

DOI: 10.7652/xjtuxb201311018

利用主成分分析的模态参数识别

王成^{1,2}, 缙锦¹, 白俊卿², 闫桂荣²

(1. 华侨大学计算机科学与技术学院, 361021, 福建厦门;

2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对运行模态分析和独立成分分析技术不完善、可能会识别出虚假模态等缺点,提出一种新的利用主成分分析进行模态参数识别的方法。基本思想是找出模态振型与线性混叠矩阵之间及各阶模态响应与主成分之间的对应关系,并将模态参数识别问题转化为结构响应数据的主成分分解问题。不同状态下梁的仿真结果表明,仅以系统结构的时域响应数据为对象,利用含观测噪声基于主元抽取的主成分分析算法,就可以识别响应中占主要贡献的各阶模态振型和固有频率,且适用于不同边界条件、载荷类型及加载位置,对高斯测量噪声也不敏感,可应用于独立模态控制方法中被控系统的辨识与建模、最优控制点选择、作动器安装位置和控制频率确定以及减振效果预估。

关键词: 模态参数识别;主成分分析;振动时域响应数据;信号处理

中图分类号: O235 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)11-0097-08

Modal Parameter Identification with Principal Component Analysis

WANG Cheng^{1,2}, GOU Jin¹, BAI Junqing², YAN Guirong²

(1. College of Computer Science and Technology, Huaqiao University, Xiamen, Fujian 361021, China;

2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A novel modal parameter identification method based on principal component analysis is proposed to improve the operational modal analysis and the independent component analysis, and to decrease the possibility of identifying false modal. The essentiality is to find the relationship between modal shape and linear compound matrix and the relationship between modal responses and principal components. The modal parameter identification is then changed into principal component decomposition. Numerical simulations of two beams with different state show that the new principal component extraction based method is insensitive to Gauss measurement noise, and enables to identify dominant modal shapes and natural frequencies only using vibration time-domain response signals of a structure with measurement noise in despite of system boundary, load type, and load position. The proposed method can be applied to independent modal control method in terms of system recognition and modeling, selection of optimal control point, mounting position of actuator, determination of control frequency, and estimation of active vibration suppression.

Keywords: modal parameter identification; principal component analysis; vibration time-domain response signal; signal processing

基于结构振动特性的损伤诊断方法是目前大型结构健康监测的主要研究内容之一^[1]。独立模态控制方法假设被控系统是线性的,并根据模态理论认为结构的振动响应是各阶模态振型线性叠加的结果,具体方法是在模态空间上单独地抑制各阶模态的振动,从而达到抑制结构总体振动响应的目的。

从振动控制的角度考虑,若能将振动响应主要频率成分的振动量减小,结构的振动能量就会大大地下降。大型结构在线模态参数识别可以利用的激励方式往往只限于环境激励,而在这种输入未知的情况下如何有效地获取结构的模态参数,成为影响基于振动特性的损伤诊断方法和基于独立模态控制的减振应用的关键。

20世纪80年代末,人们开始对运行模态分析(OMA)进行研究^[2]。随后,Poncelet等人提出了基于盲源分离和独立成分分析技术的模态识别方法^[3-4];白俊卿等人从几何与特征提取的角度出发,把系统的响应输出看成是一高维数据集,系统的模态看作高维数据集的本质结构与固有特征,提出了一种新的利用局部线性嵌入的模态识别方法^[5]。但是,这些方法物理意义不明确,对于模态参数的存在性和唯一性缺乏有效的证明,且存在可能识别出虚假模态和模态缺失等问题。James等提出的自然激励技术^[6-7]仅适用于对受平稳高斯白噪声激励和自由衰减的结构响应进行结构模态参数识别。

主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)是多变量分析和数据挖掘领域最为经典的方法之一,其思想最早由Pearson于1901年提出,用于生物学领域^[8]。21世纪初,Kerschen提出将主成分分析和正交分解方法应用于机械系统动态特征提取^[9-11],但对于模态参数的存在性、唯一性和物理意义都没有进行阐述和证明。

本文找出了模态振型与主成分线性混叠矩阵之间及各阶模态响应与潜变量之间的对应关系,从而将模态参数识别问题转化为结构响应数据的主成分分解问题;提出了一种利用主成分分析的模态参数识别方法,并用具有不同边界条件、载荷类型及加载位置的梁进行了仿真验证。

1 基于主成分的动力学系统 模态参数识别

1.1 工作模态参数识别的问题描述

机械系统一般可以看成黏性比例阻尼系统。根据结构动力学理论,在物理坐标系统中,一个 n 自由度线性系统的振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统的质量矩阵; $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统的阻尼矩阵; $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统的刚度矩阵; $\mathbf{F}(t) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 为系统受到的外激励; $\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 为系统的位移响应。

对于小阻尼的一般工程结构,其位移响应可以用模态坐标表示为

$$\mathbf{X}(t) = \Phi \mathbf{Q}(t) = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\varphi}_j q_j(t) \quad (2)$$

式中: Φ 为各阶模态主振型向量 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 组成的模态矩阵; $\mathbf{Q}(t)$ 为各阶模态响应 $q_j(t)$ 组成的向量矩阵。根据振动理论,只要系统(结构)的各阶固有频率 ω_j 不相等,则各阶正则化模态主振型向量 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 相互归一化正交

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (3)$$

且各阶模态响应 $q_j(t)$ 相互独立。利用单自由度识别技术,可以很容易地从各阶模态响应 $q_j(t)$ 中识别系统的第 j 阶固有频率(对于平稳信号,快速傅里叶变换(FFT)峰值处对应的频率、衰减信号可利用单自由度衰减法)。

1.2 主成分分析的数学描述

定义1 已知空间 $\mathbf{R}^m$ 上有 m 个观测信号 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m]^T$,该 $\mathbf{X}$ 是由空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 n 个不相关的未知潜变量 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]^T$ 经过一个线性变换矩阵 $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 混叠而成的(如图1所示),且 $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 满足条件

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}_{n \times n} \quad (4)$$

则将 n 个不相关随机潜变量 $\mathbf{Y}$ 称为 m 个观测信号 $\mathbf{X}$ 的主成分。

由定义1可知

$$\mathbf{X} = \mathbf{WY} \quad (5)$$

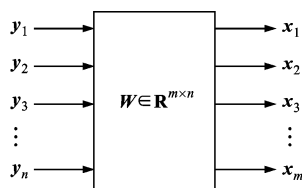


图1 主成分分解的问题描述

定义2 已知空间 $\mathbf{R}^m$ 上的 m 个观测信号 $\mathbf{X}$ (见图1),同时求解满足式(4)、式(5)的线性变换矩阵 $\mathbf{W}$ 和主成分 $\mathbf{Y}$,称为对观测信号 $\mathbf{X}$ 的主成分分解。

定理1 已知 m 个观测信号 $\mathbf{X}$,自相关矩阵 $\mathbf{C}_{\mathbf{XX}} = E[\mathbf{XX}^T] \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 的秩为 n ,且 $m \geq n$,则满足式(4)、式(5)的观测信号 $\mathbf{X}$ 的主成分分解的结果存在且唯一。

证明 由 m 个观测信号 $\mathbf{X}$ 矩阵的性质可知, $\mathbf{C}_{\mathbf{XX}}$ 必满足以下性质:对称方阵,其秩为 n ,特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, m)$ 并满足

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0 \quad (6)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \cdots = \lambda_m = 0 \tag{7}$$

设特征值 $\lambda_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$ 对应的归一化特征向量为 $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^m$, 且 $\mathbf{v}_i$ 满足

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{8}$$

则根据矩阵特征值的性质^[9], $\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ 可唯一分解为

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \tag{9}$$

式中: $\mathbf{\Lambda}$ 是由式(6)所示的 $\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ 的 n 个非零特征值 $\lambda_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$ 按从大到小的顺序组成的对角方阵

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n} \tag{10}$$

$\mathbf{V}$ 是由特征向量 $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^m$ 构成的变换矩阵

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_i \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \tag{11}$$

且
$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{n \times n} \tag{12}$$

因此, $\mathbf{X}$ 可唯一分解为

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} (\mathbf{V}^T \mathbf{X}) \tag{13}$$

对比式(4)和式(12)、式(5)和式(13), 可知观测信号 $\mathbf{X}$ 的主成分分解结果是唯一存在的, 式(11)所求的 $\mathbf{V}$ 即主成分分解所求的 $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}^T \mathbf{X}$ 即观测信号 $\mathbf{X}$ 主成分分解所求的主成分 $\mathbf{Y}$ 。

证毕。

1.3 基于 PCA 的模态参数识别的物理意义

对比系统的响应输出 $\mathbf{X}(t)$ (见式(2)) 和 PCA 分解(见式(3)~式(5)), 按照主成分分析的数学描述和定义, 发现独立模态参数识别只是 PCA 分解的一个特例, 如图 2 所示, 正则化模态振型矩阵 Φ 即为式(4)中的线性混叠矩阵 $\mathbf{W}$, 各阶模态响应矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 即为式(5)中的主成分 $\mathbf{Y}(t)$ 。因此, 基于 PCA 的模态参数识别的存在性、确定性和唯一性, 可以通过 PCA 分解来证明, 详见定理 1。

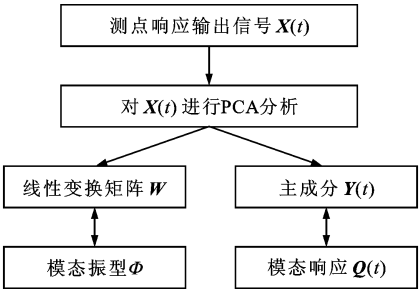


图 2 基于 PCA 的独立模态参数识别算法原理

1.4 含观测噪声的基于主元抽取 PCA 算法的主要贡献模态识别

当观测信号中存在高斯测量噪声时, 式(5)表示

的模型变为

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{W} \mathbf{Y}(t) + \mathbf{N}(t) \tag{14}$$

式中: $\mathbf{N}(t)$ 为 m 个满足高斯分布的观测噪声。在这种情况下, 利用特征值分解法求解 PCA 问题时, 式(7)变为 $\lambda_{n+1} > \lambda_{n+2} > \cdots > \lambda_m > 0$ 。因为高斯测量白噪声互不相关, 所以对应的特征值较小^[12]。仍按式(6)的形式对自相关矩阵 $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}$ 的特征值从大到小排序, 抽取 $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}$ 最大的前 n 个特征值构成对角方阵 $\hat{\mathbf{\Lambda}}$, 对应的特征向量构成变换矩阵 $\hat{\mathbf{V}}$, 并对其进行截断处理, 则 $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}$ 可近似分解为特征值方程

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} \approx \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{\Lambda}} \hat{\mathbf{V}}^T \tag{15}$$

观测信号 $\hat{\mathbf{X}}(t)$ 的近似 PCA 分解为

$$\hat{\mathbf{X}} \approx \hat{\mathbf{V}} (\hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{X}}) \tag{16}$$

此时, 主成分 $(\hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{X}})$ 的累积方差为

$$\sigma_{\hat{\mathbf{Y}}}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tag{17}$$

观测信号 $\hat{\mathbf{X}}(t)$ 的累积方差为

$$\sigma_{\hat{\mathbf{X}}}^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \tag{18}$$

定义
$$\eta = \sigma_{\hat{\mathbf{Y}}}^2 / \sigma_{\hat{\mathbf{X}}}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i \tag{19}$$

式中: η 为前 n 个主成分的方差贡献率。

$$\xi = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{i=n+1}^m \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i \tag{20}$$

式中: ξ 为观测噪声造成的方差截断误差。

当不相关潜变量数目 n 未知时, 可设定式(19)的阈值^[12] (如设 $\eta \geq 95\%$) 对 n 进行截断处理, 再利用式(20)计算方差截断误差 ξ , 具体算法如图 3 所示。

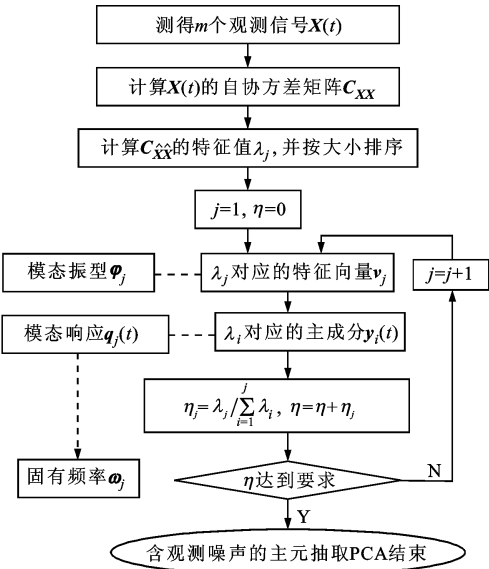


图 3 含观测噪声的基于主元抽取 PCA 算法的主要贡献模态识别流程

2 仿真验证

为了验证基于 PCA 的模态参数识别方法确实能够从响应信号中提取模态参数信息,本文用多频正弦叠加集中激励下的无阻尼简支梁和有限带宽高斯白噪声分布激励下的有阻尼悬臂梁的响应数据进行仿真验证,并以 LMS Virtual. Lab 软件后台调用 Nastran、使用有限元法求得的无阻尼模态振型和固有频率与 PCA 结果进行比较。除比较 PCA 识别的模态振型和固有频率之外,还采用模态置信系数(modal assurance criterion,用 K_{MAC} 表示)来定量评价振型识别的准确性,其值越接近 1,说明振型识别的准确性越高。

2.1 正弦叠加集中激励的无阻尼简支梁

将长度为 1 m 的无阻尼简支梁等间隔均分成 1 000 等份,共产生 1 001 个响应测点。在频率点 205、91.3、366、572、824、1 121、22 Hz 处,分别将对应功率为 60、30、30、30、30、30、30 单位的多频正弦载荷激励集中加载在 0.2 m 的单点位置处得到响应

数据,采样时间为 1 s,采样频率间隔为 4 096 Hz,并在响应信号中添加 10%的高斯测量噪声。

图 4 所示的帕累托图显示了每一主成分对方差的贡献量,曲线为累积贡献率。从图中可以看到,到第 6 主成分时,累积贡献率超过了 99%,已能满足识别要求。

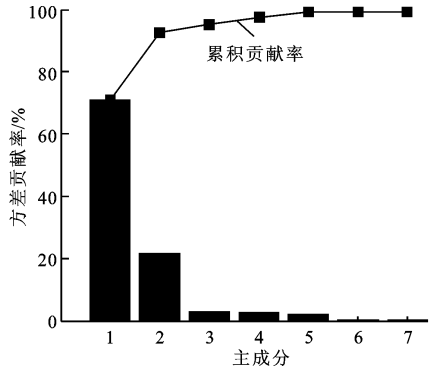


图 4 累积方差贡献的帕累托图

PCA 线性变换向量与有限元各阶模态振型的比较如图 5 和表 1 所示。由图 4、图 5 的定性比较和

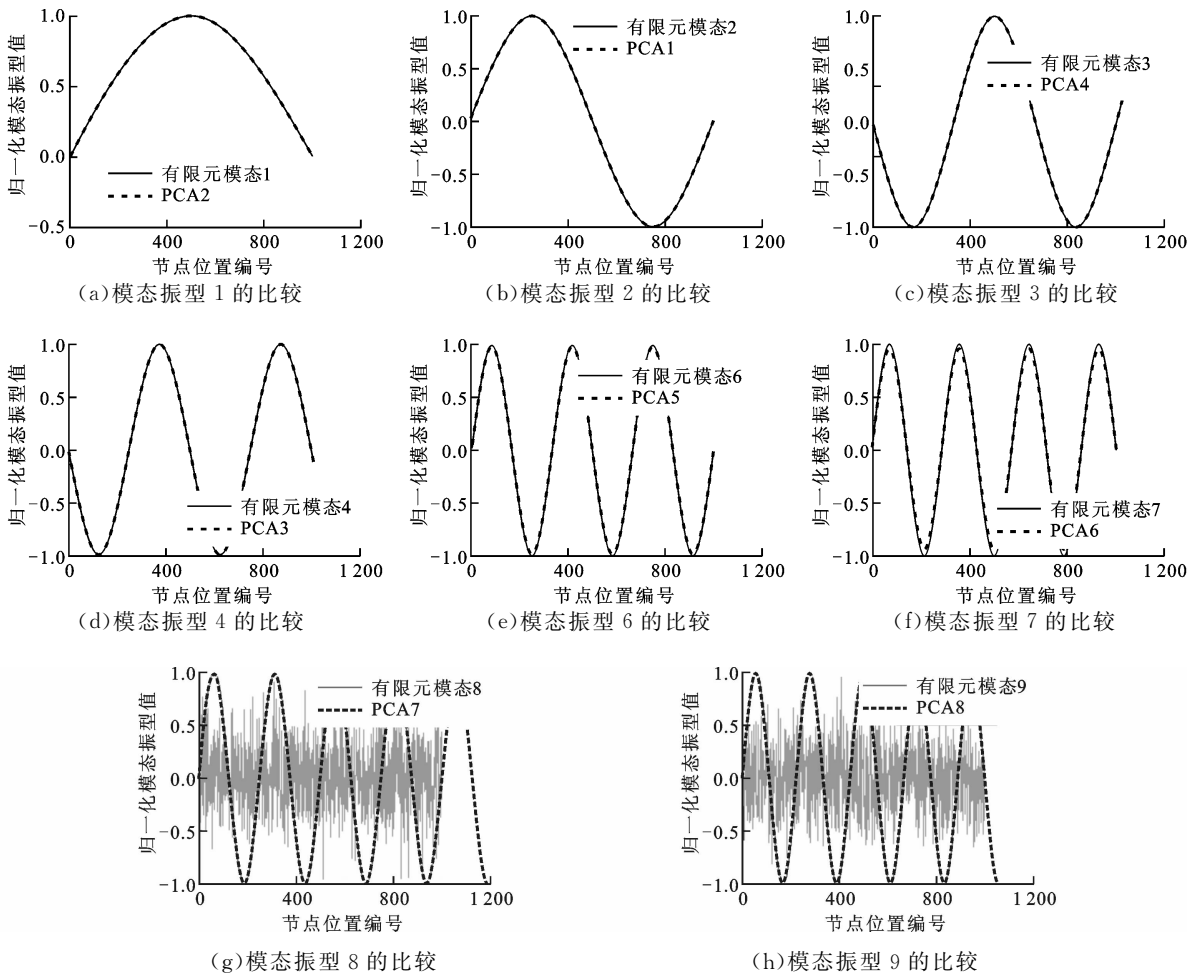


图 5 PCA 线性变换向量与有限元模态振型的比较

表 1 的 K_{MAC} 值定量比较可知:①PCA 识别的主成分是按照响应信号的方差贡献率从大到小排列的,而不是按照频率从低到高排列的;②PCA 识别的前几阶模态对高斯测量噪声不敏感,但随着主成分分量的增加,被观测信号中的测量噪声污染的程度越来越大,第 7 及以上主成分基本上淹没在噪声中;③PCA 线性变换向量和识别的主成分缺了与第 5 阶有限元模态对应的成分,原因是该阶振型对测点响应的贡献量不大,这是含观测噪声的基于主元抽取

表 1 PCA 线性变换向量与有限元模态振型的 K_{MAC} 值比较

PCA 线性变换向量	有限元模态振型	K_{MAC}
1	2 阶	1.000 0
2	1 阶	1.000 0
3	4 阶	1.000 0
4	3 阶	1.000 0
5	6 阶	1.000 0
6	7 阶	0.999 2

PCA 算法的固有特点。

图 6 为 PCA 分离出的主成分经 FFT 后的结果。因为该模态坐标响应信号为平稳随机信号,所以经 FFT 后取其峰值处对应的频率为 PCA 识别出的固有频率。PCA 识别出的频率与有限元识别出的固有频率的比较如表 2 所示,出现误差的原因是 FFT 的分辨率不够。

表 2 PCA 识别的频率与有限元固有频率的比较

有限元频率/Hz	PCA 频率/Hz	相对误差/%
91.55	92.00	0.492
22.89	23.00	0.481
366.23	367.00	0.210
205.99	206.00	0.005
824.00	825.00	0.121
1 121.6	1 122.00	0.036

2.2 施加分布白噪声激励的悬臂梁

将长为 1 m 的悬臂梁等间隔均分成 1 000 等份,产生 1 001 个响应测点,加了 0.01 的模态阻尼。在每个节点处施加相同的白噪声激励,采用有限元

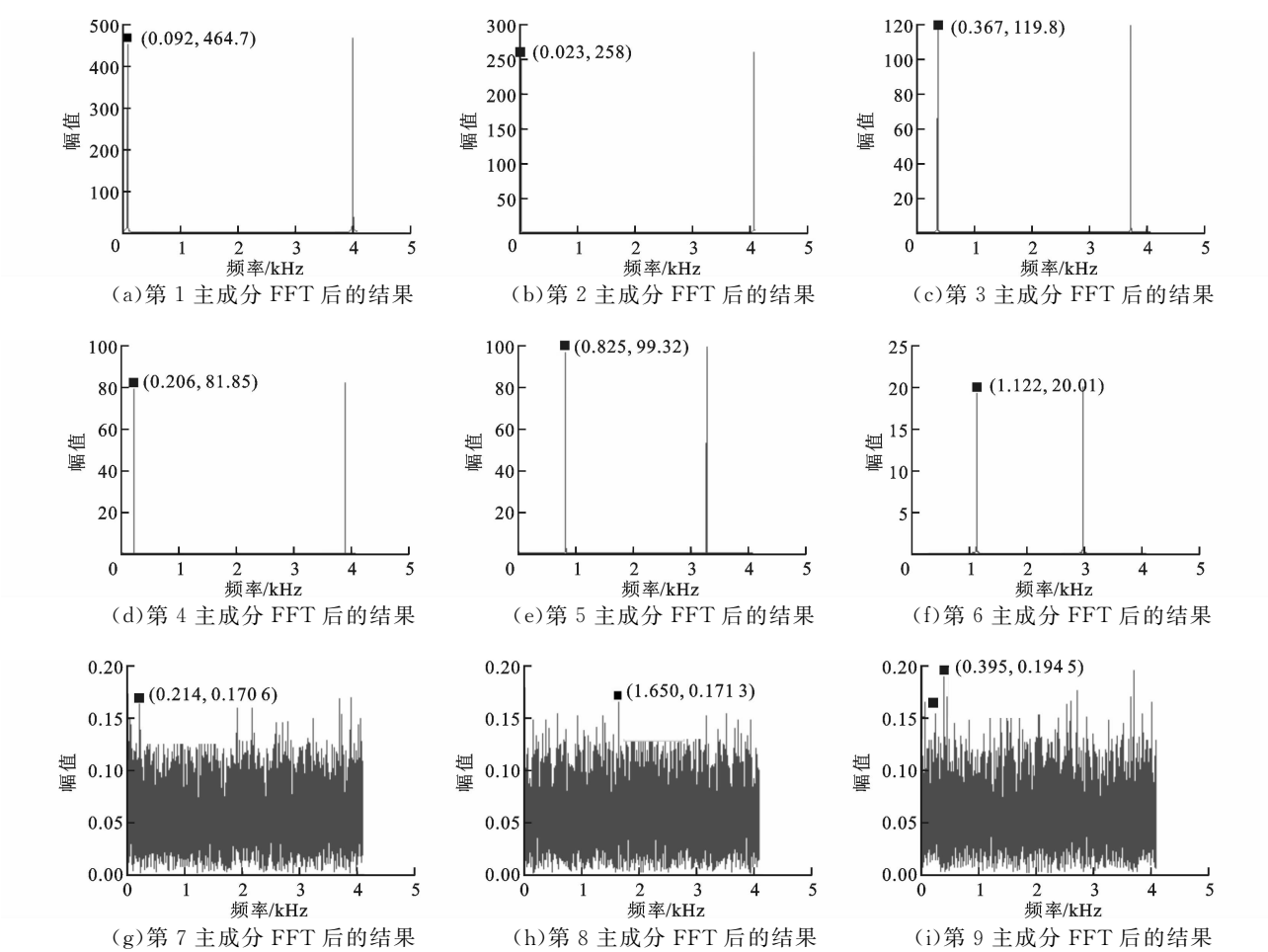


图 6 PCA 分离出的主成分经 FFT 后的结果

软件 Virtual. Lab 计算得到响应数据,采样时间为 1 s,采样频率间隔为 4 096 Hz,并在响应信号中添加 10%的高斯测量噪声。

图 7 所示的帕累托图显示了每一主成分对方差的贡献量,上方的曲线为累积贡献率,到第 5 主成分时,累积贡献率已超过 99%,满足识别要求。

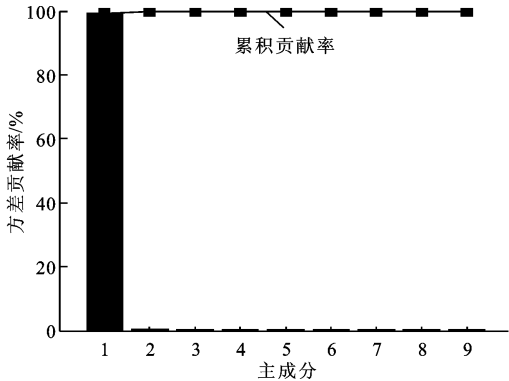


图 7 累积方差贡献的帕累托图

PCA 线性变换向量与有限元各阶模态振型的比较如图 8 和表 3 所示。由图 8 的定性比较和表 3 的 K_{MAC} 值定量比较可知,PCA 方法识别的前几阶模态对高斯测量噪声不敏感,但随着主成分分量的

增加,被观测信号中测量噪声污染的程度越来越大,第 6 及以上主成分基本上淹没在噪声中,这是含观测噪声时基于主元抽取 PCA 算法的固有特点。图 9 为 PCA 分离出的主成分经 FFT 后的结果。因为该模态坐标响应信号为平稳随机信号,故经 FFT 后取其峰值处对应的频率为 PCA 识别出的固有频率,PCA 识别出的频率与有限元法识别出的固有频率的比较见表 3,出现误差的原因是阻尼的影响和 FFT 的分辨率不够。

表 3 PCA 线性变换向量与有限元模态振型的 K_{MAC} 值比较及固有频率误差

PCA 线性变换向量	有限元模态振型	K_{MAC}	固有频率误差/%
1	1 阶	1.000 0	0.573
2	2 阶	1.000 0	0.153
3	3 阶	0.999 7	0.182
4	4 阶	0.994 5	0.050
5	5 阶	0.926 9	0.113

对有阻尼系统的自由振动、无阻尼系统的振动以及系统在宽带随机激励下的振动的响应信号进行主成分分析,均可得到类似的效果。

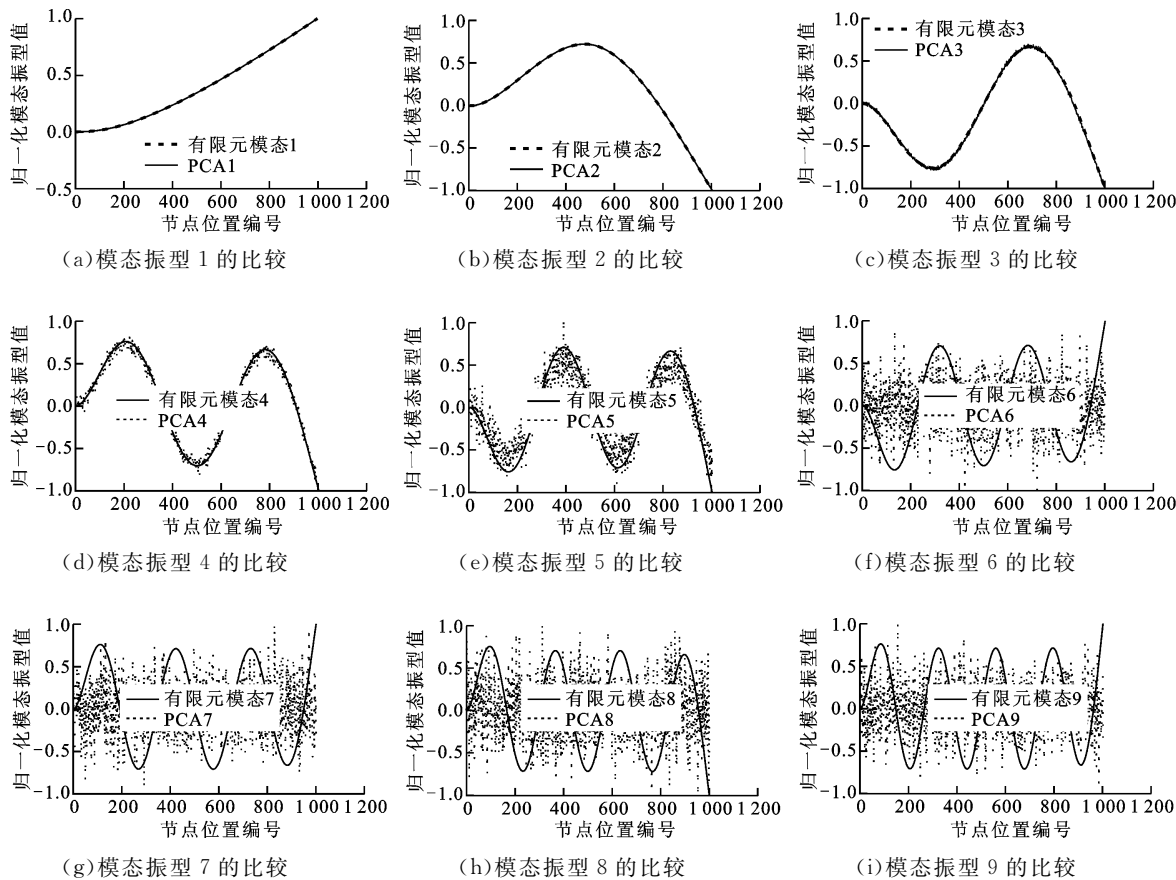


图 8 PCA 线性变换向量与有限元模态振型的比较

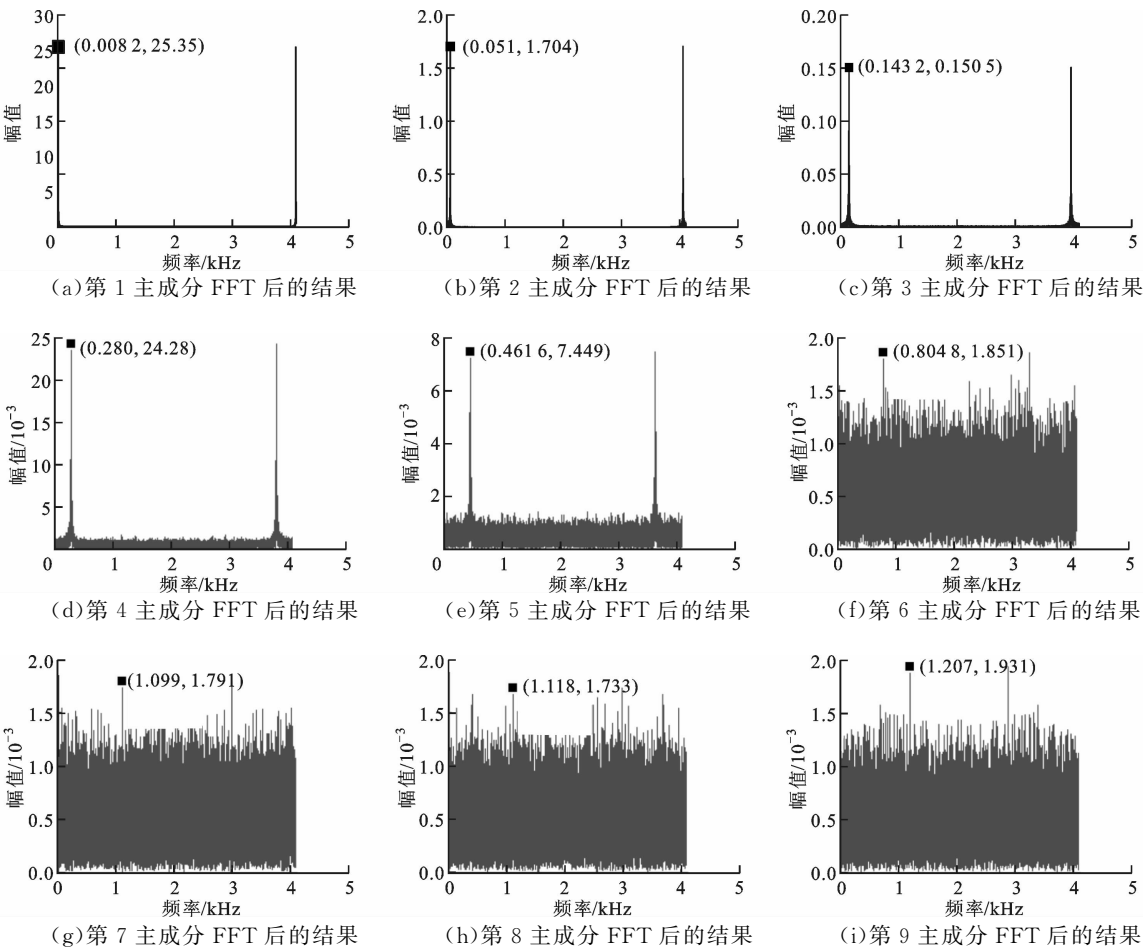


图 9 PCA 识别出的主成分经 FFT 后的结果

3 结 论

从统计模式识别的观点来看,PCA 能从测点响应中识别出占主要贡献量的模态振型和模态固有频率,且适用于不同边界条件、不同载荷类型和不同加载位置,对高斯测量噪声也不敏感,其潜在的工程应用前景十分广阔。特别是 PCA 识别的主成分是按照响应信号方差贡献量从大到小排列的,而不是按照频率从低到高排列的,结合累积方差贡献的帕累托图可得到每一模态坐标响应在响应信号中的贡献率大小,从而可为独立模态控制方法中被控系统的辨识与建模、最优控制点选择、作动器安装位置和控制频率确定以及预估控制所能达到的减振效果提供重要的信息。

同时,如何寻找在响应信号中贡献较小的缺失的模态,如何降低测量噪声对模态识别的影响,也是 PCA 模态参数识别需要进一步研究的方向。

参考文献:

[1] 纪晓东,钱稼茹,徐龙河. 模拟环境激励下结构模态

参数识别试验研究 [J]. 清华大学学报:自然科学版, 2006, 46(6): 769-772.

[2] CONTI C, DEHOMBREUX P, VERLINDEN O, et al. Analysis of the performance of operational data analysis methods [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1996, 10(5): 579-593.

[3] PONCELET F, KERSCHEN G, GOLINVAL G C, et al. Output-only modal analysis using blind source separation techniques [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(6): 2335-2358

[4] ZHOU Wenliang, CHELIDZE D. Blind source separation based vibration mode identification [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(8): 3072-3087

[5] 白俊卿,闫桂荣,王成. 利用局部线性嵌入的模态识别 [J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(1): 85-89, 100.

BAI Junqing, YAN Guirong, WANG Cheng. Modal identification method following locally linear embedding [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47(1): 85-89, 100.

[6] JAMES G H III, CARNE T G, LAUFFER J P. The

natural excitation technique for modal parameter extraction from operating wind turbines, SAND92-1666, UC-261 [R]. Albuquerque, NM, USA: Sandia National Laboratories, 1993.

- [7] FARRAR C R, JAMES G H. System identification from ambient vibration measurements on a bridge [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 205(1): 1-18.
- [8] PEARSON K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space [J]. *Philosophical Magazine*, 1901, 2(11): 559-572.
- [9] KERSCHEN G, GOLINVAL J C, VAKAKIS A, et al. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview [J]. *Nonlinear Dynam-*

ics, 2005, 41(1/2/3): 147-169.

- [10] HAN S, FEENY B. Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2003, 17(5): 989-1001.
- [11] LENAERTS V, KERSCHEN G, GOLINVAL J C. Proper orthogonal decomposition for model updating of non-linear mechanical systems [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2001, 15(1): 31-43.
- [12] LEE J A, VERLEYSEN M. Nonlinear dimensionality reduction [M]. Berlin, Germany: Springer, 2007: 22-37.

(编辑 葛赵青)

(上接第52页)

比了本文提出的模型与 CEB 弹塑性模型。在接触载荷方面的预测结果表明,本文提出的模型与 CEB 模型在弹性接触载荷预测方面基本相同,但在完全塑性接触载荷预测方面却存在着较大的差异,且两者的差距随塑性指数和载荷的增大而增大。本文提出的模型在完全塑性接触载荷预测方面更为接近有限元分析的结果。

参考文献:

- [1] GREENWOOD J, WILLIAMSON J. Contact of nominally flat surfaces [J]. *Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences*, 1966, 295(1442): 300-319.
- [2] SEPEHRI A, FARHANG K. On elastic interaction of nominally flat rough surfaces [J]. *Journal of Tribology*, 2008, 130(1): 0110141-0110145.
- [3] CHANG W, ETSION I, BOGY D. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. *Journal of Tribology*, 1987, 109(2): 257-263.
- [4] ABDO J, FARHANG K. Elastic-plastic contact model for rough surfaces based on plastic asperity concept [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, 40(4): 495-506.
- [5] SEPEHRI A, FARHANG K. Closed-form equations for three dimensional elastic-plastic contact of nominally flat rough surfaces [J]. *Journal of Tribology*, 2009, 131(4): 0414021-0414028.
- [6] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2002, 69(5): 657-662.

- [7] LIOU Jenglun, LIN Jenfin. A modified fractal microcontact model developed for asperity heights with variable morphology parameters [J]. *Wear*, 2010, 268(1): 133-144.
- [8] LIOU Jenglun, LIN Jenfin. A new microcontact model developed for variable fractal dimension, topothesy, density of asperity, and probability density function of asperity heights [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74(4): 603-613.
- [9] JACKSON R L, KOGUT L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts [J]. *Journal of Tribology*, 2006, 128(1): 209-212.
- [10] CHUNG Jungching, LIN Jenfin. Variation in fractal properties and non-Gaussian distributions of microcontact between elastic-plastic rough surfaces with mean surface separation [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2006, 73(1): 143-152.
- [11] LIN Lipo, LIN Jenfin. An elastoplastic microasperity contact model for metallic materials [J]. *Journal of Tribology*, 2005, 127(3): 666-672.
- [12] 庄艳, 李宝童, 洪军, 等. 一种结合面法向接触刚度计算模型的构建 [J]. *上海交通大学学报*, 2013, 47(2): 180-186.
- ZHUANG Yan, LI Baotong, HONG Jun, et al. A normal contact stiffness model of the interface [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2013, 47(2): 180-186.
- [13] 庄艳. 机械系统装配结合面法向接触刚度的研究 [D]. 西安: 西安交通大学, 2012.

(编辑 管咏梅)