

DOI: 10.7652/xjtuxb201407009

应用改进分形几何理论的结合部切向刚度模型

田红亮, 陈从平, 方子帆, 赵春华, 朱大林, 刘加伟, 林卫共, 郭江洪, 晏红
(三峡大学机械与动力学院, 443002, 湖北宜昌)

摘要: 针对现有分形接触理论对 2 个机械部件粗糙表面相互接触形成的结合部的切向接触刚度分形模型存在违反赫兹法向接触力学的缺陷, 以改进分形几何理论为基础、在严格应用赫兹法向接触力学的基础上, 推导出结合部总切向接触静弹性条件刚度、总条件法向载荷的分析解。数值仿真表明: 结合部的切向接触静弹性刚度随着总法向载荷的增加基本上呈线性增加的态势, 随着表面轮廓分形维数的增加而增大, 随着分形粗糙度的减小而增大; 在恒定法向载荷作用下, 最初作用于结合部的切向载荷使得切向接触静弹性刚度最大, 该刚度随着切向载荷的增加而减小, 随着静摩擦系数的增加而增大; 随着法向载荷的增加, 法向接触静弹性刚度的增量加大。该结果可为进一步研究粗糙表面的分形特性提供参考。

关键词: 结合部; 分形理论; 切向接触刚度; 表面轮廓分形维数

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)07-0046-07

Tangential Stiffness Model for Joint Interface Adopting the Revised Fractal Geometric Theory

TIAN Hongliang, CHEN Congping, FANG Zifan, ZHAO Chunhua, ZHU Dalin,
LIU Jiawei, LIN Weigong, GUO Jianghong, YAN Hong
(College of Mechanical and Power Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China)

Abstract: Aiming at the existing shortcoming violating Hertz normal contact mechanics in the present fractal contact theory for solving the tangential contact stiffness fractal model of joint interface formed through mutual contact between two mechanical components' rough surfaces, the analytical solutions to the joint interface overall tangential contact static elastic stiffness with a definite term and the lifelong normal load with a given one were built up following the revised fractal geometric theory and applying rigorously Hertz normal contact mechanics. Numerical simulation indicates that when the entire normal load is increased, the joint interface tangential contact static elastic stiffness rises linearly in all. Also, the joint interface tangential contact static elastic stiffness increases as fractal dimension of a surface profile increases and fractal roughness shrinks. However, when the joint interface is under the action of the constant normal load, this tangential contact static elastic stiffness is the maximum when the tangential load is initially applied and it reduces with the increase in the applied tangential load. The joint interface tangential contact static elastic stiffness increases with the increasing static friction coefficient. The normal loading character is contrary to the tangential loading character, where the incremental normal contact static elastic stiffness increases with the increase in the applied normal

收稿日期: 2013-10-25。 作者简介: 田红亮(1973—), 男, 博士, 副教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51275273); 三峡大学博士科研启动基金资助项目(KJ2012B013)。

网络出版时间: 2014-04-16

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20140416.1746.009.html>

load. These results may lay the consultation for research on the fractal characterization of rough surface.

Keywords: joint interface; fractal theory; shear contact stiffness; fractal dimension of a surface profile

在机械结构中,切削加工后的2个零件或部件的粗糙表面相互接触形成柔性结合部。一个柔性结合部可以包括单个或多个结合面,结合面可以是平面,也可以是曲面。田红亮等根据一种修正双变量 Weierstrass-Mandelbrot 函数获得了整个螺栓结合部法向连接动刚度的解析解^[1]。结合部切向连接动刚度与结合部的材料、加工方法、表面粗糙度、结合部间的介质状况、接触面积以及结合部间的法向和切向载荷等因素有关,有关研究大部分是通过试验分析进行的^[2],关于理论模型方面的研究尚不多见。张学良等首次建立了结合部切向接触刚度分形模型,但没有估算结合部的静摩擦系数^[3],该模型还存在3个缺陷^[4]。

鉴于此,本文应用赫兹法向接触力学、切向接触理论和改进分形几何理论,在2个半球体单峰同时受法向和切向载荷的作用下,推导了2个微凸体之间互相作用的切向接触静弹性刚度,以及结合部的总切向接触静弹性条件刚度和总条件法向载荷的解析解。

1 分形接触理论的校正

文献[5]采纳曲率半径计算公式得到单峰顶端的曲率半径,与赫兹法向接触力学所得结果存在巨大偏差。本文按照赫兹法向接触力学对单峰顶端的曲率半径进行了求解,进而校正了关联公式。

处处不可求导的 Weierstrass-Mandelbrot 分形函数为

$$Z(X) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n X/L)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1)$$

式中: X 为采样长度坐标; L 为采样长度; G 为分形粗糙度; D 为表面轮廓分形维数; n 为频率指数; γ 为谱密度的尺度参数。

引进下列无量纲参数

$$G' = \frac{G}{L} \quad (2)$$

$$x = \frac{X}{L} \quad (3)$$

$$z(x) = \frac{Z(X)}{L} \quad (4)$$

将式(2)~(4)代入式(1)得

$$z(x) = G'^{D-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (5)$$

考虑实际表面形貌的最低频率,式(5)可表示为

$$z(x) = G'^{D-1} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (6)$$

式中: n_1 为最低频率的初始项。

式(6)与文献[5]的区别是:式(6)中 γ^n 无量纲,文献[5]中 γ^n 的量纲是 m^{-1} 。

由式(1)可得微凸体顶端的变形量为^[6]

$$\delta = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-1} \frac{1}{\gamma^{(2-D)n}} = G^{D-1} \left(\frac{L}{\gamma^n} \right)^{2-D} = G^{D-1} a^{1-0.5D} \quad (7)$$

式中: a 为单个接触点的面积,且满足

$$a^{1/2} = \frac{L}{\gamma^n} \quad (8)$$

由式(7)可得赫兹峰顶的曲率半径为

$$R = \frac{a}{\pi\delta} = \frac{a^{0.5D}}{\pi G^{D-1}} \quad (9)$$

式(9)完成了曲率半径的校正。式(9)与文献[5]中 $R = \frac{a^{0.5D}}{\pi^2 G^{D-1}}$ 及文献[7]均不同。若按照文献[5]中 $R = \frac{a^{0.5D}}{\pi^2 G^{D-1}}$ 和本文式(7),可得 $\pi R\delta = \frac{a}{\pi}$,这与赫兹法向接触力学(式(9))的 $\pi R\delta = a$ 存在倍数 π 的差距。

由式(9)可得弹性临界变形量为^[5]

$$\delta_c = \left(\frac{\pi K \sigma_y}{2E'} \right)^2 R = (0.5\pi^{1/2} K \phi)^2 \frac{a^{0.5D}}{G^{D-1}} \quad (10)$$

式中: $K = H/\sigma_y$, H 为较软材料的硬度, $0.5 \leq K \leq 3$, σ_y 为较软材料的最初屈服强度; $\phi = \sigma_y/E'$ 为单轴向屈服应变^[8], E' 为复合弹性模量。

根据式(9),将 K 和 ϕ 代入式(10)得

$$\delta_c = \left(\frac{\pi H}{2E'} \right)^2 R = \left(\frac{\pi^{1/2} H}{2E'} \right)^2 \frac{a^{0.5D}}{G^{D-1}} \quad (11)$$

式(7)除以式(10)得

$$\frac{\delta}{\delta_c} = \frac{(0.5\pi^{1/2} K \phi)^{-2} G^{2(D-1)}}{a^{D-1}} = \left(\frac{a_c}{a} \right)^{D-1} \quad (12)$$

式中: a_c 为划分弹塑性区域的弹性临界面积,且有

$$a_c = (0.5\pi^{1/2} K \phi)^{2/(1-D)} G^2 \quad (13)$$

将 K 和 ϕ 代入式(13)得

$$a_c = G^2 \left(\frac{2E'}{\pi^{1/2} H} \right)^{2/(D-1)} \quad (14)$$

连续随机变量 a 的概率分布密度为

$$n(a) = 0.5Da_L^{0.5D}a^{-1-0.5D}, \quad 0 < a \leq a_L \quad (15)$$

式中: a_L 为最大接触点面积。

按照式(15)可得整个结合部的实际接触总面积为

$$A_r = \int_0^{a_L} an(a)da = \frac{D}{2-D}a_L \quad (16)$$

式(16)亦不同于文献[3]的 $a_L = \frac{D}{2-D}A_r$ 、文献

[9]的 $a_L = \frac{D}{2-D}A_r$ (如设 $D = 1.5$, 则 $a_L = 3A_r > A_r$, 局部大于整体, 显然不合理)。

单个微凸体承担垂直于结合部的法向弹性载荷为

$$P_e(\delta) = \frac{4}{3}E'R^{1/2}\delta^{1.5} \quad (17)$$

将式(9)的第1部分 $\delta = \frac{a}{\pi R}$ 代入式(17)得

$$P_e(a) = \frac{4}{3\pi^{1.5}} \frac{E'a^{1.5}}{R} \quad (18)$$

将式(9)代入式(18)得

$$P_e(a) = \frac{4}{3\pi^{1/2}}E'G^{D-1}a^{1.5-0.5D} \quad (19)$$

单个微凸体分担的法向塑性载荷为

$$P_p(a) = Ha = K\sigma_y a \quad (20)$$

当 $a_L > a_c$ 时, 整个结合部的总法向载荷为

$$P(a_L > a_c) = \int_{a_c}^{a_L} P_e(a)n(a)da + \int_0^{a_c} P_p(a)n(a)da = \frac{4}{3\pi^{1/2}}E'G^{D-1} \int_{a_c}^{a_L} a^{1.5-0.5D}n(a)da + K\sigma_y \int_0^{a_c} an(a)da \quad (21)$$

洛必达法则为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^x \ln d - e^x \ln e}{1} = \ln d - \ln e = \ln \frac{d}{e} \quad (22)$$

将式(15)代入式(21)并考虑式(22)得

$$P(A_r > A_{rc}) = P(a_L > a_c) = \begin{cases} \frac{2D}{3\pi^{1/2}(1.5-D)}E'G^{D-1}a_L^{0.5D}(a_L^{1.5-D} - a_c^{1.5-D}) + \frac{DK}{2-D}\sigma_y a_L^{0.5D}a_c^{1-0.5D}, & D \neq 1.5 \\ E'\left(\frac{G}{\pi}\right)^{1/2}a_L^{0.75}\ln \frac{a_L}{a_c} + 3K\sigma_y a_L^{0.75}a_c^{0.25}, & D = 1.5 \end{cases} \quad (23)$$

式中: $A_{rc} = \frac{D}{2-D}a_c$ 为实际临界接触面积。

由式(16)得

$$\frac{a_L}{A_a} = \frac{2-D}{D} \frac{A_r}{A_a} = \frac{2-D}{D}A_r^* \quad (24)$$

式中: A_a 为名义接触面积; $A_r^* = \frac{A_r}{A_a}$ 为接触率。

应用式(22)、(24), 式(23)的无量纲形式为

$$P^*(A_r^* > A_{rc}^*) = \frac{P(A_r > A_{rc})}{E'A_a} = \begin{cases} \frac{2D}{3\pi^{1/2}(1.5-D)}G^{*D-1}\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{0.5D}\left[\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{1.5-D} - a_c^{*1.5-D}\right] + K\phi A_r^{*0.5D}\left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{1-0.5D}, & D \neq 1.5 \\ \left(\frac{G^*}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{0.75}\ln \frac{A_r^*}{3a_c^*} + K\phi A_r^{*0.75}(3a_c^*)^{0.25}, & D = 1.5 \end{cases} \quad (25)$$

式中: $G^* = \frac{G}{A_a^{1/2}}$; $a_c^* = \frac{a_c}{A_a} = (0.5\pi^{1/2}K\phi)^{2/(1-D)}G^{*2}$;

$$A_{rc}^* = \frac{A_{rc}}{A_a} = \frac{D}{2-D}a_c^*。$$

2 整个固定结合部的切向静弹性刚度

2个半球体微接触点的相对切向变形量为^[10]

$$t = \frac{3}{16Gr}f\bar{P}\left[1 - \left[1 - \frac{\bar{Q}_x}{f\bar{P}}\right]^{2/3}\right] \quad (26)$$

式中: f 为结合部最大静摩擦系数; $\bar{P}$ 为一个半球微凸体所受的切向载荷; $\bar{G}$ 为结合部两接触材料的当量剪切弹性模量; r 为微滑接触圆环的外半径; $\bar{Q}_x$ 为一个半球体单峰所受的微滑切向载荷。结合部两接触材料的当量剪切弹性模量计算式为

$$\bar{G} = \left(\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2}\right)^{-1} \quad (27)$$

式中: ν_1 、 ν_2 分别为表面1、2的泊松比; G_1 、 G_2 分别为表面1、2的切变模量。

结合部最大静摩擦系数 f 的值由材料和接触面的物理条件决定。设两表面材料相同, 弹性模量为 E , 切变模量为 g , 总法向载荷 W 产生的法向应变能密度为

$$\nu_\epsilon = \frac{1}{2E}\sigma^2 = \frac{1}{2E}\left(\frac{W}{A_r}\right)^2 \quad (28)$$

式中: σ 为接触表面处的正应力。

摩擦力 F 产生的切向应变能密度为

$$\nu_\gamma = \frac{1}{2g}\tau^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{F}{A_r}\right)^2 \quad (29)$$

式中: τ 为接触表面处的剪应力。

当摩擦力 F 较小时, 切向应变能密度小于法向应变能密度, F 为静摩擦力, 两摩擦表面没有相对运动。随着摩擦力 F 的增加, 当切向应变能密度超过

法向应变能密度时,两摩擦表面出现相对滑动,此时摩擦力为临界值(最大静摩擦力),即 $\nu_{\epsilon}=\nu_{\gamma}$,也就是

$$\frac{1}{2E}\left(\frac{W}{A_r}\right)^2=\frac{1}{2g}\left(\frac{F}{A_r}\right)^2$$

(30)

由式(30)得

$$F=W\left(\frac{g}{E}\right)^{1/2}$$

(31)

表 1 部分结合部最大静摩擦系数

摩擦副材料	g/GPa	E/GPa	f
铸铁-铸铁	45	110~160	0.530 3~0.639 6
球墨铸铁-球墨铸铁	61	151~160	0.617 5~0.635 6
碳钢铸钢-碳钢铸钢	81	200~220	0.606 8~0.636 4
合金钢-合金钢	81	210	0.621 1
青铜-青铜	42	105~115	0.604 3~0.632 5
黄铜-黄铜	40	91~110	0.603 0~0.663 0
硬铝合金-硬铝合金	27	71	0.616 7
轧制锌-轧制锌	32	84	0.617 2
铅-铅	7	17	0.641 7
玻璃-玻璃	20~22	55	0.603 0~0.632 5
混凝土-混凝土	4.9~15.7	14~23	0.591 6~0.826 2
纵纹木材-纵纹木材	0.5	9.8~12	0.204 1~0.225 9
横纹木材-横纹木材	0.44~0.64	0.5~0.7	0.938 1~0.956 2
电木-电木	0.69~2.06	1.96~2.94	0.593 3~0.837 1
尼龙-尼龙	1.01	2.83	0.597 4

由式(26)得

$$\bar{Q}_x(t)=f\bar{P}-f\bar{P}\left[1-\frac{16\bar{G}r}{3f\bar{P}}t\right]^{3/2}$$

(33)

函数 $\bar{Q}_x$ 对自变量 t 的一阶导数为

$$k_t=\frac{\text{d}\bar{Q}_x(t)}{\text{d}t}=8\bar{G}r\left[1-\frac{16\bar{G}r}{3f\bar{P}}t\right]^{1/2}$$

(34)

将式(26)代入式(34)得

$$k_t=8\bar{G}r\left[1-\frac{\bar{Q}_x}{f\bar{P}}\right]^{1/3}$$

(35)

同种材料时, $\nu_1=\nu_2=\nu, G_1=G_2=G$, 由式(27)得

$$\bar{G}=\frac{G}{2(2-\nu)}$$

(36)

将式(36)代入式(35)得

$$k_t=\frac{4Gr}{2-\nu}\left[1-\frac{\bar{Q}_x}{f\bar{P}}\right]^{1/3}$$

(37)

若 $\bar{Q}_x\ll f\bar{P}$, 由式(37)得^[12]

$$k_t\approx\frac{4Gr}{2-\nu}$$

(38)

可见,接触刚度的单位是 N/m。文献[13]中接触刚度的单位是 $\text{Pa}\cdot\text{m}^{1/2}$, 这是由于文献[13]混淆了类似接触刚度与接触刚度的概念。

式(35)可以表达为

故结合部最大静摩擦系数

$$f=\frac{F}{W}=\left(\frac{g}{E}\right)^{1/2}$$

(32)

按照式(32)可得表 1 中两摩擦副材料对应的最大静摩擦系数,表 1 中的一些数据不同于文献[11]。

$$k_t=\frac{8}{\pi^{1/2}}\left[1-\frac{\bar{Q}_x}{f\bar{P}}\right]^{1/3}\bar{G}a^{1/2}$$

(39)

总载荷满足下列关系式^[10]

$$\frac{\bar{Q}_x}{\bar{P}}=\frac{Q_x}{P}$$

(40)

式中: Q_x 为结合部承担的总切向载荷。

将式(40)代入式(39)得

$$k_t(a)=\frac{8}{\pi^{1/2}}\left(1-\frac{Q_x}{fP}\right)^{1/3}\bar{G}a^{1/2}$$

(41)

根据式(41),结合部整体切向接触静弹性刚度为

$$K_t(a_L>a_c)=\int_{a_c}^{a_L}k_t(a)n(a)\text{d}a=$$
$$\frac{8}{\pi^{1/2}}\left(1-\frac{Q_x}{fP}\right)^{\frac{1}{3}}\bar{G}\int_{a_c}^{a_L}a^{1/2}n(a)\text{d}a$$

(42)

将式(15)代入式(42)且鉴于式(22)得

$$K_t(A_r>A_{re})=$$
$$\begin{cases}\frac{8D}{\pi^{1/2}(1-D)}\left(1-\frac{Q_x}{fP}\right)^{1/3}\bar{G}a_L^{0.5D}(a_L^{0.5-0.5D}-a_c^{0.5-0.5D}), & D\neq 1 \\ \frac{4}{\pi^{1/2}}\left(1-\frac{Q_x}{fP}\right)^{1/3}\bar{G}a_L^{1/2}\ln\frac{a_L}{a_c}, & D=1\end{cases}$$

(43)

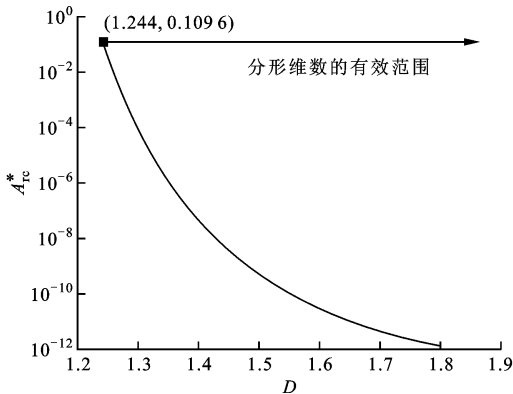
根据式(22)、(24),将式(43)进行无量纲化得

$$K_t^*(A_r^* > A_{rc}^*) = \frac{K_t(A_r > A_{rc})}{\bar{G}A_a^{1/2}} = \begin{cases} \frac{8D}{\pi^{1/2}(1-D)} \left(1 - \frac{Q_x}{fP}\right)^{1/3} \left(\frac{2-D}{D} A_r^*\right)^{0.5D} \\ \left[\left(\frac{2-D}{D} A_r^*\right)^{0.5-0.5D} - a_c^{*0.5-0.5D} \right], & D \neq 1 \\ \frac{4}{\pi^{1/2}} \left(1 - \frac{Q_x}{fP}\right)^{1/3} A_r^{*1/2} \ln \frac{A_r^*}{a_c^*}, & D = 1 \end{cases} \quad (44)$$

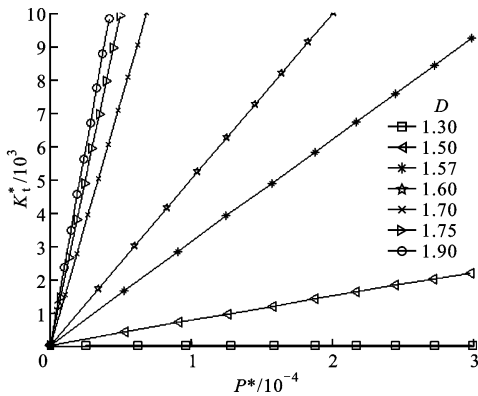
3 工程粗糙表面数字仿真实例

将结合部表面轮廓高度数据进行离散,用 Matlab 软件编制结合部的功率谱密度函数或结构函数,通过最小二乘法的一次多项式拟合,可识别结合部的表面轮廓分形维数和分形粗糙度。

当 $K=1, \phi=10^{-2}, f=0.2, Q_x/P=0.02, G^*=10^{-9}$ 时,图 1 给出了最小有效表面轮廓分形维数、总切向接触刚度的变化情况。



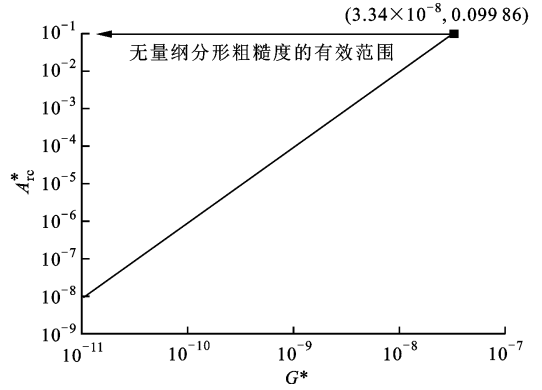
(a) 最小有效表面轮廓分形维数



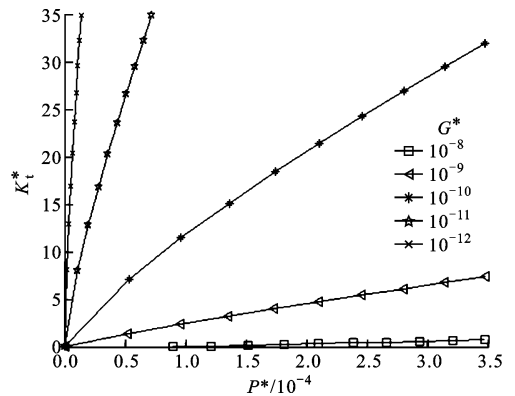
(b) 总切向接触刚度

图 1 最小有效表面轮廓分形维数和总切向接触刚度的变化

当 $K=1, \phi=10^{-2}, f=0.2, Q_x/P=0.02, D=1.3$ 时,图 2 给出了最大有效分形粗糙度、总切向接触刚度的变化。



(a) 最大有效分形粗糙度



(b) 总切向接触刚度

图 2 最大有效分形粗糙度和总切向接触刚度的变化

当 $K=1, \phi=10^{-2}, f=0.2, D=1.5, G^*=10^{-10}$ 时,图 3 给出了总切向接触刚度-法向载荷曲线。

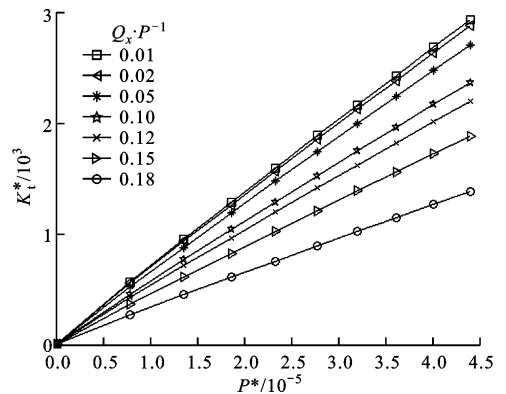


图 3 各种 Q_x/P 下总切向接触刚度-法向载荷曲线

当 $K=1, \phi=10^{-2}, Q_x/P=0.02, D=1.5, G^*=10^{-10}$ 时,图 4 给出了总切向接触刚度-法向载荷曲线。

图 1b、2b、3、4 皆表明,在较大范围内切向接触静弹性刚度基本上随着总法向载荷的增加线性增加,与文献[14]的有限元计算结果吻合。切向接触

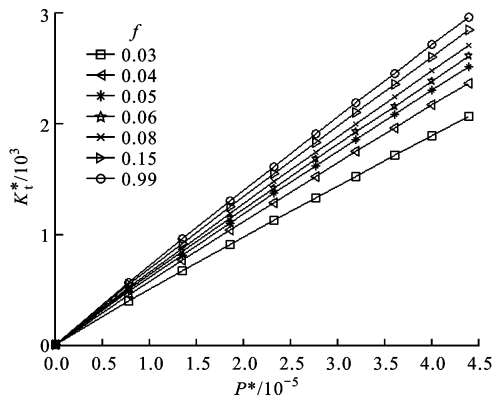


图 4 各种 f 下总切向接触刚度-法向载荷曲线

静弹性刚度随着表面轮廓分形维数的增加而增大(见图 1b),随着分形粗糙度的减小而增大(见图 2b)。图 3 表明,结合部在恒定法向载荷作用下,切向接触静弹性刚度随着总切向载荷的增加而减小,与文献[15]数值方法的结果一致。按照图 4,切向接触静弹性刚度随着结合部最大静摩擦系数的增加而增大,与文献[14]的有限元计算结果相同。可见,本文校正分形接触理论的方法较合理。

4 结 论

(1)消去中间自变量(接触率),结合部切向接触静弹性刚度(式(44))是施加在结合部上总法向载荷(式(25))的复杂隐函数,此种复杂隐函数不能被化成显函数。结合部切向接触静弹性刚度随着表面轮廓分形维数、最大静摩擦系数的增加而增大,随着分形粗糙度、总切向载荷的减小而增大。

(2)结合部不仅限于螺栓联接结合部,对于非固定结合部,如静压导轨可动结合部、滑动导轨可动结合部等,虚拟材料模型^[16]与赫兹椭圆接触^[17]相结合可能更具优势。

参考文献:

- [1] 田红亮,赵春华,朱大林,等. 整个螺栓结合部的法向连接刚度及试验验证 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(9): 31-36.
TIAN Hongliang, ZHAO Chunhua, ZHU Dalin, et al. Analysis and validation on normal connection dynamic stiffness of bolted joint interface ensemble [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(9): 31-36.
- [2] 高进,袁奇,李浦,等. 燃气轮机拉杆转子考虑接触效应的扭转振动模态分析 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(12): 9-13, 18.

GAO Jin, YUAN Qi, LI Pu, et al. Torsional vibration modal analysis for a rod-fastened gas turbine rotor considering contact effects [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(12): 9-13, 18.

- [3] 张学良,温淑花,徐格宁,等. 结合部切向接触刚度分形模型研究 [J]. 应用力学学报, 2003, 20(1): 70-72.
ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, XU Gening, et al. Fractal model of the tangential contact stiffness of machined surfaces in contact [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003, 20(1): 70-72.
- [4] 田红亮,方子帆,朱大林,等. 固定接触界面切向静弹性刚度问题研究 [J]. 应用力学学报, 2011, 28(5): 458-464.
TIAN Hongliang, FANG Zifan, ZHU Dalin, et al. Investigation on tangential static elastic stiffness of fixed contact interface [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011, 28(5): 458-464.
- [5] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.
- [6] 田红亮,朱大林,秦红玲. 固定接触界面法向静弹性刚度的改进弹簧分形模型 [J]. 三峡大学学报: 自然科学, 2012, 34(6): 83-88.
TIAN Hongliang, ZHU Dalin, QIN Hongling. Improved spring fractal model for normal static elastic stiffness of stationary contact interface [J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012, 34(6): 83-88.
- [7] 尤晋闽,陈天宁. 结合面法向动态参数的分形模型 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(9): 91-94.
YOU Jinmin, CHEN Tianning. Fractal model for normal dynamic parameters of joint surfaces [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(9): 91-94.
- [8] JACKSON R L, GREEN I. A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat [J]. ASME Journal of Tribology, 2005, 127(2): 343-354.
- [9] 张学良,温淑花. 基于接触分形理论的结合面切向接触刚度分形模型 [J]. 农业机械学报, 2002, 33(3): 91-93, 97.
ZHANG Xueliang, WEN Shuhua. A fractal model of tangential contact stiffness of joint surfaces based on the contact fractal theory [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2002, 33(3): 91-93, 97.
- [10] 田红亮,刘芙蓉,方子帆,等. 引入各向同性虚拟材料的固定结合部模型 [J]. 振动工程学报, 2013, 26

- (4): 561-573.
- TIAN Hongliang, LIU Furong, FANG Zifan, et al. Immovable joint surface's model using isotropic virtual material [J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(4): 561-573.
- [11] 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理 [M]. 4 版. 北京: 清华大学出版社, 2012: 233-234, 474.
- [12] JIANG Shuyun, ZHENG Yunjian, ZHU Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory [J]. ASME Journal of Tribology, 2010, 132(1): 1-7.
- [13] 方子帆, 肖华攀, 何孔德, 等. 桥式起重机行走机构的虚拟样机建模及动态仿真研究 [J]. 三峡大学学报: 自然科学, 2012, 34(3): 87-90.
- FANG Zifan, XIAO Huapan, HE Kongde, et al. Virtual prototype model and dynamic simulation research on bridge crane traveling mechanism [J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012, 34(3): 87-90.
- [14] 李辉光, 刘恒, 虞烈. 粗糙机械结合面的接触刚度研究 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(6): 69-74.
- LI Huiguang, LIU Heng, YU Lie. Contact stiffness of rough mechanical joint surface [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(6): 69-74.
- [15] 刘意, 刘恒, 易均, 等. 切向接触刚度测量方法的理论改进 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(1): 66-69.
- LIU Yi, LIU Heng, YI Jun, et al. Theoretical modification for the measurement method of shear contact stiffness [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(1): 66-69.
- [16] 田红亮, 赵春华, 朱大林, 等. 弹塑性三维各向异性分形表面的接触分析 [J]. 三峡大学学报: 自然科学, 2012, 34(1): 69-73.
- TIAN Hongliang, ZHAO Chunhua, ZHU Dalin, et al. Contact analysis of elastoplastic three-dimensional anisotropic fractal surfaces [J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012, 34(1): 69-73.
- [17] 田红亮, 方子帆, 朱大林. 赫兹点接触 133 年 [J]. 三峡大学学报: 自然科学, 2014, 36(2): 88-97.
- TIAN Hongliang, FANG Zifan, ZHU Dalin. 133 years of Hertz point contact [J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2014, 36(2): 88-97.

(编辑 苗凌)

(上接第 45 页)

- [5] MIKALSEN R, ROSKILLY A P. Performance simulation of a spark ignited free-piston engine generator [J]. Applied Thermal Engineering, 2008, 28(15): 1726-1733.
- [6] 肖翀, 左正兴. 自由活塞发电机动力学过程的非线性模型 [J]. 北京理工大学学报, 2009, 28(11): 966-969.
- XIAO Chong, ZUO Zhengxing. Nonlinear model and first order approximate solution of a free piston generator [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2009, 28(11): 966-969.
- [7] 袁晨恒, 冯慧华, 许大涛, 等. 自由活塞内燃发电机稳定运行参数耦合分析 [J]. 农业机械学报, 2013, 44(7): 1-5.
- YUAN Chenheng, FENG Huihua, XU Datao, et al. Parameters coupling analysis on the stable operation process of free-piston engine generator [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(7): 1-5.
- [8] XIAO J, LI Q, HUANG Z. Motion characteristic of a free piston linear engine [J]. Applied Energy, 2010, 87(4): 1288-1294.
- [9] 李庆峰, 肖进, 黄震. 变压缩比下自由活塞式内燃发电机的效率分析 [J]. 上海交通大学学报, 2009, 43(5): 745-749.
- LI Qingfeng, XIAO Jin, HUANG Zhen. Simulation of a two stroke HCCI free piston linear alternator [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2009, 43(5): 745-749.
- [10] 周盛, 徐兵, 杨华勇. 双活塞式液压自由活塞发动机运动特性 [J]. 机械工程学报, 2006, 42(增): 1-4.
- ZHOU Sheng, XU Bing, YANG Huayong. Dynamic characteristic of dual hydraulic free-piston engine [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(S): 1-4.

(编辑 苗凌)