

DOI: 10.7652/xjtub201311011

矩形微悬臂梁的流固耦合谐振频率分析

赵立波¹, 徐龙起¹, 热合曼艾比布力², 张桂铭¹, 王鸿雁³, 秦宇³, 刘志刚⁴, 赵玉龙¹, 蒋庄德¹

(1. 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安; 2. 新疆交通职业技术学院汽车与机电工程学院, 831401, 乌鲁木齐; 3. 陕西省计量科学研究院, 710065, 西安; 4. 西安交通大学热流科学与工程教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了得到矩形微悬臂梁的谐振频率与流体密度的理论关系式,建立了微悬臂梁与流体的耦合振动微分方程。通过叠加微悬臂梁的真空振型替代微悬臂梁的流固耦合振型,将流体对微悬臂梁的影响转换为流体动压力,利用真空振型的正交性对振动微分方程进行求解,从而得到悬臂梁谐振频率与流体密度的函数关系。在此基础上,对浸没于10~30℃正庚烷和异辛烷中的单晶硅微悬臂梁的谐振频率进行理论计算、仿真分析和实验测量,将谐振频率的理论计算值分别与仿真和实验值进行比较,结果表明:理论值和仿真值的绝对偏差低于2.8%,理论值和实验值的绝对偏差低于0.9%,验证了悬臂梁的流固耦合谐振频率与流体密度理论关系式的正确性,为流体密度的测量和传感器尺寸的微型化提供了理论基础和参考依据。

关键词: 流固耦合;微悬臂梁;密度;谐振频率

中图分类号: TP212 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)11-0060-05

Resonant Frequency of the Rectangular Micro-Cantilever in Fluid-Structure Interaction

ZHAO Libo¹, XU Longqi¹, RAHMAN Hebibul², ZHANG Guiming¹, WANG Hongyan³,
QIN Yu³, LIU Zhigang⁴, ZHAO Yulong¹, JIANG Zhuangde¹

(1. State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. School of Automotive Mechanical and Electrical Engineering, Xinjiang Vocational & Technical College of Communications, Urumqi 831401, China; 3. Shaanxi Institute of Metrology Science, Xi'an 710065, China; 4. Key Laboratory of Thermo-Fluid Science and Engineering of MOE, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To obtain the theoretical relationship between the resonant frequency of a rectangular micro-cantilever and the fluid density, the differential equation of the micro-cantilever coupled with fluid is established through the method of vacuum mode superposition instead of the fluid-structure interaction mode to obtain the fluid hydrodynamic pressure instead of the effect of fluid on the micro-cantilever. Then the equation is solved to acquire the function of the resonant frequency and fluid density by making use of the vacuum mode orthogonality. The resonant frequencies of silicon micro-cantilever chip immersed in the n-heptane and isooctane at 10-30℃ are calculated and compared with simulation values and experimental measurements. The absolute deviations of the calculation values of the resonant frequency from the simulation and experimental values get less than 2.8% and 0.9%, respectively. The theoretical formula can

收稿日期: 2013-03-26。 作者简介: 赵立波(1978—),男,副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51375378, 50836004, 90923001);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012jdgz08);国家工信部科技重大专项项目(2011ZX04004-061);教育部长江学者和创新团队发展计划资助项目(IRT1033);教育部科学研究重大项目(311001);高等学校学科创新引智计划项目(B12016);陕西省科学技术研究发展计划项目(2012KJXX-01)。

网络出版时间: 2013-09-06

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130906.1705.011.html>

accurately describe the relationship between the resonant frequency of the rectangular micro-cantilever and the fluid density, which facilitates fluid density measurement and sensor miniaturization.

Keywords: fluid-structure interaction; micro-cantilever; density; resonant frequency

微悬臂梁与流体的耦合振动特性在传感器领域中具有广泛的应用,例如利用微悬臂梁与流体耦合的谐振频率和品质因子测量流体的流动速率^[1]、密度和黏度等热物性数据^[2-4],分析悬臂梁表面的化学黏附作用^[5]。Jeong 等人采用瑞利-里兹法对部分浸没于流体中的薄壁圆筒进行了模型建立和模态提取的工作^[6]。Aldo 等人采用测量应变的方法对悬臂梁的谐振频率进行了分析^[7],Kozlovsky 采用能量法对悬臂梁的动态特性进行了分析^[8],Tikeswar 等人对 10 mm×1 mm×0.5 mm 尺寸相对较大的细长梁在不同黏度的流体中进行了动态响应分析^[9]。然而,薄壁圆筒的生产制造工艺相对于微悬臂梁的生产制造工艺较为复杂,不利于在工程中进行广泛的应用。当悬臂梁的宽度和厚度相同时,悬臂梁越长,谐振频率越低,悬臂梁的灵敏度也越低^[10]。同时,微悬臂梁在高阶谐振时的振动幅值相对一阶谐振时的振动幅值较小,不易于检测。为了利用长宽比小于 1 的矩形微悬臂梁来测量流体密度,本文根据力平衡原理采用振型叠加法,对一端固定一端自由的矩形微悬臂梁(长宽比小于 1)的一阶谐振频率与流体密度理论关系式进行了推导,运用 ANSYS 软件对微悬臂梁在不同密度的正庚烷和异辛烷中的谐振频率进行了仿真分析。通过实验测量,得到了微悬臂梁在不同密度的正庚烷和异辛烷中的谐振频率实验值。

1 流固耦合的理论分析

当微悬臂梁周围流体的区域大于悬臂梁的尺寸时,附加流体阻尼对微悬臂梁的谐振频率产生的影响远远小于附加质量产生的影响^[9],本文中微悬臂梁的尺寸相对流体区域较小,因此附加流体阻尼对谐振频率的影响可以忽略不计。另外,本文仅研究微悬臂梁与流体在常压下的耦合作用,因此可以假设流体是不可压缩的。

1.1 流体的速度势函数

如图 1 所示,对于连续匀质流体,在流体区域范围内任意一点处的流体速度势函数 Φ 均满足二维拉普拉斯方程

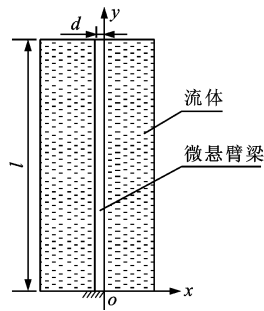
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Φ 满足以下边界条件

$$y = 0, \quad \partial \Phi / \partial y = 0; \quad y = l, \quad \partial \Phi / \partial t = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2)$$

式中: U 为微悬臂梁在 x 方向上的位移。式(2)表示微悬臂梁的振动速度和微悬臂梁表面处的流体振动速度相同。



d :厚度; l :长度

图 1 微悬臂梁与流体的耦联振动二维模型

将流体势函数的试探函数^[11]表示为

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) f(x) \right) \quad (3)$$

式中: $\dot{q}_n$ 为广义速度; $f(x)$ 为 x 的函数,可通过式(1)确定。将式(3)代入式(1)中,得

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \left(\frac{\pi s}{2l}\right)^2 f(x) = 0 \quad (4)$$

式(4)的通解为

$$f(x) = P e^{-\pi s x / 2l} + Q e^{\pi s x / 2l} \quad (5)$$

式中: P 、 Q 为待定常数。当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\Phi(x, y, t) \rightarrow 0$, 即 $f(x) \rightarrow 0$, 则 $Q=0$, 即

$$f(x) = P e^{-\pi s x / 2l} \quad (6)$$

将式(6)代入式(3)中,得流体势函数的具体表达式为

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) P e^{-\pi s x / 2l} \right) \quad (7)$$

将 $U(y, t)$ 用悬臂梁的流固耦合振型 $X_n(y)$ 和广义坐标 q_n 展开,得

$$U(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(y) \quad (8)$$

为求得 P , 将式(7)、(8)代入到式(2)中,得

$$P = -\frac{4}{\pi s} \int_0^l X_n(y) \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) dy \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)中,得速度势函数的最终表达式

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi s} e^{-\pi s x / 2l} \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) \cdot \int_0^l X_n(y) \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) dy \right) \quad (10)$$

1.2 悬臂梁的流固耦合谐振频率

由流体力学知识可知一点处的流体动压力^[12]为

$$p_p = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (11)$$

式中: ρ_f 为流体密度。若令微悬臂梁按一阶流固耦合振型 $X_1(y)$ 对圆频率 ω_1 作简谐振动^[11],则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n = -\omega_1^2 \quad (12)$$

为计算流体对微悬臂梁表面产生的流体动压力,取 $x=0$,则悬臂梁表面单位高度上的流体动压力为

$$p_l = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t}(2b) =$$

$$2b\rho_f\omega_1^2 \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{\pi s} \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) \int_0^l X_1(y) \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) dy \quad (13)$$

式中: b 为悬臂梁的宽度。此时,微悬臂梁在流体中的振动微分方程应满足

$$EJ \frac{\partial^4 X_1(y)}{\partial y^4} - \omega_1^2 \rho_s A X_1(y) =$$

$$2b\rho_f\omega_1^2 \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi s} \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) \int_0^l X_1(y) \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) dy \right) \quad (14)$$

式中: A 为悬臂梁横截面面积; E 、 J 、 ρ_s 分别为悬臂梁的弹性模量、惯性矩和材料密度。将一阶流固耦合振型 $X_1(y)$ 按微悬臂梁在真空中的振型 $\bar{X}_k(y)$ 展开得

$$X_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{X}_k(y) \quad (15)$$

微悬臂梁在真空中的振型 $\bar{X}_k(y)$ 与相应的谐振频率 ω_{ok} 的关系如下

$$EJ \frac{\partial^4 \bar{X}_k(y)}{\partial y^4} = \omega_{ok}^2 \rho_s A \bar{X}_k(y) \quad (16)$$

$$EJ \frac{\partial^4 X_1}{\partial y^4} = \sum_{k=1}^{\infty} EJA_k \frac{\partial^4 \bar{X}_k}{\partial y^4} \quad (17)$$

将式(16)代入式(17)中,得

$$EJ \frac{\partial^4 X_1(y)}{\partial y^4} = \rho_s A \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{ok}^2 A_k \bar{X}_k(y) \quad (18)$$

将式(15)、(18)代入式(14)中,得

$$\rho_s A \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{ok}^2 A_k \bar{X}_k(y) - \omega_1^2 \rho_s A \cdot$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{X}_k(y) = 2b\rho_f\omega_1^2 \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi s} \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) \cdot \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^l \bar{X}_k(y) \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) dy \right) \quad (19)$$

利用振型的正交条件,得

$$\omega_{o1}^2 \rho_s A N_1 - \omega_1^2 \rho_s A N_1 = 2\rho_f b \omega_1^2 \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{\pi s} M_{1s}^2 \quad (20)$$

$$M_{1s} = \int_0^l \bar{X}_1(y) \cos\left(\frac{\pi s}{2l}y\right) dy$$

$$N_1 = \int_0^l \bar{X}_1^2(y) dy; \quad \beta_1 = 1.875 \text{ 1/l}$$

$$\bar{X}_1(y) =$$

$$\cos(\beta_1 y) - \text{ch}(\beta_1 y) - 0.734 \text{ 1}(\sin(\beta_1 y) - \text{sh}(\beta_1 y))$$

得到微悬臂梁在流体中的一阶谐振频率的表达式为

$$f_1 = \frac{1.758}{\pi(EJ)^{-1/2}} \left(\rho_s A l^4 + \frac{2A l^4 \rho_f}{dN_1} \sum_{s=1,3,5}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi s} M_{1s}^2 \right) \right)^{-1/2} \quad (21)$$

2 谐振频率的仿真分析和实验测量

2.1 谐振频率的仿真分析

本文采用 ANSYS 软件对矩形微悬臂梁 ($2\,500\,\mu\text{m} \times 1\,900\,\mu\text{m} \times 50\,\mu\text{m}$) 在不同密度的正庚烷和异辛烷中的一阶谐振频率进行了仿真分析。为便于观察流固耦合模型内部的微悬臂梁,将模型从中间剖开,中间区域代表微悬臂梁,周围区域代表流体,如图2所示。

为了与实验中微悬臂梁的材料一致,微悬臂梁采用硅材料,材料参数为:弹性模量 $E = 1.302 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho_s = 2\,330 \text{ kg/m}^3$,泊松比 $\sigma = 0.278\,3$ 。正庚烷和异辛烷在 $10 \sim 30\,^\circ\text{C}$ 内的流体密度 ρ_f 和声速 c 通过物性软件 Refprop 8.0 获得(见表1)。

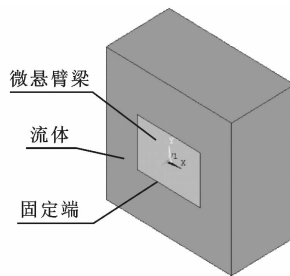


图2 微悬臂梁与流体的流固耦合有限元模型

微悬臂梁的固定端如图2所示。对流固耦合模型进行网格划分,并将与微悬臂梁单元相邻的流体单元设置为流固耦合单元(FSI),最后进行模态分析,即可得到微悬臂梁在正庚烷和异辛烷中不同温度下的谐振频率仿真值 f_s 。

表 1 正庚烷和异辛烷的密度和声速

$T/^{\circ}\text{C}$	正庚烷		异辛烷	
	$\rho_l/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$c/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$\rho_l/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$c/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
10	692.20	1 192.20	710.42	1 207.00
15	688.02	1 171.00	706.42	1 186.90
20	683.82	1 150.00	702.41	1 166.90
25	679.60	1 129.10	698.39	1 147.20
30	675.36	1 108.40	694.36	1 127.50

2.2 谐振频率的实验测量

矩形微悬臂梁芯片的实物照片如图 3 所示。微悬臂梁的宽度、长度、厚度为 $2\,500\,\mu\text{m}\times1\,900\,\mu\text{m}\times50\,\mu\text{m}$,微悬臂梁芯片由双面抛光硅片加工得到,硅片为(100)晶面,其材料参数 $E=1.302\times10^{11}\,\text{Pa}$, $\rho_s=2\,330\,\text{kg}/\text{m}^3$, $\sigma=0.278\,3^{[13]}$ 。

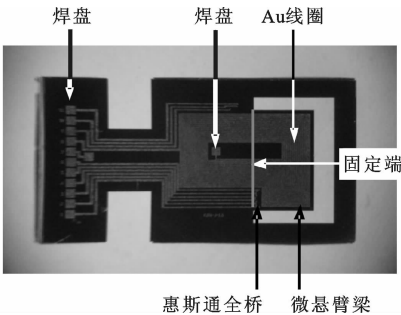
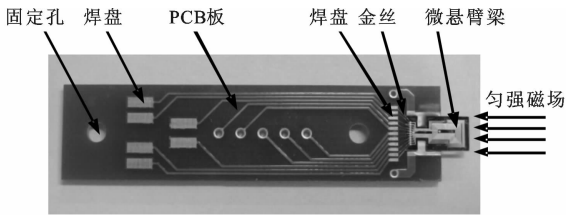


图 3 矩形微悬臂梁芯片的实物照片

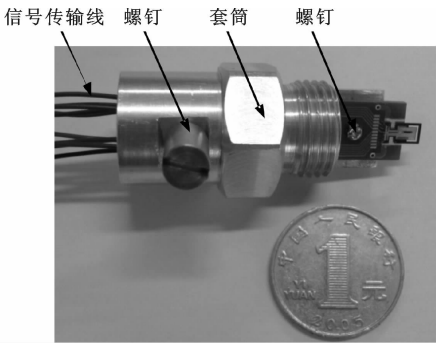
矩形微悬臂梁芯片的封装结构如图 4a 所示,使用 DG-3 环氧树脂胶将矩形微悬臂梁芯片封装在 PCB 板上,通过金丝将矩形微悬臂梁芯片上的焊盘和 PCB 板上的右焊盘进行连接,以方便在微悬臂梁上施加驱动电流和振动信号的采集。利用螺钉将 PCB 板固定在套筒上,如图 4b 所示。

矩形微悬臂梁的谐振频率是根据电磁激励、压阻检测的原理进行测量的。图 4a 中的匀强磁场由钕钴永久磁铁提供,通过信号发生器向微悬臂梁上的 Au 线圈提供频率不断变化的交变电流,使处于匀强磁场中的 Au 线圈产生方向不断变化的洛伦兹力,来驱动微悬臂梁不断振动,而通过惠斯通全桥输出的交变信号幅值也不断发生变化。当 Au 线圈中施加的交变电流的频率与微悬臂梁在流体中的谐振频率相同时,微悬臂梁的振动幅值达到最大,惠斯通全桥输出的交变信号幅值也最大。此时, Au 线圈中施加的交变电流的频率即为矩形微悬臂梁在流体中的谐振频率。

矩形微悬臂梁在流体中谐振频率的测量恒温工作环境由 Fluke 7008 恒温槽提供,其稳定性为



(a)矩形微悬臂梁芯片与 PCB 板的封装



(b)PCB 板与套筒的封装

图 4 矩形微悬臂梁芯片的封装结构

$0.000\,7\,^{\circ}\text{C}$ 。利用恒压源及恒流源转换电路为惠斯通全桥提供直流电流,用 SR830 锁相放大器测量惠斯通全桥输出的交变信号,通过 Agilent 函数信号发生器提供交变驱动电流,同时采用 PC 计算机及数据采集软件对锁相放大器测量得到的交变信号进行数据处理。

在常压下, T 为 $10\sim30\,^{\circ}\text{C}$ 时,对矩形微悬臂梁在正庚烷和异辛烷中的谐振频率进行了实验测量。在 $T=10\,^{\circ}\text{C}$ 时,微悬臂梁在正庚烷中的幅频曲线如图 5 所示,通过 Matlab 软件进行非线性拟合求解,即可得到谐振频率的实验值 f_e 。

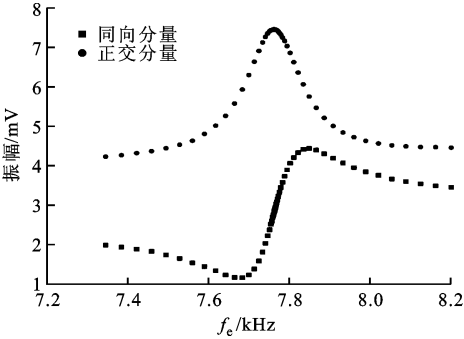


图 5 微悬臂梁在正庚烷中的幅频曲线

3 结果分析

将微悬臂梁的弹性模量、密度、泊松比及其宽度、长度、厚度,以及在 $10\sim30\,^{\circ}\text{C}$ 内的正庚烷和异辛烷密度值(见表 1)代入理论计算式(27)中,计算

得到谐振频率的理论值 f_t 。微悬臂梁材料的参数与尺寸参数和仿真、实验部分中用到的参数相同。将 f_t 分别与 f_s 、 f_e 进行比较,发现理论值与仿真值之间的绝对误差 e_1 小于 2.8%,理论值与实验值之间的绝对误差 e_2 小于 0.9%,如表 2、表 3 所示。

表 2 微悬臂梁在正庚烷中的谐振频率

$T/^{\circ}\text{C}$	f_t/Hz	f_s/Hz	f_e/Hz	$e_1/\%$	$e_2/\%$
10	7 772.925	7 562.20	7 802.052	2.711	0.373
15	7 791.391	7 580.80	7 806.002	2.703	0.187
20	7 810.078	7 599.50	7 813.004	2.696	0.037
25	7 828.990	7 618.50	7 821.365	2.689	0.097
30	7 848.131	7 637.70	7 832.418	2.681	0.201

表 3 微悬臂梁在异辛烷中的谐振频率

$T/^{\circ}\text{C}$	f_t/Hz	f_s/Hz	f_e/Hz	$e_1/\%$	$e_2/\%$
10	7 693.942	7 482.90	7 762.262	2.743	0.880
15	7 711.075	7 500.10	7 768.260	2.736	0.736
20	7 728.367	7 517.40	7 773.804	2.730	0.584
25	7 745.819	7 534.90	7 780.036	2.723	0.440
30	7 763.434	7 552.60	7 785.503	2.716	0.283

4 结 论

本文将流体对微悬臂梁的影响转换为流体动压力,采用振型叠加法推导了一端固定、一端自由的矩形微悬臂梁的流固耦合谐振频率与流体密度的理论关系式。运用 ANSYS 软件对浸没于正庚烷和异辛烷中的微悬臂梁进行了流固耦合模态分析,得到了谐振频率的仿真值。通过实验测量,得到微悬臂梁在正庚烷和异辛烷中的谐振频率实验值。将谐振频率的理论计算值分别与仿真值和实验值进行比较,发现绝对误差分别小于 2.8%和 0.9%。因此,推导出的公式可以准确地反映矩形微悬臂梁的谐振频率与流体密度的关系。在传感器领域中,通过实验测量得到微悬臂梁在流体中的谐振频率,利用谐振频率与流体密度的关系式,可以计算流体的密度,从而为流体密度的测量提供了理论基础。

参考文献:

[1] ETCHART I, CHEN H, DRYDEN P, et al. MEMS sensors for density-viscosity sensing in a low-flow microfluidic environment [J]. Sensors and Actuators; A, 2008, 141(2): 266-275.

[2] LI Hao, WANG Junbo, LI Xiang, et al. A novel micro-machined viscosity and density sensor based on resonant torsional paddle [C]//Browse Conference Publications Sensors. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 496-499.

[3] BRANDSTETTER S, RIESCH C, REICHEL E K, et al. Sensing viscosity and density with a micromachined suspended plate resonator [J]. Procedia Chemistry, 2009, 1(1): 1467-1470.

[4] WAUGH W H, GALLACHER B J, BURDESS J S, et al. A high-sensitivity resonant sensor realized through the exploitation of nonlinear dynamic behaviour [J]. Measurement Science and Technology, 2011, 22(10): 105202-105209.

[5] ZHANG Jiqiao, FENG Xiqiao, HUANG Ganyun, et al. Chemisorption-induced resonance frequency shift of a microcantilever [J]. Chinese Physics Letters, 2012, 29(5): 056801-056804.

[6] JEONG K H, LEE G M, KIMET T W. Free vibration analysis of a circular plate partially in contact with a liquid [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 324(1/2): 194-208.

[7] ALDO M, AGNESE C, SALVATORE P, et al. Modal analysis of a cantilever beam by use of Brillouin based distributed dynamic strain measurements [J]. Smart Materials and Structures, 2012, 21(12): 1-7.

[8] KOZLOVSKY Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: extension of Lamb's model [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326(1/2): 332-339.

[9] TIKESWAR N, ELLEN K L, SUSAN C M. Dynamic response of a cantilever in liquid near a solid wall [J]. Sensors and Actuators; A, 2003, 102(3): 240-254.

[10] LIAO H S, HUANG K Y, CHANG C S. Cantilever-based mass sensor using high order resonances for liquid environment [C]//2011 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM2011). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 652-655.

[11] 居荣初, 曾心传. 弹性结构与液体的耦联振动理论 [M]. 北京: 地震出版社, 1983: 223-227.

[12] 景思睿, 张鸣远. 流体力学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001: 80-82.

[13] FRANCA D R, BLOUIN A. All-optical measurement of in-plane and out-of-plane Young's modulus and Poisson's ratio in silicon wafers by means of vibration modes [J]. Measurement Science and Technology, 2004, 15(5): 859-868.

(编辑 管咏梅)