

DOI: 10.7652/xjtuxb201311021

无网格粒子法中复杂二维形状的均布离散方法

李帝辰, 席光, 孙中国

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 在二维情况下, 针对配点型无网格粒子法中复杂边界区域的离散困难问题进行了系统的研究, 提出了一套高精度均布离散方法。采用将二维问题降阶为一维问题的思路, 先对边界进行离散并对内部进行填充, 再利用粒子的不可压缩模型和自适应性对预离散结果进行调整, 以实现均匀离散。分别对直线元素和曲线元素几何图形的离散过程进行分类研究, 给出了翼型等复杂曲边区域的粒子布置。结合算例对角点附近粒子间距过近的问题进行分析, 并给出了一种解决方案。结果分析表明, 该方法在精确表达复杂形状的基础上实现了粒子均匀离散, 大幅提高了布置效率和工程应用价值, 为解决三维复杂问题提供了研究基础。

关键词: 无网格法; 移动粒子半隐式法; 离散方法; 自适应

中图分类号: O351.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)11-0120-07

Uniform Discretization of 2-Dimensional Complex Geometrical Area for Meshless Particle Method

LI Dichen, XI Guang, SUN Zhongguo

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A uniform distributed discretization method with high-precision was proposed to solve the discretization problem of 2-dimensional complex geometrical area for particle collocation methods. With dimensionality reduction, the boundary region is discretized and the inner part is filled first, and the incompressible model as well as self-adaptivity is employed to unify the discretization. Moreover, the discretization process of geometrical shapes concerning straight lines and curved lines were analyzed, respectively, and the particle distribution in the complex curved region like airfoil was presented. A solution was proposed to the crowded problem of particles near the angular point. The results show that the uniform distributed discretization method can not only reflect the curved shape accurately but also meet the requirement of distribution uniformity, enhancing the arrangement efficiency and value of engineering application.

Keywords: meshless method; moving particle semi-implicit method; discretization; self-adaptivity

无网格粒子法由于节点之间不存在固定的拓扑结构, 在模拟存在大变形的流动问题时, 避免了传统网格方法可能产生网格畸变的缺陷, 能够很好地计算含有大变形的非定常流动问题。对于无网格粒子法, 尤其是配点型粒子法, 计算区域需要进行均匀分布形式的粒子离散。然而, 笛卡儿坐标系下传统正交粒子分布很难对倾斜及弯曲边界进行准确表达。以往大部分计算集中在仅含简单水平和竖直直

线元素的问题,在涉及到斜线、圆弧或者复杂弯曲边界时,往往采用阶梯状来近似模拟。例如,Katsuya 等在对液滴破碎现象的研究中,采用阶梯状来近似模拟变化的圆形液滴和圆弧渐扩通道边界^[1];Xie 等对圆形液滴的初始布置分别采用了阶梯状和菱形的近似^[2-3];Kazuya 等在对海浪撞击码头的三维模拟研究中,对外凸的半圆台码头采用了阶梯状的近似^[4]。上述近似布置方法使得本应光滑的边界出现了不规则的边角,不仅不能精确地表达物体的几何形状,还会使边界条件的表达产生困难,而改变边界附近的流动细节,最终会对计算造成较大误差。采用粒子细化(增加粒子数、降低粒子尺度)的方法虽能在一定程度上减小影响,但仍然无法完全消除。同时,粒子数的增加会以 $o(n^2)$ 的速度增加模拟计算量,从而使计算效率大大降低。

关于配点型粒子法离散方法的专门研究较少,孙凯在对溢流坝进行数值模拟的过程中,对坝体采用了将粒子均匀布置在给定的设计曲线方程的方法,较好地反映出了曲线的形状^[5]。Sun 等在对液体搅拌混合过程的研究中,对圆柱形容器及内部液体粒子布置引入了柱坐标系,使得外形更加贴切,边界条件也易于设置^[6-7]。潘徐杰在对二维船舶横剖面的横摇模型的研究中,对从船艏近似楔形体的形状至船艉近似方形的形状的 3 个剖面,采用了多条直线段分段近似的方法^[8]。

本文在已有研究基础上从简单二维几何图形入手,逐渐扩展到复杂二维曲边图形,针对配点型无网格法系统地给出了一套粒子均布离散的新方法。

1 数值方法

移动粒子半隐式(MPS)法是完全拉格朗日无网格粒子法,在对计算对象的离散以及求解过程中均不需要任何背景网格的辅助。在求解黏性不可压缩流体的非定常流动时,以离散的粒子为基本计算单元,基于粒子间相互作用关系将 N-S 方程进行离散,建立压力泊松方程,在一系列边界条件的约束下,采用时间推进的方式进行求解。

1.1 控制方程

在计算不可压缩流动时,本文算法满足质量和动量守恒方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \tag{2}$$

式中: $\mathbf{u}$ 为流体速度矢量; p 为压力; μ 为流体动力黏性系数; $\mathbf{f}$ 为作用在流体单位质量上的外力矢量。

1.2 核函数

计算域内的连续物理量被离散到粒子点上,粒子之间相互作用的加权关系由核函数进行定义

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_c}{r} - 1 & (r < r_c) \\ 0 & (r \geq r_c) \end{cases} \tag{3}$$

式中: $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ 是粒子 i 和 j 之间的距离; r_c 为粒子作用半径,粒子间距越小,它们之间的相互作用越强。

1.3 不可压缩模型

在离散的粒子系统中,采用粒子数密度来类比流体密度这一概念。粒子数密度定义为

$$\langle n_i \rangle = \sum_{j \neq i} w(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) \tag{4}$$

对于不可压缩流体,流体密度保持定常,粒子数密度维持在一个常数 n^0 。在每个时间步内,由于粒子运动造成的间距变化使得粒子的粒子数密度偏离常数 n^0 ,这样的偏离会显现在压力场的变化上,从而在压力 Poisson 方程

$$\langle \nabla^2 p^{n+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n^0 - \langle n^* \rangle_i}{n^0} \tag{5}$$

的求解中得到体现,随后基于速度场与压力场的耦合对粒子的速度和位置进行更新,最终满足粒子数密度常数,即不可压缩性。

2 均布离散法

为了使复杂形状计算区域的离散既满足正常粒子数密度的要求,又能够使几何边界和相应的边界条件实现精确表达,本文提出了一种新的粒子均布离散方法。本方法将计算区域的离散分为边界和内部两个部分,先采用小线段拟合曲线的办法将边界进行离散处理,实现边界的精确表达,然后在区域内部填充同一性粒子,最后利用不可压缩模型中粒子根据自身粒子数密度偏离常数的状况对位置进行自适应调整的原理^[9],使内部粒子自动调整达到平衡状态,最终完成复杂区域的均布离散。

下文将以椭圆形为例,从边界的数学描述与离散、内部粒子的填充与调整以及离散结果的质量评估 3 个方面进行详细的讲解。

2.1 边界的数学描述与离散

边界可视为固体壁面,为满足内部近壁面粒子计算的需要,一般用 3 层粒子来表示^[10]。壁面粒子布置的准确和均匀程度会直接影响到其与近壁液体

粒子的相互作用,过疏或过密容易造成粒子穿透壁面或产生排斥现象。将传统布置方法中粒子在 x 和 y 方向上的间距都为 l_0 的正交均匀布置思想推广到任意曲线,既要求沿曲线方向上粒子间距为 l_0 ,同时沿曲线法线方向间距也为 l_0 。分已知曲线方程和未知曲线方程两种情况具体进行讨论如下。

给定平面任意曲线 $C(\mathbf{R}=\mathbf{R}(t))$ 及粒子间距 l_0 后,以 l_0 为半径从曲线起点 M_0 作圆与曲线 C 相交于 M_1^* ,再以 M_1^* 为圆心作圆交曲线于 M_2^* ,以此类推,直到交点 M_n^* 与曲线终点 M_n 距离小于 l_0 ,得到一系列交点 $\{M_i^*(x(t_i), y(t_i))\}$,最后一个点与曲线终点的余量非常小,可认为端点直线距离与曲线弧长近似相等, M_n^* 到曲线终点 M_n 沿曲线的弧长为

$$\epsilon_l = \int_{M_n^*}^{M_n} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt \quad (6)$$

再将 ϵ_l 均分到 n 个交点 M_i^* 上,使每个点沿曲线移动一个极小值,即均分弧长

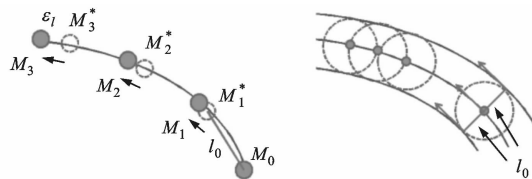
$$\bar{\epsilon}_l = \frac{\epsilon_l}{n} = \int_{M_i^*}^{M_i} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt \quad (7)$$

到新位置 M_i ,且使最后一点 M_n 落在曲线终点,这样得到的一组点 $\{M_i\}$ 即是最终得到的求解,如图 1a 所示。

由于粒子数目 n 较大,使得 $\bar{\epsilon}_l$ 充分小,这一组点既满足了点在曲线上,能够精确反映曲线的几何特征,又使得相邻点间距两两相等,保证了粒子数密度大小合适且均匀。对已知曲线求内外两层等距线,已知曲线 C 及等距参数 h ,则等距曲线 C' 的矢量方程为

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(t) \pm h\boldsymbol{\beta}(t) \quad (8)$$

式中: t 是曲线参数; $\boldsymbol{\beta}$ 是曲线 C 的单位法矢量,它是 t 的函数;“ $\pm$ ”号表示在曲线 C 的两侧各有一条等距曲线。不同形式曲线的等距线的求法不一^[11-12],本文采用一种用包络法求等距曲线方程^[13]的方法,如图 1b 所示。已知参数方程为 $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$ 的曲线 C ,其含参量 θ 的方程组为



(a)等距截点示意图 (b)用包络线求等距线
图1 边界点布置示意

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) + h\cos(\theta + t) \\ y &= y(t) + h\sin(\theta + t) \\ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

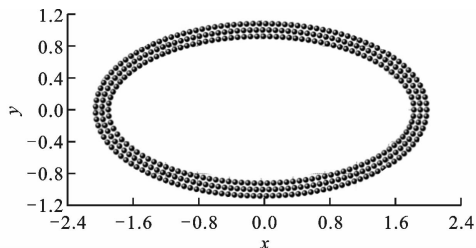
消去 θ ,即得到两条等距曲线,其是以 t 为参变量的参数方程。得到两条等距曲线后,再应用等距截点的方法求得内外等距线上的点序列 $\{M_{oi}\}\{M_{ei}\}$,完成边界上的粒子离散。

对于未知表达式的数值点曲线,本文采用最小二乘法分段拟合的方式进行构造,拟合函数为三阶多项式,参数形式为 $x=t, y=p_1t^3+p_2t^2+p_3t+p_4$,内外等距线可利用式(9)求得。

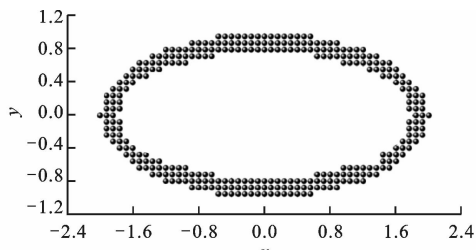
以参数方程 $x=2\cos t, y=\sin t$ 的椭圆为例,由式(9)可以求得其内外等距线为

$$\left. \begin{aligned} x &= 2\cos t \pm l_0 \frac{\cos t}{(4\sin^2 t + \cos^2 t)^{1/2}} \\ y &= \sin t \pm l_0 \frac{2\sin t}{(4\sin^2 t + \cos^2 t)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

起点选为 $t=0$,按逆时针的正方向截点,终点与起点重合。取 $l_0=0.08$,3层边界粒子数分别为 114、121 和 127 共 362 个粒子,结果如图 2a 所示,图 2b 给出了传统梯形布置得到的结果,粒子数共 312 个。



(a)椭圆边界粒子的布置



(b)传统梯形布置法

图2 椭圆边界点的布置

此外,对于复杂形状需要分段处理,本文将二维边界分为直线元素边界和曲线元素边界两类,其中直线元素边界取直线段的端点作为分段节点。曲线元素边界若存在数学表达式,则该边界无需分段;若不存在,根据曲线内一阶导数变化程度及三阶多项式拟合精度来选取曲线段节点,该节点相连两曲线段在该点的一阶导数近似相等,满足光滑需要。

2.2 内部粒子的填充与调整

首先,向 2.1 小节中已布置好的曲边边界内,以重力加速度 g (视实际计算条件调整)从顶部注入足够多的流体粒子,直到填满边界内的所有空间。其中,入口速度为 0,运动黏性系数适当放大至 $\nu=5\times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$,以加快计算平衡速度。跟踪计算每一时刻所有液体粒子的单位质量总能量 E (包括动能和势能),该能量将随着填充过程从高位逐渐减小最后达到稳定,当相邻采样点总能量相对偏差小于 0.5%,即可以认为达到稳定。随后,去除边界外多余的流体粒子,取消原重力加速度,内部的粒子将不受外力作用,仅依靠粒子数密度常数 n^0 自适应修正其位置,最终达到均匀稳定且各向同性的分布状态,即实现均布离散。上述椭圆的填充过程分析见图 3。

全部流体粒子单位质量总能量 E 和椭圆内流体粒子数 n_p 在 $t_s=4.001\text{ s}$ 已达到所定义的稳定状态,得到内部布置粒子数为 792。再取得内部粒子的位置,以进行第 2 步在封闭图形内的无重力自适应过程直到稳定,此时完成离散过程。

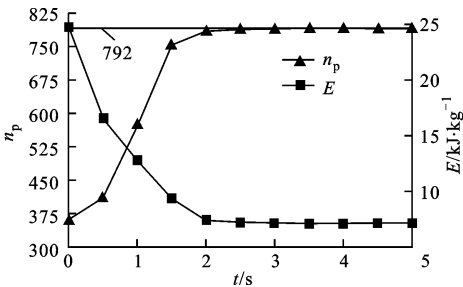


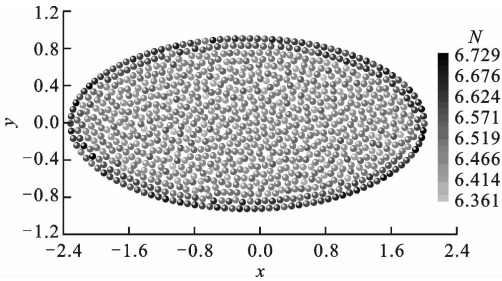
图 3 内部粒子的布置分析

2.3 离散结果质量评估

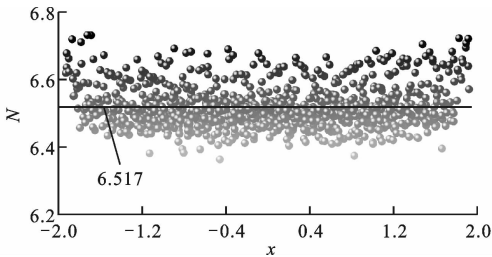
内层边界及内部流体粒子的粒子数密度计算如图 4 所示。图中粒子的灰度高低表示粒子数密度 n 的大小,内部粒子基本集中在 6.4 到 6.6 的区间内,边界粒子略高。所有粒子的平均粒子数密度 $\bar{n}$ 为 6.517,这与在二维情况笛卡尔坐标系下正交布置的粒子数密度常数 $n^0=6.540$ 十分接近,较好地实现了二维曲边形状的粒子均布离散。

3 几何图形分类讨论

本文基本几何图形分为直线元素图形和曲线元素图形两类。当直线元素相邻线段间夹角小于 60° 时,分别处于角两边直线上的 2 个粒子的间距会小于 l_0 ,从而造成局部粒子数密度过大。因此,本文将直线元素以夹角 60° 为临界值分类进行讨论,如正三角形、正六边形(夹角大于 60°)与五角星形(夹角



(a)椭圆边界及内部粒子分布



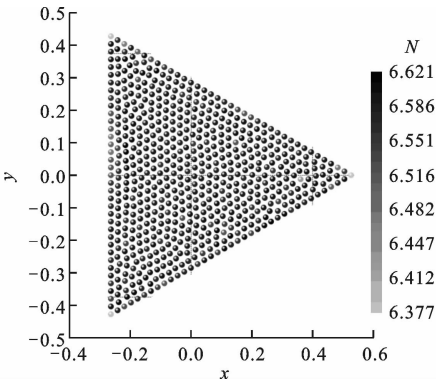
(b)内部粒子的粒子数密度分布

图 4 椭圆的粒子布置

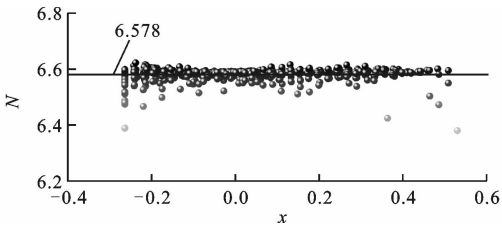
小于 60°)等。曲线元素图形选取较复杂的花瓶形和有工程背景的翼型来进行研究,对于圆形的布置,相关文献中已有讨论^[7],在此不再复述。

3.1 正三角形

取边长为 1,边界 3 条线段首尾相接,粒子间距 $l_0=0.025$,3 层边界和内部粒子数分别为 354 和 527,共计 881 个,结果见图 5。



(a)正三角形边界及内部粒子分布

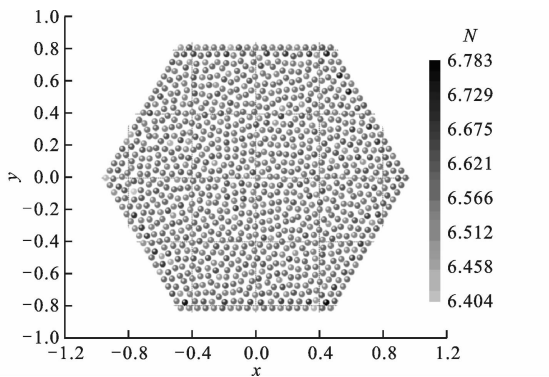


(b)内部粒子的粒子数密度分布

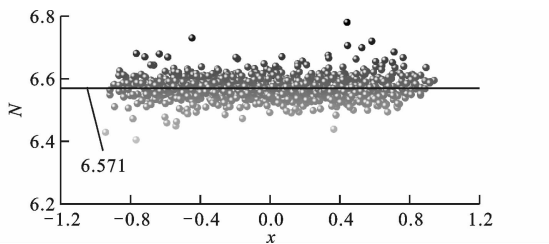
图 5 正三角形的粒子布置

3.2 正六边形

取边长为 1, $l_0 = 0.05$, 3 层边界和内部粒子数分别为 348 和 862, 共计 1 210 个, 结果见图 6。

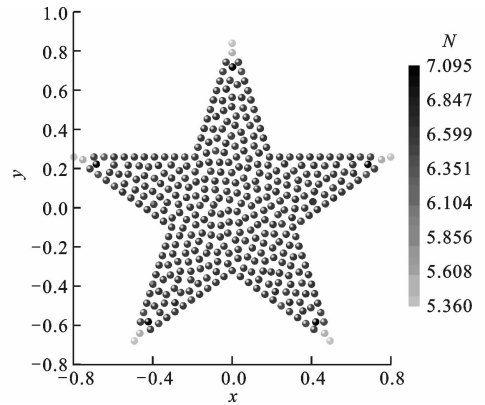


(a) 正六边形边界及内部粒子分布

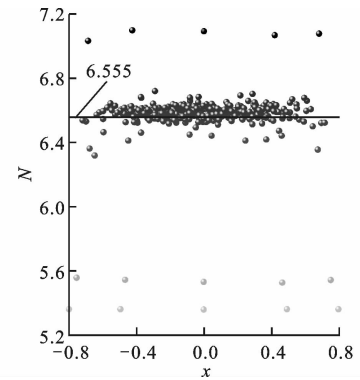


(b) 内部粒子的粒子数密度分布

图 6 正六边形的粒子布置



(a) 五角星形边界及内部粒子分布



(b) 内部粒子的粒子数密度分布

图 7 五角星形的粒子布置

3.3 五角星形

五角星的最小夹角为 36° , 小于 60° , 等距布置会使角点粒子相距过近, 导致局部压力巨大。本文提出当角点相邻两粒子间距小于 $0.7l_0$ 时, 则仅取两者的中点, 如图 7 中五角星的 5 个角处。取五角星外接圆半径为 1, $l_0 = 0.05$, 边界和内部粒子数分别为 405 和 257, 共计 662 个, 结果见图 7。

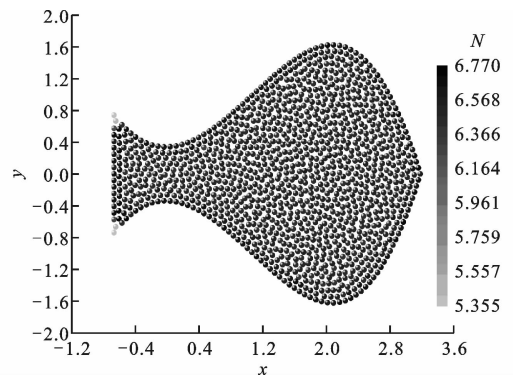
3.4 花瓶

花瓶曲线分上、左、下 3 段拟合。取 $l_0 = 0.08$, 边界和内部粒子数分别为 506 和 1 083, 共计 1 589 个, 结果见图 8。

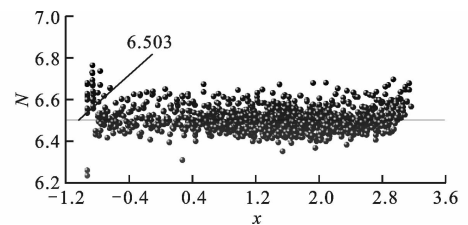
3.5 翼型

选取 NACA 4420 翼型提供的 201 个数据点, 由于机翼前端曲线导数变化较大, 适当增加分段, 从机翼后缘点沿正方向分 5 段拟合, 取 $l_0 = 0.01$, 边界和内部粒子数分别为 611 和 1 080, 共计 662 个, 结果见图 9。

上述图形的粒子离散结果评估如表 1 所示, 粒子数密度的平均值 $\bar{n}$ 与粒子数密度常数 n^0 的偏差 E_n 及方差都较小, 在计算可以接受的范围内。

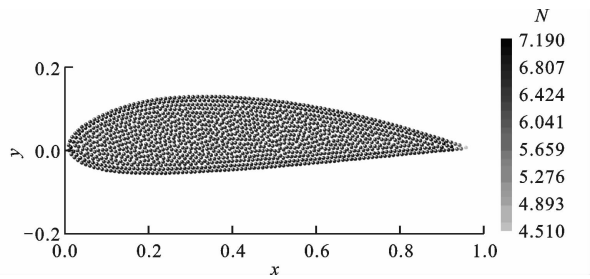


(a) 花瓶边界及内部粒子分布

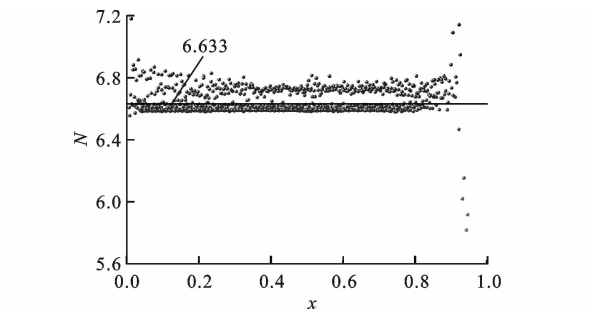


(b) 内部粒子的粒子数密度分布

图 8 花瓶的粒子布置



(a)翼型边界及内部粒子分布



(b)内部粒子的粒子数密度分布

图 9 NACA 4420 翼型的粒子布置

表 1 各形状图形统计情况

图形形状	$\bar{n}$	$E_n/\%$	方差
椭圆	6.517	-0.35	0.004 1
三角形	6.578	0.59	0.000 6
正六边形	6.571	0.47	0.001 3
五角星形	6.555	0.24	0.039 1
花瓶	6.503	-0.57	0.007 3
翼型	6.633	1.43	0.010 0

4 结 论

本文在配点型无网格粒子法框架下,针对二维情况下的复杂几何形状,系统地提出了一套实现粒子均布的离散新方法,并从简单直线元素图形到复杂曲边元素图形进行了分类研究,主要结论如下。

(1)任意二维复杂几何图形的离散都可以通过边界离散、基于边界离散的内部粒子填充和自适应调整等 3 个步骤实现。在满足粒子数密度正确且均匀的前提下,实现了复杂几何边界的精确描述,使得边界条件表达更加准确,消除了基于外形误差对流动的影响,使得计算精度进一步提高。

(2)当直线元素夹角小于 60°且角两侧相邻两粒子的间距小于 0.7 倍粒子初始间距时,建议用一个粒子将它们替换并取其位置为两者的中点,以同时满足计算的正确性和对边界描述的准确性。

(3)利用流体粒子的同一性和基于不可压缩模型的自适应性,采用将复杂二维问题分解为一维问题和填充问题的思路,不仅很好地满足了无网格法中粒子均匀离散的要求,而且避免了人工布置的烦琐过程及其误差,大大简化了计算的建模及程序的编写,提高了研究的效率。

本文方法使得 MPS 法的应用范围扩大到了二维任意形状,为其扩展到三维并与 CAD 等软件结合提供了研究基础,大幅提升了其工程实际应用价值,也为其他无网格法均匀离散提供了一种新思路。

参考文献:

[1] NOMURA K, KOSHIZUKA S, OKA Y, et al. Numerical analysis of droplet breakup behavior using particle method [J]. Journal of Nuclear Science and Technology, 2001, 38(12): 1057-1064.

[2] XIE Heng, KOSHIZUKA S, OKA Y. Modelling of a single drop impact onto liquid film using particle method [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2004, 45(9): 1009-1023.

[3] XIE Heng, KOSHIZUKA S, OKA Y. Numerical simulation of liquid drop deposition in annular-mist flow regime of boiling water reactor [J]. Journal of Nuclear Science and Technology, 2004, 41(5): 569-578.

[4] SHIBATA K, KOSHIZUKA S. Numerical analysis of shipping water impact on a deck using a particle method [J]. Ocean Engineering, 2007, 34(3/4): 585-593.

[5] 孙凯. 基于 SPH 方法对自由表面流的数值模拟及可视化研究 [D]. 郑州: 郑州大学, 2007.

[6] SUN Zhongguo, XI Guang, CHEN Xi. A numerical study of stir mixing of liquids with particle method [J]. Chemical Engineering Science, 2009, 64(2): 341-350.

[7] SUN Zhongguo, LIANG Yangyang, XI Guang. Numerical simulation of the flow in straight blade agitator with the MPS method [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011, 67(12): 1960-1972.

[8] 潘徐杰. 基于大涡模拟的移动粒子半隐式法研究及其应用 [D]. 上海: 上海交通大学, 2009.

[9] 孙中国, 席光. 搅拌器内部流动的无网格法三维数值模拟 [J]. 工程热物理学报, 2010, 31(12): 2027-2030.

SUN Zhongguo, XI Guang. Numerical simulation of the three-dimensional flow in an agitator with meshless method [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2010, 31(12): 2027-2030.

- [10] KOSHIZUKA S, OKA Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid [J]. Nuclear Science and Engineering, 1996, 123(3): 421-434.
- [11] 康宝生, 刘蓉, 段福庆. 基于圆弧样条构造 NURBS 曲线的等距线 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 1999, 29(4): 296-300.
KANG Baosheng, LIU Rong, DUAN Fuqing. Constructing offsets of NURBS curves via circular spline [J]. Journal of Northwest University: Natural Science Edition, 1999, 29(4): 296-300.
- [12] 张伟红, 檀结庆. 平面 Bézier 曲线的等距曲线有理逼近新方法 [J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2007, 30(5): 627-629.
ZHANG Weihong, TAN Jieqing. A new method of rational approximation of the offset curves of planar Bézier curves [J]. Journal of Hefei University of Technology: Natural Science Edition, 2007, 30(5): 627-629.
- [13] 尚文. 用包络法求等距曲线的方程 [J]. 淮南矿业学院学报, 1996, 16(1): 57-60.
SHANG Wen. The deduction of equidistant curve equation by using envelope [J]. Journal of Huainan Mining Institute, 1996, 16(1): 57-60.

(编辑 荆树蓉)

(上接第 119 页)

- [9] FERRI A A. Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures [J]. AIAA Journal, 1988, 25(5): 354-360.
- [10] DUBOWSKY S, FREUDENSTEIN F. Dynamic analysis of mechanical systems with clearances: part 1 formation of dynamic model [J]. Journal of Engineering for Industry, 1971, 93(1): 305-309.
- [11] DUBOWSKY S, FREUDENSTEIN F. Dynamic analysis of mechanical systems with clearances: part 2 dynamic response [J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1971, 93(1): 310-316.
- [12] DUBOWSKY S. On predicting the dynamic effects of clearances in one-dimensional closed loop systems [J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1974, 96(1): 324-329.
- [13] DUTSON J D, FOLKMAN S L. A nonlinear finite element model of a truss using pinned joints [C]//Proceedings of 37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit. Reston, VA, USA: AIAA, 1996: 793-803.
- [14] CHAPMAN J M, SHAW F H, RUSSELL W C. Dynamic of trusses having nonlinear joints [C]//Proceedings of Workshop on Structural Dynamics and Control Interaction of Flexible Structures. Huntsville, Alabama, USA: Marshall Space Flight Center, 1986: 539-565.
- [15] 黄铁球, 吴德隆, 阎绍泽. 带间隙伸展机构的非线性动力学建模 [J]. 中国空间科学技术, 1999, 19(1): 7-13.
HUANG Tieqiu, WU Delong, YAN Shaoze. Nonlinear dynamic modeling of deployable truss structures with clearances [J]. Chinese Space Science and Technology, 1999, 19(1): 7-13.
- [16] 尉立肖, 刘才山. 圆柱铰间隙运动学分析及动力学仿真 [J]. 北京大学学报, 2005, 41(5): 679-687.
YU Lixiao, LIU Caishan. Dynamic simulation and kinetic description of revolute joint with spatial clearance [J]. Universitatis Pekinensis, 2005, 41(5): 679-687.
- [17] 阎绍泽, 叶青, 申永胜, 等. 间隙对空间可展结构动力学性能的影响 [J]. 导弹与航天运载技术, 2002(6): 42-46.
YAN Shaoze, YE Qing, SHEN Yongsheng, et al. Effects of clearances on dynamic performances of deployable structures for spacecraft [J]. Missiles and Space Vehicles, 2002(6): 42-46.
- [18] LAKE M S, WARREN P A, PETERSON L D. A revolute joint with linear load-displacement response for precision deployable structures [C]//Proceedings of 37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit. Reston, VA, USA: AIAA, 1996: 1639-1647.
- [19] 杨绍普, 申永军. 滞后非线性系统的分岔与奇异性 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 115-116.
- [20] LANKARANI H M, NIKRAVESH P E. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 369-376.
- [21] 郭宏伟. 索杆铰接式伸展臂及其力学特性研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009: 23-24.
- [22] 朱石坚, 何琳. 船舶机械振动控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 165-166.

(编辑 葛赵青)