

DOI: 10.7652/xjtuxb201403021

弹性动力学瞬态问题的频域边界元快速解法

荣俊杰¹, 尤军峰², 文立华¹, 校金友¹

(1. 西北工业大学航天学院, 710072, 西安; 2. 中国航天科技集团公司四院四十一所
固体火箭发动机燃烧、热结构与内流场国防科技重点实验室, 710025, 西安)

摘要: 为解决常规基于离散傅里叶变换的频域边界元法难以解决无阻尼和低阻尼系统瞬态分析的问题, 将指数窗口法与频域边界元法相结合, 并采用预校正快速傅里叶变换(pFFT)方法加速边界元求解。为进一步提高分析效率, 针对频域边界元法所形成的系列线性方程组, 提出了一种最小二乘外推法以获得较高精度的迭代初值, 可使初始解残差小于 10^{-2} , 从而显著减少了迭代次数; 将新型的子空间回收算法用于频域系列线性方程组的求解, 加快了方程组的迭代收敛速度。算例表明, 所提出的方法可显著减少频域边界元法的迭代次数, 从而提高了计算效率, 并有效降低了迭代解法的内存消耗。

关键词: 弹性动力学; 边界元法; 迭代解法; 子空间回收

中图分类号: O353.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)03-0115-06

A Fast Frequency Domain Boundary Element Method for Transient Elastodynamic Analysis

RONG Junjie¹, YOU Junfeng², WEN Lihua¹, XIAO Jinyou¹

(1. College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. National Key Laboratory of Combustion, Flow and Thermo-Structure, The 41st Institute of the Forth Academy of CASC, Xi'an 710025, China)

Abstract: The conventional frequency-domain boundary element method (BEM) based on discrete Fourier transform is difficult to complete transient analysis of low damped and undamped systems. To solve this problem, the exponential window method is combined with the frequency-domain BEM, and the precorrected fast Fourier transform (pFFT) is used to accelerate the frequency-domain BEM analysis. For solving the sequence of linear systems corresponding to the sampling frequencies with higher efficiency, an extrapolation method is proposed to obtain good initial guesses. In addition, a newly developed Krylov subspace recycling method is employed to solve this sequence of linear systems. Numerical examples demonstrate a dramatic reduction of iterations, which leads to higher efficiency and smaller memory consuming.

Keywords: elastodynamics; boundary element method; iterative method; Krylov subspace recycling

弹性动力学的波动方程是研究固体中机械波传播的理论基础, 它的数值求解是力学、材料学、岩土工程学、地震学等众多学科和工程领域的关键问题。

边界元方法是一种重要的工程数值方法, 它在弹性动力学波动方程的数值求解中也得到了广泛的应用^[1]。

弹性动力学问题的边界元分析有3种基本途径^[2]:一是时域边界元法,它采用时域基本解,同时在时间域和空间域进行离散求解;二是边界-区域积分方法,它采用差分法离散时间导数项,再利用弹性静力学基本解获得原问题对应的边界-区域积分方程;三是频域边界元法,它通过拉普拉斯或傅里叶变换将时域问题转化为频域中的椭圆边值问题,采用边界元法来求解,再通过逆变换获得时域解。前2种方法存在时域积分的稳定性问题,目前仍是国际研究的热点。最近,时域卷积求积法被用于时域边界元分析中,可以改善时间积分稳定性问题,但其求解效率仍需进一步研究改进^[3]。边界-区域积分方法需要计算体积分,可以采用对偶互易法、径向积分法等,但计算量远比边界积分的大。

频域边界元法是一种较为简便的动力学边界元分析方法,它将时域问题转化为若干个相互独立的频域问题来求解,编程实现简便,适合于并行计算,并可以同时满足动力学系统频域和时域分析的需要,因此受到研究者的广泛关注^[4]。但是,当频域边界元法用于无阻尼或低阻尼系统的分析时,时域响应的误差很大甚至得不到正确的结果,这是由离散傅里叶变换的周期性引起的。文献[5]采用指数窗口法(EWM)有效地解决了上述问题,并采用预校正快速傅里叶变换(pre-corrected FFT,简称pFFT)方法对频域边界元法进行了加速,大大提高了弹性动力学边界元分析的效率。

本文旨在进一步提高频域边界元法求解弹性动力学波动问题的计算效率。在频域边界元法中,对于每个采样频率 ω_k 求解一个线性方程组 $\mathbf{A}(\omega_k) \cdot \mathbf{x}(\omega_k) = \mathbf{b}(\omega_k)$,目前这些方程组是采用迭代方法独立求解的。由于频域边界元法形成的系数矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 和右端向量 $\mathbf{b}(\omega)$ 都是频率 ω 的光滑函数,所以解向量 $\mathbf{x}(\omega)$ 可以用关于 ω 的有理函数较好地逼近。据此,在解得 $\mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_{k-M}$, $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\omega_k)$ 之后,可以利用这些结果通过插值获得对 $\mathbf{x}_k$ 的迭代初值猜测,以减少求解迭代次数,节省求解时间。GCRO-DR^[6]是最近提出的一种求解系列线性方程组的算法,它利用子空间回收的思想重用上个线性方程组的求解信息,因此特别适用于求解系数矩阵光滑变化的序列方程组。本文在文献[5]的基础上,提出了解向量 $\mathbf{x}(\omega)$ 的有理插值函数外插方法,并将GCRO-DR算法用于频域边界元线性方程组的求解,算例证明本文方法可以显著减少迭代次数。

1 改进的动力学频域边界元法

设弹性区域为 Ω ,其边界为 Γ 。弹性动力学问题的频域边界积分方程为

$$c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x},\omega) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)u_j(\mathbf{y})d\Gamma_y = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)\sigma_j(\mathbf{y},\omega)d\Gamma_y, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (1)$$

式中: ω 为角频率; c_{ij} 为自由项; u_j 和 σ_j 分别为边界位移和力; U_{ij} 和 T_{ij} 分别为频域弹性动力学基本解;左边的积分为Cauchy主值积分。设畸变波和膨胀波速度分别为 c_p 和 c_s ,波数为 k_p 和 k_s 。 U_{ij} 和 T_{ij} 的表达式以及积分方程(1)相对应的边界条件可参见文献[2]。

将边界 Γ 划分为 N_e 个三角形单元,采用常元离散边界积分方程(1)并考虑边界条件,可得线性方程组

$$\mathbf{A}(\omega)\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{b}(\omega) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{A}(\omega)$ 为 $N \times N$ 的系数矩阵, $N = 3N_e$; $\mathbf{b}(\omega)$ 为已知的 N 维列向量; $\mathbf{x}(\omega)$ 为包含未知位移和边界力的待求向量。

在频域边界元法中,首先在 N_ω 个采样频率 ω_k , $k = 0, 1, \dots, N_\omega - 1$ 上求解方程(2),得到频域响应 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\omega_k)$,再通过离散傅里叶逆变换(IDFT)得到时域响应 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 。由离散傅里叶变换(DFT)的周期性可知,在采样周期 T 之内时域响应 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 应衰减为零,否则采用IDFT就会引入较大的误差,甚至得不到正确的时域结果^[7]。通过对时域激励尾部补0的方法可以获得低阻尼系统的正确时域分析结果,但却减低了频域边界元分析的效率;另外,无阻尼系统无法采用此法获得时域响应。

为解决上述问题,文献[7]将数字信号处理领域中的指数窗口法(EWM)引入到结构动力学分析中。文献[5]将该方法与频域边界元法相结合,有效地解决了常规频域边界元法存在的上述问题。

指数窗口法的核心思想可以用图1来说明。设 $\hat{\mathbf{x}}(t) = \sin(2\pi t)$ 为系统某一点的时域响应,它在采样周期 $T = 3.4$ 内不是周期函数,因此采用直接常规频域边界元法无法获得正确的时域响应。指数窗口法通过引入指数窗函数 $e^{-\eta t}$ ($\eta > 0$)形成新的时域响应

$$\hat{\mathbf{x}}_{ew}(t) = e^{-\eta t} \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (3)$$

由于 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 为有界函数,总可以通过选择系数 η 而使函数 $\hat{\mathbf{x}}_{ew}(t)$ 在周期 T 内近似衰减为0。图1中绘出

了函数 $\hat{x}(t) = \sin(2\pi t)$ 、 $e^{-\eta t}$ ($\eta=1.5$) 以及 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$, 显然新函数 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$ 在 $t=3.4$ 时已经近似为 0。

由于 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$ 满足周期性要求, 用常规频域边界元法可以获得正确的时域解, 从而可以通过公式

$$\hat{x}(t) = e^{\eta t} \hat{x}_{\text{ew}}(t) \quad (4)$$

得到实际系统的时域响应。设 $\hat{x}(t)$ 的傅里叶变换为 $x(\omega)$, 则由式(3)可知, 函数 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$ 的傅里叶变换为 $x(\omega - i\eta)$, i 为虚数单位。因此, 新的频域边界位移和力仍满足边界积分方程(1)及有关边界条件, 只是频率 ω 需用 $\omega - i\eta$ 替换。

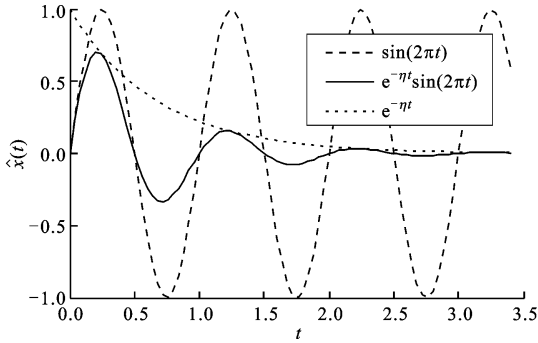


图1 指数窗口法示意图

设频率和时间分辨率分别为 $\Delta\omega$ 和 Δt , 则有

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = N_{\omega} \Delta t \quad (5)$$

改进的频域边界元法的基本求解过程如下。

(1) 设任意边界点处实际激励为 $\hat{P}(t)$, 则新激励为 $\hat{P}_{\text{ew}}(t) = e^{-\eta t} \hat{P}(t)$, 对 $\hat{P}_{\text{ew}}(t)$ 进行采样并进行 DFT, 得到频域边界激励

$$P_{\text{ew}}(\omega_k) = \frac{1}{N_{\omega}} \sum_{n=0}^{N_{\omega}-1} [e^{-\eta n \Delta t} \hat{P}(n \Delta t)] e^{-2\pi i n k / N_{\omega}} \quad (6)$$

式中: $\omega_k = k\Delta\omega - i\eta$; $k=0, 1, \dots, N_{\omega}-1$ 。

(2) 分别对前 $(N_{\omega}/2+1)$ 个频率 ω_k ($k=0, 1, \dots, N_{\omega}/2$) 求解边界积分方程(1), 获得频域响应 $x_{\text{ew}}(\omega_k)$, 并由频域响应的共轭对称性获得后 $(N_{\omega}/2-1)$ 个频率上的响应

$$x_{\text{ew}}(k) = x_{\text{ew}}^*(N_{\omega} - k), \quad k = N_{\omega}/2 + 1, \dots, N_{\omega} - 1$$

式中: $x_{\text{ew}}(k) = x_{\text{ew}}(k\Delta\omega - i\eta)$; x^* 表示 x 的复共轭。

(3) 对 $x_{\text{ew}}(\omega_k)$ 进行 IDFT, 获得时域响应 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$, 并由式(4)计算实际的时域响应 $\hat{x}(t)$, 即

$$\hat{x}(n\Delta t) = e^{\eta n \Delta t} \hat{x}_{\text{ew}}(n\Delta t) = e^{\eta n \Delta t} \sum_{k=0}^{N_{\omega}-1} x_{\text{ew}}(\omega_k) e^{2\pi i n k / N_{\omega}} \quad (7)$$

指数窗口法的效率和精度取决于参数 $\eta > 0$ 。一方面, 由式(3)可知 η 的值应尽可能大, 以保证加窗之后的新函数 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$ 在周期 T 内衰减得足够小,

从而减小 DFT 的离散误差, 同时, 增大参数 η 还可以改善式(2)中系数矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 的性态, 从而减少迭代求解方程组的迭代次数, 这是由于指数窗函数 $e^{-\eta t}$ 使矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 的元素衰减更快, 从而使 $\mathbf{A}(\omega)$ 的特征值更加集中; 另一方面, 由式(4)可以看出, 增大参数 η 会放大 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$ 的误差。针对本文的常元边界元分析, 文献[5]表明参数 η 可按式计算

$$\eta = \frac{\kappa \ln 10}{T} \quad (8)$$

式中: 文献[5]建议的系数 κ 的取值为 $\kappa \in [2, 3]$ 。基于上面的分析, 从提高边界元求解速度上考虑, 希望 κ 的值尽可能大一些, 而为保证时域结果的正确性, 又必须分析并尽量减小 $\hat{x}_{\text{ew}}(t)$ 的误差, 因此 κ 值又不能取得过大。

2 线性方程组的加速求解

频域边界元法的主要计算量是对采样频率 $\omega_k = k\Delta\omega - i\eta$ 求解系列方程组(2), 或写成

$$\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N_{\omega}/2 \quad (9)$$

式中: $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}(\omega_k)$; $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}(\omega_k)$ 。本文采用 pFFT 快速边界元法进行频域求解。下面将首先阐述快速边界元法与方程组迭代解法相结合的思想; 然后, 为进一步降低求解系列方程组(9)的计算量, 提出一种通过最小二乘外推得到迭代初值的方法; 最后, 采用一种新型系列方程组解法来加速迭代收敛速度。

2.1 迭代解法及 pFFT 加速方法

当方程组(9)的阶数 N 较大时, 通常采用迭代解法求解(详见 2.3 节)。迭代解法的核心是计算矩阵-向量积 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ 。直接计算 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的计算量与 N^2 成正比, 即计算量为 $O(N^2)$, 不适合大规模计算。近 20 多年来, 人们采用快速边界元法进行 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的加速计算, 取得了巨大成功。快速边界元法按照单元之间的距离, 将系数矩阵 $\mathbf{A}$ 分解为近场和远场部分

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{near}} + \mathbf{A}_{\text{far}} \quad (10)$$

近场矩阵 $\mathbf{A}_{\text{near}}$ 通常由 $\mathbf{A}$ 中距离较近的单元对应的元素构成, 远场矩阵 $\mathbf{A}_{\text{far}}$ 由剩余的元素构成。由基本解的光滑性可知, $\mathbf{A}_{\text{far}}$ 存在某种形式的数值稀疏近似 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{far}} \approx \mathbf{A}_{\text{far}}$, 其近似误差是可控的。数值稀疏意味着 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{far}} \mathbf{x}$ 的计算量远小于 $\mathbf{A}_{\text{far}} \mathbf{x}$ 。例如, 通常 $\mathbf{A}_{\text{far}} \mathbf{x}$ 的计算量为 $O(N^2)$, 而 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{far}} \mathbf{x}$ 的计算量则为 $O(N^{\alpha} \log N)$, $\alpha \leq 1.5$ 。

目前, 发展较为完善的快速边界元法有快速多极法(FMM)、H-矩阵法、pFFT 法和小波压缩法等。不同方法获得 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{far}}$ 的途径不尽相同, 计算效率也差

异较大。在弹性动力学分析中,快速多极法已有应用^[4],但该方法实现复杂,计算开销较大。文献[5]将 pFFT 法用于弹性动力学问题的加速求解,实现简便,因此计算效率较高。算例表明,对 $N \sim O(10^5)$ 的问题, pFFT 法的计算效率仍高于 FMM 法。因此,本文求解方程组(9)仍采用 pFFT 加速方法,其实现细节可参见文献[5]。

2.2 外推法产生初始解

用迭代法求解方程组(9)时,需要给出迭代初值 $\mathbf{x}_k^{(0)}$ 。好的初值 $\mathbf{x}_k^{(0)}$ 可以有效减少迭代次数,从而降低计算时间。这里提出一种利用最小二乘外推产生初值 $\mathbf{x}_k^{(0)}$ 的方法。

由式(2)可知,解向量 $\mathbf{x}$ 是频率 ω 的函数。可进一步假设 $\mathbf{x}$ 是 ω 的光滑函数。一般地, $\mathbf{x}$ 关于 ω 并不是处处光滑的,但多数采样点附近的 $\mathbf{x}$ 仍是光滑的,因此该假设对多数采样频率 ω_k 仍是成立的,这将在第3节通过数值算例予以证明。

由于 $\mathbf{x}$ 是 ω 的光滑函数,当 ω 变化不大(即 $\Delta\omega$ 较小)时,临近的若干解 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\omega_k)$ 几乎是线性相关的。于是,第 k 个方程组的解 $\mathbf{x}_k$ 可以由前面 K 个解 $\mathbf{x}_{k-i} (i=1, 2, \dots, K)$ 的线性组合来获得,即

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^K y_i \mathbf{x}_{k-i} \quad (11)$$

式中: y_i 为待定系数,可以通过将式(11)代入方程组 $\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$, 由最小二乘法求得。令 $\mathbf{X}$ 为以前面 K 个解向量为列的矩阵

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{k-1} \quad \mathbf{x}_{k-2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k-K}]$$

并令 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T$, 则式(11)可写成

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (12)$$

分别用 $\mathbf{x}_{k-i} (i=1, 2, \dots, K)$ 和矩阵 $\mathbf{A}_k$ 相乘,可得矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{A}_k \mathbf{X}$ 。于是, $\mathbf{y}$ 是最小二乘问题

$$\min_y \|\mathbf{b}_k - \mathbf{S} \mathbf{y}\|$$

的解。采用 QR 分解方法,令 $\mathbf{QR} = \mathbf{S}$, 则 $\mathbf{y} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_k$ 。于是

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_k \quad (13)$$

实际上,由于 $\Delta\omega$ 不满足足够小的条件,而且 $\mathbf{x}$ 不一定是光滑函数,按式(13)得到的解 $\mathbf{x}_k$ 可能存在较大误差,但却可以作为一个较好的迭代初值,即令

$$\mathbf{x}_k^{(0)} = \mathbf{X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{b}_k \quad (14)$$

外推用到的临近解的数量 K 并非越多越好,因为一方面外推法的计算量与 K 成正比,另一方面 K 值大并不能改善式(14)中 $\mathbf{x}_k^{(0)}$ 的性能。在边界元计算中,通常取 $K=4$ 可获得最佳效率。

上述产生迭代初值的方法与所采用的迭代解法

无关。该方法在电磁场分析领域已有应用,但在边界元动力学分析中还未见采用。已有算例证明,用该方法获得的初始解残差在 10^{-2} 以下,可以显著减少总迭代次数。

2.3 系列线性方程组的高效解法

由以上基于系列方程组(9)的解向量之间的相关性,通过外推可以获得较好的初始解,从而有效减少迭代次数。实际上,方程组(9)的系数矩阵 $\mathbf{A}_k (k=0, 1, \dots, N_\omega/2)$ 之间也存在某种相关性(或相似性)。本文采用的 GCRO-DR 算法^[6]是一种基于子空间回收思想的系列线性方程组解法,它利用系列方程组中相邻系数矩阵 $\mathbf{A}_k$ 之间的相似性,每求解一个方程组,就从当前搜索空间中选择一个近似不变子空间作为“回收”子空间,将其继承到下一个方程组的解空间中。回收子空间中包含了与收敛相关的信息,可以加快下一个方程组的迭代收敛速度。

设 m 为解的搜索空间最大维数。解第 k 个方程时, GCRO-DR 首先在回收空间 $\text{range}(\mathbf{U}_s) (s < m)$, 为回收子空间的维数)中寻找近似解,然后执行 $(m-s)$ 步 Arnoldi 算法生成新的 Krylov 子空间 $\mathbf{V}_{m-s}$, 并在空间 $\text{range}(\mathbf{U}_s + \mathbf{V}_{m-s})$ 中寻找最优解,判断是否满足收敛条件,若满足则进入下一个方程的求解,否则重新启动。同时,在搜索空间 $\text{range}(\mathbf{U}_s + \mathbf{V}_{m-s})$ 中选择下一次求解回收子空间。文献[6]建议,选取与最小的 s 个调和 Ritz 值所对应的调和 Ritz 向量所张成的空间作为回收空间。

在频域边界元法中,随着频率的增大,解方程组(9)所需的迭代次数也会增加。在 GCRO-DR 算法中,从第 $(i-1)$ 个方程继承的回收子空间 $\mathbf{U}_s$ 在用于求解第 i 个方程时,要计算 $\mathbf{A}_i \mathbf{U}_s$, 导致额外的 s 次矩阵向量乘法运算,限制了回收子空间的维数 s 。尤其当频率较小、总迭代次数不大时, $\mathbf{A}_i \mathbf{U}_s$ 的额外计算量可能抵消子空间回收的优势。如果选择较小的 s , 则在高频时不能回收足够的信息,会影响子空间回收的效率。为此,本文提出根据总迭代次数来动态调整 s 的大小,即选取 s 为当前方程组总迭代次数的 β 倍。大量数值算例表明, β 的取值大致在 $0.15 \sim 0.25$ 之间时,子空间回收的效率较高。 s 过大会使内存和每步迭代的计算量增大,因此应限定其上限 s_m 。

3 算例

采用文献[5]中的算例1和算例2来验证本文方法的计算精度和效率。分别采用3种线性方程组

迭代解法:①全局 GMRES 算法^[8](使用外推法求初值);②GCRO-DR 算法(初值为零向量);③本文算法(采用 GCRO-DR 算法,用外推法求初值)。

将 GCRO-DR 算法和本文算法进行对比,可体现外推法的效率。全局 GMRES 算法是求解单个线性方程组时收敛速度最快的算法,将它与 GCRO-DR 算法进行比较,可进一步验证子空间回收的优势。所有计算中均使用对角块矩阵对系数矩阵进行预处理。

算例 1 阶跃载荷下的棱柱

如图 2 所示,棱柱长度 $L=3\text{ m}$,左端固定,用阶跃载荷 $p(t)$ 加载, $p_0=-1\text{ MN/m}^2$ 。令泊松比为 0,弹性模量 $E=211\text{ GPa}$,密度 $\rho=7.85\text{ Mg/m}^3$ 。计算中,将柱体表面划分为 3 200 个单元。采样周期 $T=0.015\text{ 5 s}$,采样点数 $N_\omega=120$, $\kappa=3.0$ 。GCRO-DR 算法的参数 $m=70$, $s_m=20$,外推法的参数 $K=4$,收敛误差为 1×10^{-7} 。

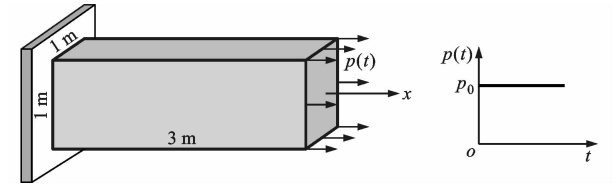


图 2 阶跃载荷下的棱柱棒

首先考察本文算法的精度。在设定泊松比为 0 的条件下,此问题具有解析解^[5]。图 3 给出了固定端应力随时间的变化关系。与解析解对比,本文方法得到的数值解与之基本一致。

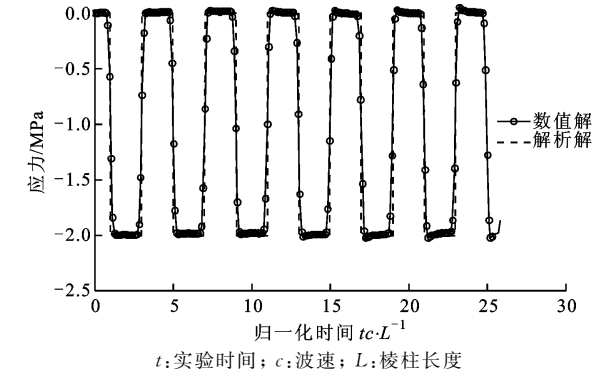


图 3 固定端应力随时间的变化关系

为验证本文提出的参数 k 选取方法的合理性,分别取 $s=5,25$ 和 $\beta=0.2$,使用本文算法进行计算,得到迭代次数随频率的变化曲线,如图 4 所示。当 s 取 5 时,在高频范围内迭代次数较多,而当 s 取 20 时,在低频范围内迭代次数较多。只有当 $\beta=0.2$ 时,在全部频域范围内迭代次数都基本处于最低水平。

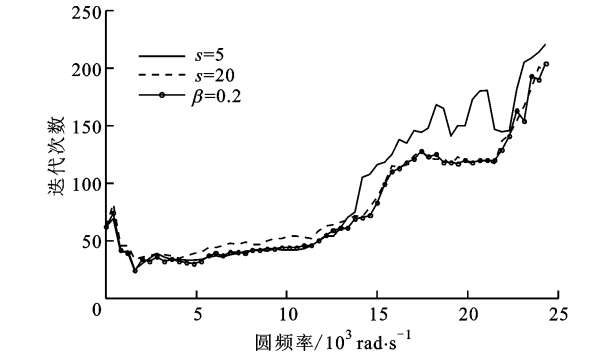


图 4 本文算法的迭代次数随频率的变化曲线

为验证本文算法的效率,分别用上述 3 种算法对算例进行计算,表 1 给出了 3 种算法的总迭代次数。与全局 GMRES 算法相比,本文算法的迭代次数有所减少,但减少量有限,这是由于本文算法所使用的 GCRO-DR 算法在本质上是对重启型 GMRES 的改进。随着迭代次数的增加,全局 GMRES 算法的内存消耗及每步迭代的计算量都会增大。表 1 列出的内存使用情况表明,本文算法的内存消耗小于全局 GMRES 算法的消耗。与 GCRO-DR 算法相比,本文算法由于使用了本文提出的外推法计算迭代初值,明显减少了迭代次数。

表 1 3 种算法计算算例 1 的总迭代次数和内存占用量

算法	求解所有方程的总迭代次数	占用内存 /MB
全局 GMRES 算法	5 515	24.8
GCRO-DR 算法	6 487	17.8
本文算法	4 802	18.6

算例 2 冲击载荷作用下的带孔平板

通过一个更实际的问题来验证本文算法的精度和效率。图 5 给出了一铝制平板结构的尺寸、载荷分布以及约束情况。铝板的材料参数分别为: $E=$

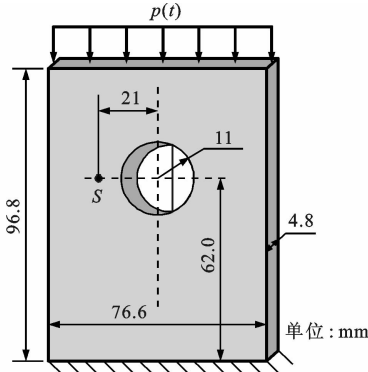


图 5 冲击载荷下的带孔平板

