

DOI: 10.7652/xjtuxb201312011

一种高精度求解磁场积分方程的高阶矩量法

袁浩波¹, 高岫林¹, 李兵², 梁昌洪¹

(1. 西安电子科技大学天线与微波技术重点实验室, 710071, 西安; 2. 西安电子工程研究所, 710011, 西安)

摘要: 针对矩量法求解磁场积分方程时精度较差的问题,采用非均匀有理 B 样条(NURBS)建模的高阶矩量法求解磁场积分方程,采用 Duffy 变换消除自阻抗元素中的奇异性。对于相邻面片间互阻抗的近奇异性积分,首先采用一种简单的双曲函数变换消除内层面积分中 R^{-2} 形式的近奇异性,然后采用 Duffy 变换消除外层面积分中的对数奇异性,并通过准确地计算阻抗矩阵元素得到了一种高精度的矩量法。对两个闭合导体模型进行双站雷达散射截面(RCS)仿真计算,并分别与解析结果和电场积分方程的结果进行比较,研究结果表明该方法的误差不到 0.5 dB。这种高精度的磁场积分方程方法可以取代常用的混合场积分方程方法,并为下一步构造迭代收敛速度更快的新方法打下了良好的基础。

关键词: 矩量法;磁场积分方程;奇异性;雷达散射截面

中图分类号: TN011 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)12-0061-05

Higher Order Moment Method for Magnetic Field Integral Equations with High Accuracy

YUAN Haobo¹, GAO Shenlin¹, LI Bing², LIANG Changhong¹

(1. Science and Technology on Antenna and Microwave Laboratory, Xidian University, Xi'an 710071, China;

2. Xi'an Electronic Engineering Research Institute, Xi'an 710011, China)

Abstract: The magnetic field integral equations (MFIE) solved by moment methods (MOM) show low accuracy. A higher order moment method for solving the MFIE is introduced. Duffy transformation is chosen to cancel the singularities in the self-term impedances. As to the near singularities in the impedances of two neighboring patches, a hyperbolic function is adopted to cancel the R^{-2} near singularities in the inner surface integrals, and then another Duffy transformation is employed to cancel the logarithmic singularities in the outer surface integrals, thus a high accurate moment method is achieved. For two closed conducting models, the bistatic radar cross section (RCS) simulation by the proposed method is with error less than 0.5 dB. This method for MFIE can replace the commonly used one for combined field integral equations (CFIE), and may lay a foundation to construct new methods with higher convergence rate.

Keywords: moment method; magnetic field integral equation; singularity; radar cross section

矩量法根据基函数类型可以分为低阶矩量法^[1]和高阶矩量法^[2]两类。低阶矩量法求解电场积分方程和磁场积分方程的技术都已经成熟。在求解电大尺寸问题(如大型飞行器的散射问题)时,为了弥补前者迭代收敛性差以及后者精度较低的缺点,往往将两种积分方程线性叠加构成混合场积分方程^[3],

收稿日期: 2013-04-02。 作者简介: 袁浩波(1980—),男,副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61072018);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(K50511020032)。

网络出版时间: 2013-10-28 网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20131028.0834.001.html>

但是这种折中方法的精度一般不高。为了提高磁场积分方程的精度,在低阶矩量法中已经出现了大量针对奇异积分的改进工作^[4]。文献[5-7]给出了低阶矩量法中最经典的奇异性和近奇异性处理方法,但它们并未完全解决问题。文献[8-9]分析了磁场积分方程计算精度低的两种原因,认为需要进行立体角修正或者对外层奇异性进行分析。这些在低阶矩量法中采用的技术都是针对平面三角形建模设计的,无法直接移植到曲面片建模的高阶矩量法中。

高阶矩量法是一种新发展起来的算法,其优点是可以将未知数总数降低到低阶矩量法的1/10。但是,目前的高阶矩量法常用于求解电场积分方程,涉及高阶矩量法求解磁场积分方程的文献很少,其关键在于如何准确计算曲面片上的奇异性积分和近奇异性积分。本文在文献[10]的基础上,进一步将非均匀有理B样条(NURBS)建模的高阶矩量法用于求解磁场积分方程。文中不对积分方程做额外的修正,仅采用两种简单的积分变换就可以准确地提取内层曲面积分和外层曲面积分的奇异性,以获得高精度的雷达散射截面(RCS)结果。

1 理论

1.1 Bezier 面片的定义

在计算电磁学中,NURBS几何建模已经广泛应用于物理光学^[11]、一致性几何绕射理论^[12]以及高阶矩量法中。与最常见的三角形建模方法相比,其精度更高,由此大大减少了数值算法在几何建模阶段所引入的误差。在编程计算时,一般将NURBS面片转化为如图1所示的Bezier面片,其表达式为

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} \mathbf{r}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)} \quad (1)$$

式中: $B_i^n(t) = t^i (1-t)^{n-i} \frac{n!}{[i! (n-i)!]}$ ($0 \leq t \leq 1$)

为伯恩斯坦基函数; ω_{ij} 为权因子; $\mathbf{r}_{ij}$ 为控制点的坐

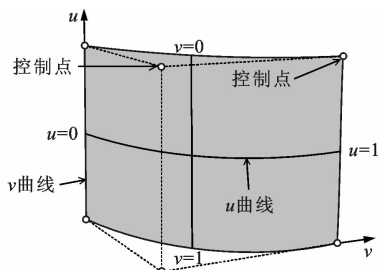


图1 一个Bezier面片

标。一般情况每个面片都是一个曲面四边形,表面电流可分解为 u 方向的分量和 v 方向的分量之和。

1.2 基函数的定义

对导体表面的未知电流进行展开时,选取文献[2]中的叠层高阶基函数

$$\mathbf{J}_S = (\mathbf{r}_{\partial u} \Gamma_u + \mathbf{r}_{\partial v} \Gamma_v) / |\mathbf{r}_{\partial u} \times \mathbf{r}_{\partial v}| \quad (2)$$

式中: $\mathbf{r}_{\partial u} = \partial \mathbf{r}(u, v) / \partial u$ 和 $\mathbf{r}_{\partial v} = \partial \mathbf{r}(u, v) / \partial v$ 代表某一点处参数曲线的两个切线方向,而多项式

$$\Gamma_u = \sum_{i=0}^{N_u} \sum_{j=0}^{N_v-1} \alpha_{ij} (2v-1)^j \cdot \begin{cases} 2-2u, & i=0 \\ 2u, & i=1 \\ (2u-1)^i - 1, & i \geq 2, \text{偶数} \\ (2u-1)^i - (2u-1), & i \geq 3, \text{奇数} \end{cases} \quad (3)$$

式中:曲面坐标参数 $0 \leq (u, v) \leq 1$; N_u 和 N_v 是每个面片上基函数的阶数; α_{ij} 就是需要求解的未知展开系数。 Γ_v 的定义式类似。

1.3 磁场积分方程

根据理想闭合导体表面的切向磁场等于表面电流,给出磁场积分方程

$$\mathbf{J}_S + \mathbf{n} \times \int_S \mathbf{J}_S \times \nabla G(R) ds' = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (4)$$

其中梯度运算是针对观察点进行的,且有 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 。由于格林函数的梯度 $\nabla G(R)$ 具有很强的奇异性,必须从左边第二项中分离出极限值 $-0.5\mathbf{J}_S$,得到

$$2\pi \mathbf{J}_S - \mathbf{n} \times \int_S \mathbf{J}_S \times \mathbf{R} \frac{1 + jkR}{R^3} e^{-jkR} ds' = 4\pi \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (5)$$

采用矩量法求解磁场积分方程,如果基函数和权函数分别处于如图2所示的面片 m 、 n 上,定义式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_n &= \Gamma_n(u_n, v_n) \mathbf{r}_{\partial n} / |\mathbf{r}_{\partial u} \times \mathbf{r}_{\partial v}| \\ \mathbf{W}_m &= \Gamma_m(u_m, v_m) \mathbf{r}_{\partial m} / |\mathbf{r}_{\partial u} \times \mathbf{r}_{\partial v}| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

那么得到矩阵方程

$$\mathbf{Z}_{nm} \mathbf{I}_n = \mathbf{V}_m \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_m = \int_m 4\pi (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^i) \cdot \mathbf{W}_m ds_m =$$

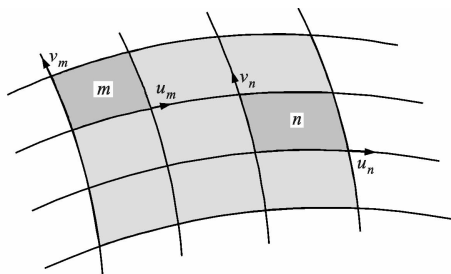


图2 第 m 个和第 n 个面片

$$\int_0^1 \int_0^1 4\pi(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^i) \cdot \mathbf{r}_{\partial m} \Gamma_m(u_m, v_m) du_m dv_m \quad (8)$$

$$Z_{nm} = \int_m 2\pi \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{W}_m ds_m -$$

$$\int_m \int_n (\mathbf{W}_m \times \mathbf{n}_m) \cdot (\mathbf{J}_n \times \mathbf{R}) \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} ds_n ds_m =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 2\pi \Gamma_m \mathbf{r}_{\partial m} \cdot \mathbf{r}_{\partial n} \Gamma_n du_m dv_m -$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\Gamma_m \mathbf{r}_{\partial m} \times \mathbf{n}_m) \cdot$$

$$(\Gamma_n \mathbf{r}_{\partial n} \times \mathbf{R}) \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} du_n dv_n du_m dv_m \quad (9)$$

式(9)虽然与电场积分方程的公式相似,但是奇异积分的处理比后者复杂得多。因为式(9)中不仅包括自作用阻抗的奇异性积分计算,而且包括相邻片之间的互作用阻抗的近奇异性积分计算。奇异性积分计算的难点在于式(9)后半部分的积分,其中矢量运算 $(\mathbf{r}_{\partial m} \times \mathbf{n}_m) \cdot (\mathbf{r}_{\partial n} \times \mathbf{R})$ 在奇异点 (u_m, v_m) 处产生一个二阶无穷小量,因此整个被积式事实上只有一个 R^{-1} 的奇异性,可以采用文献[10]给出的 Duffy 变换解决

$$u_n = u_m + x_n^3; \quad v_n = v_m + y_n^3 \quad (10)$$

1.4 近奇异性提取

磁场积分方程的积分核的奇异性远远强于电场积分方程,使得如图 3 所示的相邻两个面片之间的互阻抗也存在很强的奇异性,直接使用数值积分很难计算准确。该积分中需要同时处理两处奇异性,内层奇异性指的是对于第 n 片进行积分时有一个近奇异性积分,也就是当 m 片上的场点趋近于 n 片时,被积式中有 R^{-2} 形式的近奇异性。外层奇异性指的是,假定内层积分已经准确计算出来,那么积分结果在 m 片上邻近于公共边的地方还有 $\ln(R)$ 形式的弱奇异性^[8],需要采用 Duffy 变换解决。积分表达式为

$$Z = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\Gamma_m \mathbf{r}_{\partial m} \times \mathbf{n}_m) \cdot (\Gamma_n \mathbf{r}_{\partial n} \times \mathbf{R}) \cdot$$

$$\frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} du_n dv_n du_m dv_m \quad (11)$$

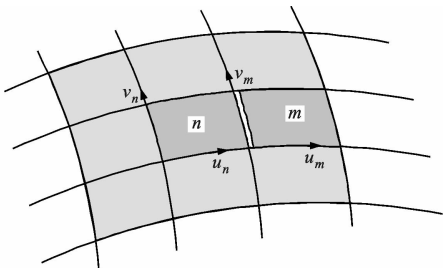


图 3 相邻片在公共边附近有近奇异性

在如图 4 所示的参数空间上考察这两个相邻面片,其中公共边为 $u_m = 0$ 的等参曲线。假定场点 $M(u_m, v_m)$ 到公共边的垂足点为 $H(u_{m0}, v_m)$,两点在几何空间的距离为 a ,而 H 在 n 片上的参数坐标为 (u_{nh}, v_{nh}) ,那么可以在这个点取双曲函数积分变换

$$u_n = u_{nh} + \text{ash}(x_n); \quad v_n = v_{nh} + \text{ash}(y_n) \quad (12)$$

积分上、下限为

$$\left. \begin{aligned} x_{n1} &= \text{arsh}(-u_{nh}/a); & x_{n2} &= \text{arsh}[(1-u_{nh})/a] \\ y_{n1} &= \text{arsh}(-v_{nh}/a); & y_{n2} &= \text{arsh}[(1-v_{nh})/a] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

此时变换的雅克比式为 $a^2 \text{ch}(x_n) \text{ch}(y_n)$ 。只要 M 点不在公共边上,式(11)就是一个近奇异积分问题,而通过式(12)转化出的被积式就是一个性态良好的函数,可以采用数值积分方法准确地计算。

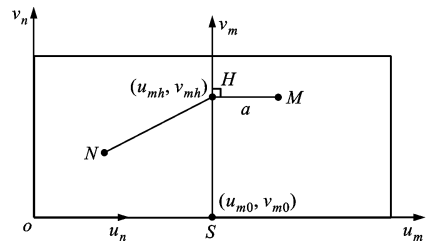


图 4 参数空间上相邻片的近奇异性处理

如果 M 点处于公共边上,那么内层积分的结果在 m 片上邻近于公共边的地方还有 $\ln R$ 形式的弱奇异性。奇异点就处于 m 片的公共边上,如图 4 中 m 片上的等参曲线 $u_m = u_{m0}$ 。为了编程方便,不妨取公共边上任意点 $S(u_{m0}, v_{m0})$ 作为 Duffy 变换的展开点

$$u_m = u_{m0} + x_m^3; \quad v_m = v_{m0} + y_m^3 \quad (14)$$

此时积分上、下限为

$$\left. \begin{aligned} x_{m1} &= -(u_{m0})^{1/3}; & x_{m2} &= (1-u_{m0})^{1/3} \\ y_{m1} &= -(v_{m0})^{1/3}; & y_{m2} &= (1-v_{m0})^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

同时进行内、外层的积分变换可以提取所有的奇异性,得到

$$Z = \int_{y_{m1}}^{y_{m2}} \int_{x_{m1}}^{x_{m2}} dx_m dy_m 9x_m^2 y_m^2 \cdot$$

$$\Gamma_m(\mathbf{r}_{\partial m} \times \mathbf{n}_m) \cdot \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} (\mathbf{r}_{\partial n} \times \mathbf{R}) \cdot$$

$$\Gamma_n \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR} a^2 \text{ch}(x_n) \text{ch}(y_n) dx_n dy_n \quad (16)$$

在计算时首先要确定外层积分的奇异点 $S(u_{m0}, v_{m0})$,接着根据外层积分点 $M(u_m, v_m)$ 来确定垂足点 H 和积分变换参数 a ,然后算出每个外层积分点 M 对应的内层积分值,最后计算外层的二重积

分即可得到准确的近奇异积分结果。

2 计算实例

下面,计算两个闭合导体模型的双站 RCS,定义 $\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 |E^s|^2 / |E^i|^2$, 通常取对数 $\sigma_{\text{dB}} = 10 \lg \sigma$, 其中激励平面波是沿着 $-z$ 方向入射 x 方向极化的 $E^i = x \exp(jkz)$ 。将本文方法记为 MFIE-HMOM, 文献[10]中电场积分方程的高阶矩量法记为 EFIE-HMOM, 导体球中 Mie 级数的解析结果记为 Mie, 文献[1]中低阶电场积分方程矩量法记为 EFIE-RWG。3 种矩量法中得到的矩阵方程都采用 LU 分解直接求解, 并以 360 个点的均方根误差来评估 RCS 结果的精度。

图 5 所示的导体球面半径为 1 m, 剖分为 96 个 Bezier 面片, 面片边长为 0.39 m。激励平面波的波长为 1 m。从表 1 可见, MFIE-HMOM 和 EFIE-HMOM 中都采用二阶基函数, 产生 768 个未知数; MFIE-HMOM 中填充阻抗矩阵消耗的计算时间是 EFIE-HMOM 的 3 倍左右。这是因为在矩量法分析小规模问题时, 奇异性阻抗计算时间占矩阵填充时间的大部分。在 EFIE-HMOM 中某一个面片只与它本身存在奇异性阻抗, 而在 MFIE-HMOM 中某一个面片上的奇异性阻抗通常包括一个自作用面片上的和 4 个相邻面片上的阻抗元素。从图 6 可见 3 种方法的 RCS 几乎重合, 表 1 显示 MFIE-HMOM

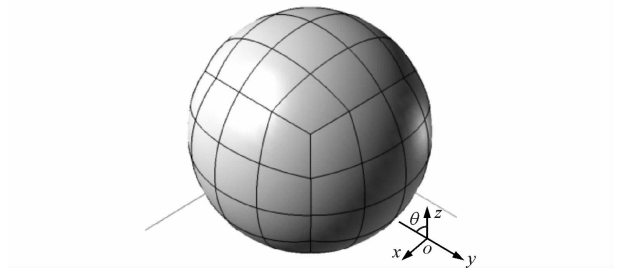


图 5 由 96 个 Bezier 面片构成的导体球

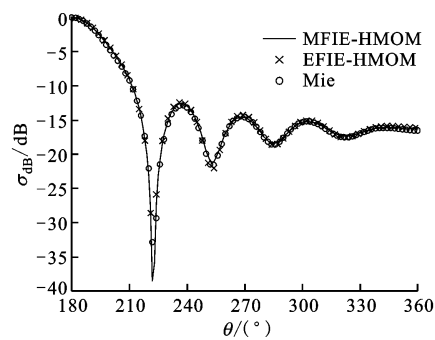


图 6 球在 xoz 面的双站 RCS

得到的 RCS 的误差为 0.26 dB, 虽然稍高于 EFIE-HMOM 的误差, 但这已经属于很低的误差了。

表 1 2 种方法计算导体球 RCS 的结果

方法	剖分 尺寸/m	未知 数	填充+LU 分解时间/s	RCS 误 差/dB
MFIE-HMOM	0.39	768	59+2	0.26
EFIE-HMOM	0.39	768	21+2	0.18

如图 7 所示的导弹模型, 长为 7 m, 翼展为 3.6 m, 剖分的面片最大边长为 0.26 m。激励平面波的波长为 0.5 m。从表 2 可见, MFIE-HMOM 和 EFIE-HMOM 都采用二阶基函数, 产生 6 176 个未知数, 约为低阶矩量法的 1/9。两种高阶方法的阻抗矩阵填充时间相差不大, 原因在于问题规模较大时, 非奇异性阻抗填充时间远远大于奇异性阻抗填充时间, 而两种方法的非奇异性阻抗的填充速度差不多。从图 8 可见 3 种方法的 RCS 差别很小, 表 2 显示 MFIE-HMOM 的 RCS 误差为 0.41 dB, 仅比 EFIE-HMOM 高 0.11 dB。也就是说, 高阶矩量法求解磁场积分方程时确实能够得到与求解电场积分方程精度相当的 RCS 结果, 此时不到 0.5 dB 的误差可以满足多数工程实际的要求。

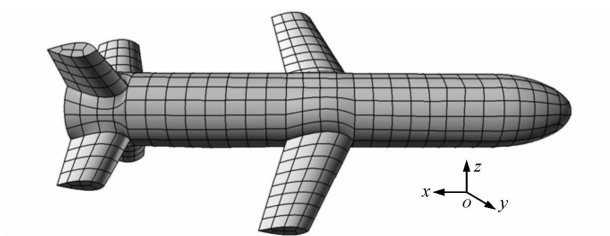


图 7 由 772 个 Bezier 面片构成的导弹

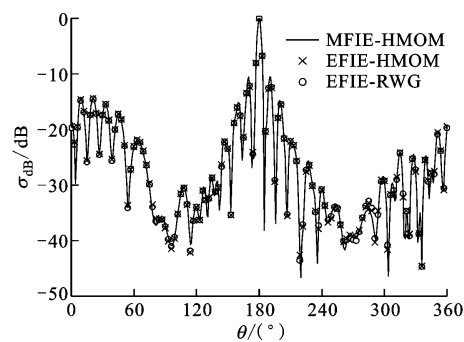


图 8 导弹在 xoz 面的双站 RCS

从表 2 最后一行看, 大规模的矩阵方程在采用 LU 分解求解时耗费的时间极长, 因此一般采用迭代算法求解, 此时迭代算法消耗的时间占算法总时

间的大部分。图 9 给出了共轭梯度法^[13]求解矩阵方程时的收敛情况,可见 MFIE-HMOM 的收敛速度远快于 EFIE-HMOM。由于本文方法的精度足够满足工程要求,没有必要用电场积分方程弥补,因此它完全可以取代通常使用的混合场积分方程。

表 2 3 种方法计算导弹 RCS 结果

方法	剖分 尺寸/m	未知数	填充+LU 分解时间/h	RCS 误 差/dB
MFIE-HMOM	0.24	6 176	0.47+0.09	0.41
EFIE-HMOM	0.24	6 176	0.28+0.09	0.30
EFIE-RWG	0.05	55 348	1.03+14.58	

注:EFIE-RWG 由于矩阵规模太大而采用了并行核外 LU 分解技术(共 8 个进程),表中给出每个进程消耗的计算时间。

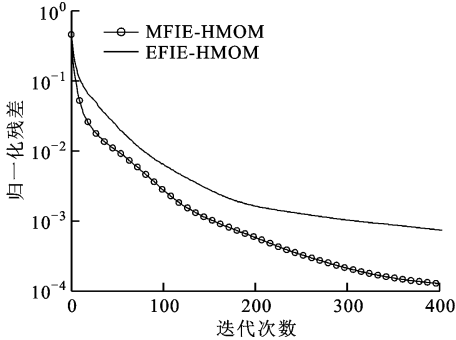


图 9 矩阵方程在共轭梯度法迭代求解时的收敛曲线

3 结 论

将磁场积分方程用于 NURBS 建模的高阶矩量法,用简单的积分变换准确地提取了阻抗元素中的奇异性积分和近奇异性积分,保证了算法的精度。数值实验表明,该算法得到的 RCS 的精度与高阶矩量法求解电场积分方程的精度相当,因此磁场积分方程可以取代通常使用的混合场积分方程。此外,充分利用磁场积分方程良好的迭代收敛性,可以进一步构造迭代收敛速度更快的新算法。

参考文献:

[1] RAO S M, WILTON D R, GLISSON A W. Electro-magnetic scattering by surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1982, 30(5): 409-418.

[2] DJORDJEVIC M, NOTAROS B M. Double higher order method of moments for surface integral equation modeling of metallic and dielectric antennas and scatterers [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(8): 2118-2129.

[3] YLA-OIJALA P, TASKINEN M. Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and $n \times$ RWG functions [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(8): 1837-1846.

[4] YAN Su, JIN Jianming, NIE Zaiping. Improving the accuracy of the second-kind Fredholm integral equations by using the Buffa-Christiansen functions [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(4): 1299-1310.

[5] HODGES R E, RAHMAT-SAMII Y. The evaluation of MFIE integrals with the use of vector triangle basis functions [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 1997, 14(1): 9-14.

[6] WILTON D R, RAO S M, GLISSON A W, et al. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1984, 32(3): 276-281.

[7] ERGUL O, GUREL L. Solid-angle factor in the magnetic-field integral equation [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2005, 45(5): 452-456.

[8] ERGUL O, GUREL L. Investigation of the inaccuracy of the MFIE discretized with the RWG basis functions [C]// Antennas and Propagation Society International Symposium. Monterey, CA, USA: IEEE, 2004: 3393-3396.

[9] GUREL L, ERGUL O. Singularity of the magnetic-field integral equation and its extraction [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2005, 4: 229-232.

[10] YUAN Haobo, WANG Nan, LIANG Changhong. Combining the higher order method of moments with geometric modeling by NURBS surfaces [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(11): 3558-3563.

[11] LI Jianbing, WANG Xuesong, QU Longhai. Calculation of physical optics integrals over NURBS surface using a delaminating quadrature method [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(5): 2388-2397.

[12] WANG Nan, YUAN Haobo, DANG Xiaojie, et al. Edge diffraction in NURBS-UTD method [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(5): 2590-2593.

[13] SAAD Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. Boston, USA: PWS Publishing, 1996: 236-237.

(编辑 杜秀杰)