王太

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了探寻研究 Richtmyer-Meshkov(RM) 不稳定性的新方法, 采用耦合双分布函数格子 Boltzmann 方法(LBM), 对激波作用下两种不同密度流体交界面的演化过程进行了数值模拟研究, 着重讨论了 RM 不稳定性的行程和演化特征, 给出了交界面的扰动增长率的变化规律, 同时还研究了激波强度对扰动振幅的影响. 结果表明: 由于受 RM 不稳定性的影响, 两种不同密度流体的交界面上, 重流体演化成尖顶结构, 而轻流体演化成气泡结构, 最终由于斜压效应重流体的尖顶转变成蘑菇头形状; 界面扰动增长率与 Zhang-Sohn 模型较吻合; 激波强度越大, 扰动振幅增长率越高. 研究表明所提的方法可以用于 RM 不稳定性的研究, 有望成为两相流研究的新途径.

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 双分布函数; RM 不稳定性; 两相流

中图分类号: O354.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)11-0044-05

Numerical Simulation of Richtmyer-Meshkov Instability Using Lattice Boltzmann Method

FENG Yongchang, LI Huixiong, WANG Tai

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To seek a new method to study the Richtmyer-Meshkov(RM) instability, a numerical study was performed for the evolution of the interface between two layers of fluid with different densities using the coupled double distribution function lattice-Boltzmann method (LBM). The research focused on the RM instability and the perturbation growth rates of the interface were presented. The influence of the Mach number upon the perturbation growth rate was explored. The results show that due to the RM instability, the heavy fluid falls to generate a spike and the light fluid rises to form a bubble, and at last the head of the spike changes to mushroom shape. The numerical perturbation growth rate is in agreement with the result by the Zhang-Sohn model. The perturbation growth rises with an increase in the Mach number of shock wave. It can be concluded that the present method is an efficient approach to the simulation for the RM instability and two-phase flow.

Keywords: lattice-Boltzmann method; double distribution function; Richtmyer-Meshkov instability; two-phase flows

两种不同密度的分层流体交界面在激波作用下
会获得一个有限速度, 界面上的扰动会随着时间逐

渐发展, 最终导致两种流体强烈混合, 该现象称为
Richtmyer-Meshkov(RM) 不稳定性^[1-2]. RM 不稳

定现象存在于许多物理过程中,如超燃冲压发动机内燃料的混合与燃烧、惯性约束热核聚变及天体物理中的超新星爆炸等,由于其在军事和民用上的巨大潜力,对 RM 不稳定性的研究至今异常活跃。

目前,已有许多关于 RM 不稳定性实验^[3]和数值模拟^[4]结果的报道。在数值模拟方面,许多新的方法得到应用,如 Front-tracking^[5]以及格子 Boltzmann 方法(LBM)^[6]。与传统的基于求解宏观量的 Navier-Stokes(N-S)方程的方法不同,LBM 是一种基于对流场的介观层次描述的方法,既具有微观方法假设条件较少的特点,又具有宏观方法的不关心分子运动细节的优势。该方法没有对介质连续性假设的要求,可用于模拟非连续介质的流动问题,能比较直观、方便地研究复杂的流动问题,因而该方法对于激波和界面的捕捉比其他方法更具优势。Jin 等^[7]首次采用单松弛 LBM 对 RM 不稳定性进行了初步模拟。Chen 等^[8]提出新的可压缩 LBM,并对 RM 不稳定性进行研究,获得了与实验图像接近的模拟结果。2011 年,Chen 等^[6]采用多松弛 MRT 模型对 RM 不稳定性进行详细研究,获得了与理论预测相接近的模拟结果,数值模拟得到的界面演化过程与物理分析结果相一致,但该 MRT 模型存在过多的自由参数,对不同的工况需要调节自由参数才能得到满意的结果,并且不能直接采用实际物理单位。

2007 年,Li 等^[9]通过将双分布函数模型和多速度模型结合,提出了满足完全气体状态方程并可用于可压缩流动的耦合双分布函数格子 Boltzmann 模型。该模型在模拟黏性可压缩流动中,较之传统的单分布函数多速度模型,在调节比热容和普朗特数方面具有很大的优势,相对于多松弛 MRT 模型,自由参数少,可以直接采用实际物理单位;同时,通过采用圆函数分布代替 Maxwell 分布,使得耦合双分布函数模型可以应用于含有激波的复杂流场等问题。

鉴于耦合双分布函数 LBM 的诸多优点,本文首次采用该方法分别对激波作用于 Air-SF₆ 和 Air-He 的界面 RM 不稳定性现象进行数值模拟,给出了界面演化的详细过程,同时计算了两种工况下的扰动增长率,所得结果与理论模型预测基本一致,表明该方法能够用于 RM 不稳定性分析的模拟计算。本文还对不同马赫数 Ma 对界面扰动振幅的影响进行了研究,得出了其基本规律。

1 数值模拟计算模型及实验参数

1.1 物理模型

本文的数值模拟在二维矩形计算区域上进行,交界面和激波的初始位置如图 1 所示。假设激波由矩形区域的左侧进入并向右运动,则激波左侧为波后 Air,可由激波前后关系式求得物理参数,激波和界面之间为静止的 Air,界面右边为静止的 SF₆ 或 He。实际数值模拟时,Air、SF₆ 和 He 的密度按照实际密度给定,取 $\gamma=1.4$ 。计算区域长 0.6 m、高 0.1 m。

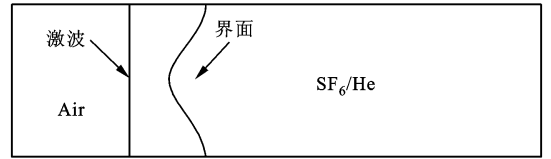


图 1 激波与交界面的初始位置

1.2 计算方法

本文采用的耦合双分布函数 LBM 演化方程^[9]如下

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (e_a \cdot \nabla) f_a = -\frac{1}{\tau_f} (f_a - f_a^{\text{eq}}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_a}{\partial t} + (e_a \cdot \nabla) h_a = \\ -\frac{1}{\tau_h} (h_a - h_a^{\text{eq}}) + \frac{1}{\tau_{hf}} (e_a \cdot u) (f_a - f_a^{\text{eq}}) \end{aligned} \quad (2)$$

式中: f_a 、 f_a^{eq} 分别为密度分布函数和平衡态密度分布函数; h_a 、 h_a^{eq} 分别为总能分布函数和总能平衡态分布函数。 f_a^{eq} 、 h_a^{eq} 及其他参数的具体形式可参考文献[9]。

流体的密度、速度、温度及压力等宏观参量可通过分布函数计算得到

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sum_a f_a; u = \frac{1}{\rho} \sum_a e_a f_a \\ T &= \frac{2}{bR} \left(\frac{1}{\rho} \sum_a h_a - \frac{u^2}{2} \right); p = \rho RT \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $b=2/(\gamma-1)$ 。

本文采用有限差分方法对式(1)、(2)进行离散求解,时间离散采用一阶隐式显式龙格库塔格式^[10],空间离散采用二阶 Lax-wendroff 格式。本文计算时选用 D2Q12 离散速度模型^[9]。

1.3 网格划分及边界条件

在计算前进行了网格无关性验证,1 200×200 的均匀网格能够捕捉到更清晰的界面。边界条件的

设置为:左边界采用进口边界条件;上下壁面采用周期性边界条件;右边界采用非平衡外推^[11].

2 计算结果与分析

本文分两种情况对 RM 不稳定性进行研究:①激波由轻气体向重气体入射;②激波由重气体向轻气体入射.已有的研究表明,激波作用不同密度气体正弦界面后,在扰动发展初期,振幅 a 呈线性增长,后期振幅呈非线性增长,轻流体发展成为气泡,重流体发展成尖钉,最终随着演化不断发展进入湍流混合状态^[12].

为了验证本文方法的可靠性,首先采用该方法模拟了 Air-SF₆ 的物理实验,实验具体参见文献^[5],并与物理实验结果及 Holmes 等^[5]使用 Front-tracking 方法的模拟结果进行了对比,如图 2 所示.从图中可以看出,本文的模拟结果要优于 Front-tracking 方法及其他理论预测模型,更加接近实验结果,表明了本文方法的可行性和优越性.

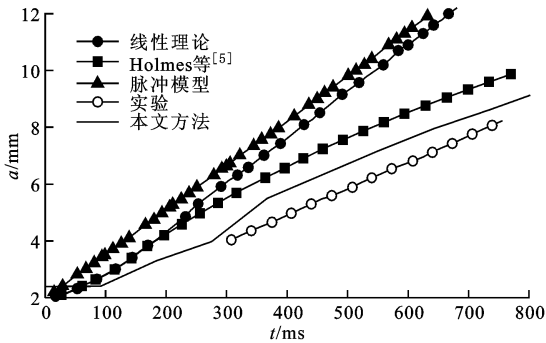


图 2 Air-SF₆ 例子的扰动振幅随时间的变化

2.1 激波由 Air 向 SF₆ 入射的数值算例

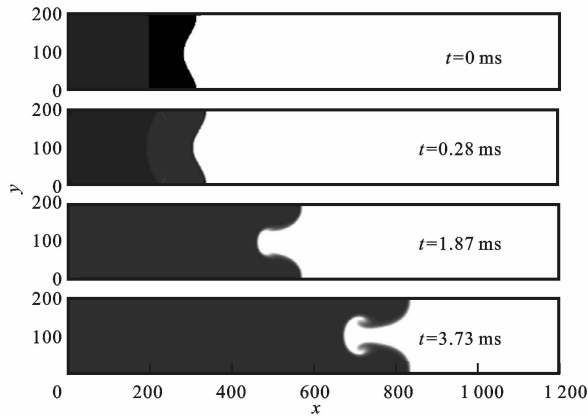
Air 中一个 Ma 为 1.2 的激波与正弦型介质界面相互作用,界面的另一侧充满了 SF₆,计算的初始条件为

$$\begin{cases} (\rho/\rho_0, u_1/u_0, u_2/u_0, p/p_0)_l = (1.34, 0.36, 0, 1.51) \\ (\rho/\rho_0, u_1/u_0, u_2/u_0, p/p_0)_m = (1, 0, 0, 1) \\ (\rho/\rho_0, u_1/u_0, u_2/u_0, p/p_0)_r = (5.04, 0, 0, 1) \end{cases}$$

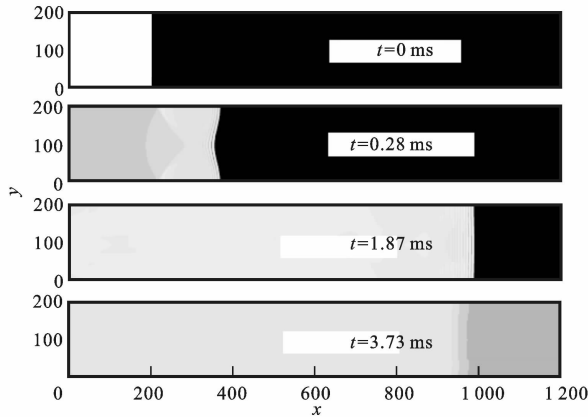
式中: l, m, r 分别代表图 1 中的左、中、右 3 部分区域; ρ_0, u_0, p_0 为参考量,其值为标准大气压下 Air 的参数, $\rho_0 = 1.165 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = \rho_0 RT_0$, $T_0 = 303 \text{ K}$, $u_0 = (RT_0)^{1/2}$. 激波初始位置 $x = 0.1 \text{ m}$,交界面的初始位置 $x = 0.25 N_x dx + 0.008 \cos(20\pi y)$,其中 N_x 为 x 方向网格数, dx 为网格长度.

图 3 为 $t = 0, 0.28, 1.87, 3.73 \text{ ms}$ 时的密度和压力场图,当激波从左向右运动碰到交界面时,随即

产生一个右行穿透激波和一个左行反射激波(见图 3 中 $t = 0.28 \text{ ms}$ 的时刻),并且穿透激波有明显的弯曲,交界面在向下游运动的同时,有很小的变形. $t = 1.87 \text{ ms}$ 时,反射激波已经离开计算区域,穿透激波变得平坦,扰动振幅不断增大,由于受到 RM 不稳定性的影响,交界面的扰动继续发展,产生了泡状和钉状结构.最终,由于界面切向速度差导致尖钉头部形成翻转的蘑菇头形状(见图 3 中 $t = 3.73 \text{ ms}$ 的时刻).



(a) 密度场



(b) 压力场

图 3 Air-SF₆ 例子不同时刻的密度和压力场图

图 4 为扰动振幅及其增长率随时间的变化图,扰动振幅定义为气泡和尖钉长度之和的一半.由图 4a 可以看到,激波穿过界面时,扰动出现了负增长,随后,由于 RM 不稳定性起了主导作用,扰动迅速发展.图 4b 为数值模拟的扰动增长率与 Zhang-Shon 非线性理论模型^[13]的对比图,可以看出, LBM 数值模拟的计算结果与非线性理论结果较吻合.结果中出现的大幅波动是由数值格式的非物理振荡引起的.

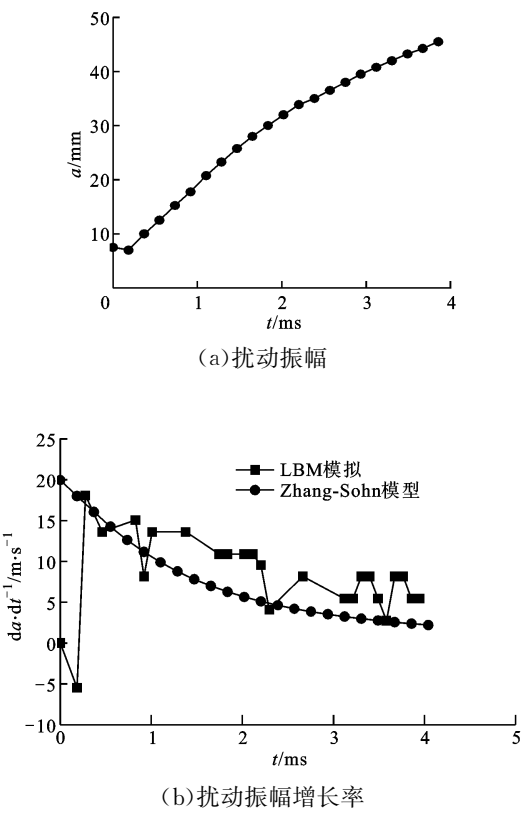


图 4 Air-SF₆ 例子的扰动振幅与扰动振幅增长率随时间的变化

Zhang-Shon 非线性理论模型^[13]的表达式为

$$\frac{da}{dt} = \frac{\nu_0}{1 + k^2 \nu_0 a_1 t + \max[0, (ka_1)^2 - A_1^2 + 0.5]} (k\nu_0 t)^2$$

式中: $\nu_0 = k\Delta u A_1 a_1$, 其中 k 为波数, a_1 为激波作用后界面的振幅, Δu 为波后界面跃迁速度; A_1 为激波作用后界面的 Atwood 数.

2.2 激波由 Air 向 He 入射的数值算例

Air 中一个 Ma 为 2.0 的激波与正弦型介质界面相互作用, 界面的右侧充满 He, 交界面的初始位置 $x=0.1 N_x dx + 0.008 \cos(20\pi y)$, 激波初始位置 $x=0.06$ m, 初始参数如下

$$\begin{cases} (\rho/\rho_0, u_1/u_0, u_2/u_0, p/p_0)_l = (2.67, 1.48, 0, 4.5) \\ (\rho/\rho_0, u_1/u_0, u_2/u_0, p/p_0)_m = (1, 0, 0, 1) \\ (\rho/\rho_0, u_1/u_0, u_2/u_0, p/p_0)_r = (0.138, 0, 0, 1) \end{cases}$$

图 5 给出了不同时刻激波和交界面运动发展情况的密度场图. 当激波穿过交界面时, 随即产生一个向左运动的反射稀疏波和一个向右运动的穿透激波, 在右行穿透激波的催促下, 交界面向下游运动, 而且扰动振幅变小 (见图 5 中 $t=0.112$ ms 的时刻). 随后, 在激波作用下, 交界面的振幅一直减小到 0, 然后朝相反方向增加, 发生峰谷转换, 该现象是激

波由重气体入射到轻气体时最显著的特征. 由于受到 RM 不稳定性的影响, 交界面的扰动不断发展, 重流体和轻流体相互浸入对方, 重流体发展成为尖钉, 轻流体发展成为气泡 (见图 5 中 $t=0.3$ ms 的时刻). 最终, 由于受到斜压效应的影响^[4], 尖钉头部形成翻转的蘑菇头形状 (见图 5 中 $t=0.6$ ms 的时刻).

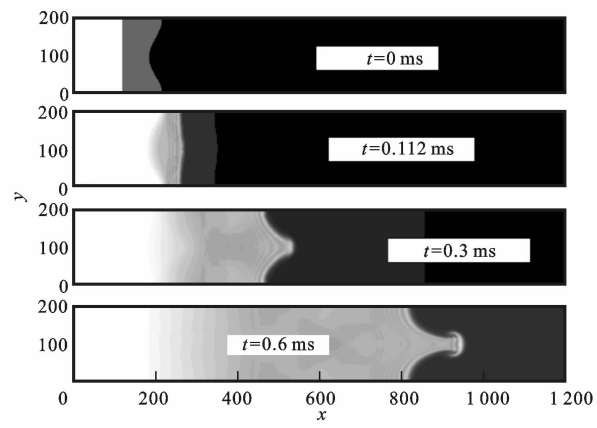


图 5 Air-He 例子不同时刻的密度场图

图 6 为 Ma 分别为 2.0 和 2.5 两种情况下的扰动振幅随时间的变化曲线. 从图 6 可看到, 当激波由 Air 区向 He 区运动时, 交界面的振幅首先出现了负增长, 直到振幅变为 0. 随后, 发生峰谷转换, 扰动振幅在 RM 不稳定性影响下呈正增长. 同时, 通过比较两种 Ma 下的扰动振幅, 可以看出 Ma 越大, 扰动振幅增长得越快即扰动增长率越大. 这是由于在 RM 不稳定性后期, 形成气泡和尖钉结构, 气泡的增长速度只与平均波长和时间有关, 而尖钉的增长速度与扰动振幅的初始增长速度成正比. 显然, Ma 越大, 扰动振幅的初始增长速度越大, 导致尖钉的增长速度变大, 从而整个扰动振幅增长得越快. 同时, 通过比较图 4a 和图 6 还可以看出, 图 6 扰动过程所需的时间短, 其扰动振幅的变化要远快于图 4a. 这主要是由于激波穿过气体界面时, Air-He 界面驱动

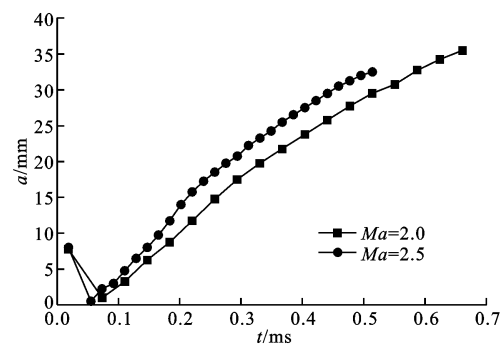


图 6 Air-He 例子的扰动振幅随时间的变化

流体的速度 ($u_1/u_0 = 1.48, Ma = 2.0$) 远大于 Air-SF₆ 界面驱动流体的速度 ($u_1/u_0 = 0.36, Ma = 1.2$), 因而 Air-He 界面获得的加速度比较大, 所以其扰动振幅随时间发展得越快。

图7为数值模拟的 Ma 为 2.0 时扰动增长率与 Zhang-Shon 非线性理论模型^[13] 的对比图, 可以看出, 在完成峰谷转换后, 模拟的扰动增长率与非线性理论模型变化趋势相接近。

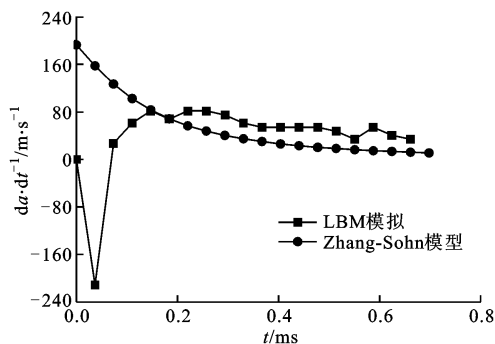


图7 Air-He 例子的扰动振幅增长率随时间的变化

3 结 论

(1) 本文采用耦合的双分布函数格子 Boltzmann 方法模拟了 RM 不稳定性现象, 获得了与理论预测模型相吻合的结果, 表明该方法能够应用于 RM 不稳定性的研究。

(2) 当激波由 Air 入射到 SF₆ 时, 扰动振幅经历了一段负增长, 接着快速增长。

(3) 当激波由 Air 入射到 He 时, 扰动振幅经历了负增长、峰谷转换和快速增长, 并且当激波 Ma 增加时, 扰动振幅增长率升高。

(4) 从模拟结果可以看出, 在两种情形下出现了相同的现象, 即随着交界面扰动不断发展, 轻流体形成泡状结构, 重流体形成尖钉结构, 尖钉最终翻转成蘑菇头形状。扰动振幅增长率与 Zhang-Sohn 非线性理论结果基本吻合。

参考文献:

- [1] RICHTMYER R D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids[J]. Communications on Pure Applied Mathematics, 1960, 13(2): 297-319.
- [2] MESHKOV E E. Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave[J]. Fluid Dynamics,

1969, 4(5): 101-104.

- [3] VETTER M, STURTEVANT B. Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability of an air/SF₆ interface[J]. Shock Waves, 1995, 4(5): 247-252.
- [4] 严长林, 孙德军, 尹协远, 等. Richtmyer-Meshkov 不稳定性的数值模拟[J]. 计算物理, 2001, 18(1): 27-32.
- YAN Changlin, SUN Dejun, YIN Xieyuan, et al. Numerical simulations of Richtmyer-Meshkov instabilities[J]. Chinese Journal of Computation Physics, 2001, 18(1): 27-32.
- [5] HOLMES R L, GROVE J W, SHARP D H. Numerical investigation of Richtmyer-Meshkov instability using front-tracking[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1995, 301: 51-64.
- [6] CHEN Feng, XU Aiguo, ZHANG Guangcai, et al. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann approach to Richtmyer-Meshkov instability[J]. Communications in Theoretical Physics, 2011, 55(2): 325J334.
- [7] JIN C, XU K. An adaptive grid method for two-dimensional viscous flows[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 218(1): 68-81.
- [8] CHEN Feng, XU Aiguo, ZHANG Guangcai, et al. Highly efficient lattice Boltzmann model for compressible fluids; two-dimensional case[J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 52(4): 681-693.
- [9] LI Qing, HE Yaling, WANG Yong, et al. Coupled double-distribution-function lattice Boltzmann method for the compressible Navier-Stokes equations [J]. Physical Review E, 2007, 76(6): 056705.
- [10] PUPPO G, PIERACCINI S. Implicit-explicit schemes for BGK kinetic equations [J]. Journal of Scientific Computing, 2007, 32(1): 1-28.
- [11] GUO Zhaoli, ZHENG Chuguang, SHI Baochang. Non-equilibrium extrapolation method for velocity and pressure boundary conditions in the lattice Boltzmann method[J]. Chinese Physics, 2002, 11(4): 366-374.
- [12] JOURDAN G, HOUAS L. High-amplitude single-mode perturbation evolution at the Richtmyer-Meshkov instability[J]. Physical Review Letters, 2005, 95(20): 204502.
- [13] ZHANG Q, SOHN S I. Nonlinear theory of unstable fluid mixing driven by shock wave[J]. Physics of Fluids, 1997, 9(4): 1106-1124.

(编辑 荆树蓉)