

DOI: 10.7652/xjtuxb201501001

谱元方法求解对流扩散方程及其稳定性分析

和文强, 秦国良

(西安交通大学流体机械研究所, 710049, 西安)

摘要: 探讨了一维对流扩散方程的一种高精度数值解法, 该解法在空间上采用了 Chebyshev 谱元方法, 在时间上结合了半隐式 Adams 方法。通过数值算例验证了解法的可行性, 利用特征分析法得到了对流扩散方程谱元求解时不同离散形式的稳定性条件, 并对数值求解的稳定性进行了预测。通过时间步长、网格划分、对流项和黏性项插值阶数的影响研究表明: 耦合 Chebyshev 谱元方法和半隐式 Adams 方法在求解对流扩散方程时能够获得高精度的数值解; 时间离散时 Adams 方法的黏性项采用一阶插值形式、对流项采用二阶插值形式, 在未增加计算量的同时能够获得较大的稳定区域和较高的计算精度。

关键词: 对流扩散方程; 谱元法; 稳定性; 半隐式 Adams 方法

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2015)01-0006-01

Spectral Element Method for Convection-Diffusion Equation with Stability Analysis

HE Wenqiang, QIN Guoliang

(Institute of Fluid Machinery, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The Chebyshev spectral element method combining with the semi-implicit Adams method is presented for solving the one-dimensional convection-diffusion equation, and the feasibility is verified by a numerical example. The stability condition of different discrete forms of spectral element method is deduced with character analysis, and the influences of time step, grid partitioning, interpolation order of convective and viscous terms are discussed. It is demonstrated that numerical solution with high accuracy can be gained with the coupled spectral element and semi-implicit Adams method for the convection-diffusion equation. Larger stability domain and higher accuracy can be achieved without extra-calculation as first-order viscous terms and second-order convective terms are interpolated in Adams method.

Keywords: convection-diffusion equation; spectral element method; stability; semi-implicit Adams method

对流扩散方程是描述流体流动和传热、污染物输移和扩散、电化学反应等的典型方程之一, 利用数值方法进行求解时, 由于对流项的存在, 求解过程可能会出现不稳定现象, 因此数值方法的稳定性问题一直是对流扩散方程研究的热点。当对流扩散方程

的对流项占优时, 应用传统的有限差分法和有限元法求解会出现数值振荡^[1-2], Gottlieb 等在利用拟谱方法求解时也发现了不稳定现象^[3], 而 Mofid 等通过引入罚方法来处理边界条件能够部分或完全避免这种不稳定现象^[4]。

收稿日期: 2014-04-21。 作者简介: 和文强(1982—), 男, 博士生; 秦国良(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(2012CB026004)。

网络出版时间: 2014-10-31

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20141031.1643.019.html>

谱元方法^[5]结合了谱方法的高精度和有限元法的灵活性特点,使得对流扩散问题求解有望获得高精度的数值解。目前,谱元方法应用的主要障碍是高雷诺数 Re 下的稳定性问题。因为谱元方法在单元上需对求解变量进行谱近似,当 Re 增大、黏性耗散作用减小时,任意微小扰动都会引起单元数值解不稳定且最终扩展到整个求解区域。为了扩大 Re 范围,一些稳定性措施^[6-7]引入到了谱元方法之中。

本文在前期谱元方法^[8]研究的基础上,采用特征分析法系统地分析了 Chebyshev 谱元方法的半离散形式和 Chebyshev 谱元方法耦合半隐式 Adams 时间离散方法的全离散形式的稳定性条件,讨论了半隐式 Adams 时间离散方法中对流项和黏性项在不同插值阶数、网格划分、时间步长时对稳定性的影响,探索了最优离散格式,试图扩大稳定区域,提高计算精度和计算效率,最后结合具体算例对 Chebyshev 谱元方法耦合半隐式 Adams 方法在求解对流扩散方程时的有效性进行了验证。

1 对流扩散方程

一维对流扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

式中: f 为源项; $Re = \frac{aL}{\mu}$, L 为特征长度, a 为特征速度, μ 为扩散系数。相应的初始条件和边界条件为

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

$$u(0, t) = g_1(t); \quad u(1, t) = g_2(t) \quad (3)$$

2 谱元方法

仅考虑 Re 影响,式(1)的 Galerkin 变分形式为

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int \frac{\partial u}{\partial x} v dx + \frac{1}{Re} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int f v dx \quad (4)$$

原微分方程的变分问题:求 $u \in H^1$ 使得

$$\mathbf{B}(u, v) = f(v), \quad \forall v \in H^1$$

$$\mathbf{B}(u, v) = \int \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int \frac{\partial u}{\partial x} v dx + \frac{1}{Re} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$f(v) = \int f v dx$$

将计算区域 Ω 划分为 N_m 个互相不重叠的单元 Ω_i , $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_m} \Omega_i$, 每个单元通过映射转化到标准单元 $e = [-1, 1]$ 上。在标准单元内选取切比雪夫多项式极值点作为插值点,则试探函数和检验函数分别为

$$u^i(\xi) = \sum_{j=0}^{N_x} u_j^i(t) h_j^i(\xi) \quad (5)$$

$$v^i(\xi) = \sum_{k=0}^{N_x} v_k^i(t) h_k^i(\xi) \quad (6)$$

插值函数为

$$\left. \begin{aligned} h_j^i(\xi) &= \frac{2}{N_x} \sum_{m=0}^{N_x} \frac{1}{c_j c_m} T_m(\xi_j^i) T_m(\xi) \\ h_k^i(\xi) &= \frac{2}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x} \frac{1}{c_k c_n} T_n(\xi_k^i) T_n(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: T_m 、 T_n 为 Chebyshev 多项式; N_x 为单元网格数; c_m 满足

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0, N_x \\ 1, & m \neq 0, N_x \end{cases} \quad (8)$$

在单元外, $h_j^i(\xi)$ 、 $h_k^i(\xi)$ 为 0; 在单元内, $h_j^i(\xi_p) = \delta_{jp}$, $h_k^i(\xi_q) = \delta_{kq}$ 。

在标准单元内对式(4)进行离散得

$$B_{jk}^i \frac{du^i}{dt} + C_{jk}^i u^i + \frac{1}{Re} A_{jk}^i u^i = B_{jk}^i f^i \quad (9)$$

式中: A_{jk}^i 、 B_{jk}^i 、 C_{jk}^i 均为有关 Chebyshev 多项式的特殊积分,利用 Chebyshev 多项式的性质可精确求出。将式(9)中的单元矩阵按照有限元中合成总矩阵的原则进行叠加,即可得到整个求解区域的一般动力学方程,即

$$\mathbf{B} \frac{du}{dt} + \mathbf{C}u + \frac{1}{Re} \mathbf{A}u = \mathbf{B}f \quad (10)$$

式(10)为 u 关于时间的一阶线性常微分方程组。

3 时间离散

式(10)在时间上的逐步积分途径一般有显式和隐式两种。显式积分计算效率较高,需要的计算机内存相对较小,但计算精度较低,条件稳定;隐式积分的精度高,稳定性较好,但每一个积分步都要求解一个线性方程组,不便于直接计算。本文时间项采用半隐式 Adams 方法进行离散,对流项采用 J_e 阶显式 Adams-Bashforth 形式,黏性项采用 J_i 阶隐式 Adams-Monlton 形式^[9],这样便融合了显式方法耦合简单和隐式方法稳定性好的特点。式(10)的全离散形式为

$$\mathbf{B}u^{n+1} = \mathbf{B}u^n - \mathbf{C}\Delta t \sum_{j=0}^{J_e-1} \beta_j u^{n-j} - \frac{1}{Re} \mathbf{A}\Delta t \sum_{k=0}^{J_i-1} \gamma_k u^{n+1-k} + \mathbf{B}\Delta t f^{n+1} \quad (11)$$

式中: β_j 为 Adams-Bashforth 系数^[10]; γ_k 为 Adams-Monlton 系数^[10]。

4 谱元方法的稳定性分析

4.1 半离散方程的稳定性

将式(10)两侧左乘 $\mathbf{B}$ 的逆矩阵可得

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{D}u + f \quad (12)$$

式中: $\mathbf{D} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} - \frac{1}{Re}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ 。

由于仅考虑第一类边界条件,所以在边值计算中不引入误差,而假定在初值的计算中引入了扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, 扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 满足

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1})$; $\mathbf{L}$ 为 $\mathbf{D}$ 的内配置点 $n-1$ 阶子矩阵。

根据 Lyapunov 稳定性理论^[11], 式(12)稳定的充要条件为矩阵 $\mathbf{L}$ 的一切特征根都有非正实部, 且每个有 0 实部的特征根对应矩阵 $\mathbf{L}$ 的约当标准形中的一维约当块。也就是说, 如果存在一个有正实部的特征根, 式(12)对于任何时间离散都是不稳定的。矩阵 $\mathbf{L}$ 的特征值实部最大值与 Re 、单元数、单元网格数的关系如图 1 所示。

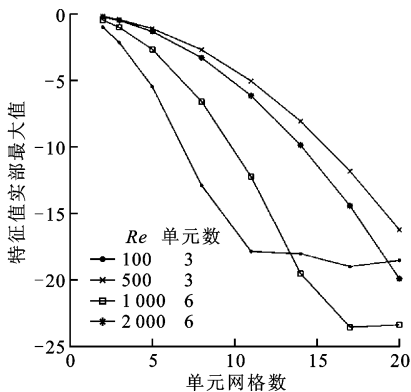


图 1 特征值实部最大值与单元数、单元网格数的关系

对于不同的 Re 和单元网格数, 图 1 中 2 种单元划分的空间谱元离散始终满足半离散方程稳定性要求, 其他单元划分的情形也可以进行验证。

4.2 全离散方程的稳定性

4.2.1 单步法全离散的稳定性条件 采用半隐式 Adams 法时间离散, 对流项、黏性项的插值阶数均为 1, 即 $n+1$ 时刻的变量仅与 n 时刻的变量相关时, 式(11)可表示为

$$u^{n+1} = \phi(\Delta t \mathbf{C})u^n + \phi_f(\Delta t \mathbf{B})f^{n+1} \quad (14)$$

式中: ϕ, ϕ_f 为时间离散函数。

扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的全离散形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon}^n \quad (15)$$

Sousa 分析了形如式(14)的全离散格式的稳定性条件^[12], 即: 当 $\mathbf{L}$ 为正规矩阵时, 其谱半径 $\rho(\mathbf{L}) \leq 1$ 为稳定的充分条件; 当 $\mathbf{L}$ 为非正规矩阵时, 其谱半径 $\rho(\mathbf{L}) \leq 1$ 仅为稳定的必要条件。可以验证, 当采用的 Chebyshev 函数为单元基函数时, $\mathbf{L}$ 为正规矩阵, 所以单步谱元法稳定的充分条件为 $\rho(\mathbf{L}) \leq 1$ 。

4.2.2 多步法全离散的稳定性条件 采用半隐式 Adams 法时间离散, 对流项或黏性项的插值阶数大于 1, 即 $n+1$ 时刻的变量与前 $n-k+1$ 时刻的变量相关时, 式(11)可表示为

$$u^{n+1} = \sum_{j=1}^k \phi_j(\Delta t \mathbf{D}_{n-k+j})u^{n-k+j} + \phi_f(\Delta t \mathbf{B})f^{n+1} \quad (16)$$

$n = k, k+1, k+2, \dots$

式中: ϕ_j, ϕ_f 为时间离散函数; $\mathbf{D}_{n-k+j}$ 为 u^{n-k+j} 的系数矩阵。

扰动 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的全离散形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} = \sum_{j=1}^k \mathbf{L}_j \boldsymbol{\varepsilon}^{n-k+j} \quad (17)$$

$n = k, k+1, k+2, \dots$

式中: $\mathbf{L}_j$ 为 $\phi_j(\Delta t \mathbf{D}_{n-k+j})$ 的内配置点 $n-1$ 阶子矩阵。

Dorsselaer 等分析了形如式(16)的全离散格式的稳定性条件^[13], 定义扰动

$$\mathbf{V}^{n+1} = ((\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1})^T, (\boldsymbol{\varepsilon}^n)^T, \dots, (\boldsymbol{\varepsilon}^{n-k+1})^T)^T$$

满足

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{E}\mathbf{V}^n, \quad n \geq k \quad (18)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{L}_{k-1} & \mathbf{L}_{k-2} & \cdots & \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

式中: $\mathbf{I}$ 为单位矩阵; $\mathbf{0}$ 为零矩阵。

多步谱元法稳定的充分条件为 $\rho(\mathbf{E}) \leq 1$ 。

4.3 不同形式全离散方程的稳定区域

通过选用 4 种不同的网格划分方式, 分别表示为 $3 \times 5 (N_m = 3, N_x = 5)$ 、 $5 \times 7 (N_m = 5, N_x = 7)$ 、 $10 \times 6 (N_m = 10, N_x = 6)$ 、 $10 \times 10 (N_m = 10, N_x = 10)$, 时间(计算时间与特征时间的比值)步长 $\Delta t \in [0.001, 0.1]$, 来比较不同网格划分、时间步长和时间离散方式的求解稳定性。

对于半隐式 Adams 法时间离散, 当对流项采用一阶插值形式, 黏性项分别采用一阶、二阶插值形式时, 式(10)的全离散形式可分别表示为

$$\mathbf{B} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \mathbf{C}u^n = -\frac{1}{Re}\mathbf{A}u^{n+1} + \mathbf{B}f^{n+1} \quad (19)$$

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + Cu^n = -\frac{1}{2Re} A(u^{n+1} + u^n) + Bf^{n+1} \quad (20)$$

将式(19)、式(20)分别表示为式(14)、式(16)的形式,即可由单步法和多步法的稳定性条件对求解稳定性进行判定。对流项一阶插值,黏性项一阶、二阶插值时的求解稳定域如图2所示。从图2可以看出,黏性项二阶插值的稳定域和一阶插值基本相同,网格划分对稳定域的影响很小,上临界 Re 随着时间步长的减小而逐步增大。

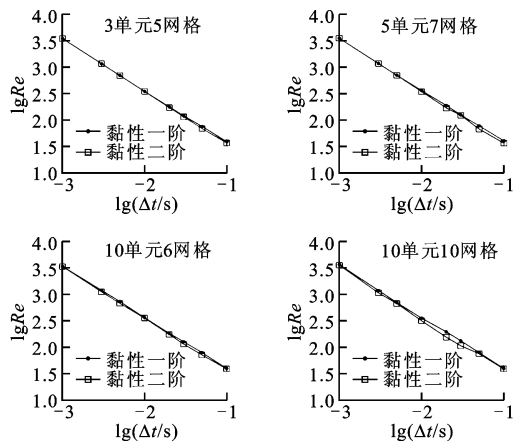


图2 黏性项不同插值阶数的稳定性曲线

对于半隐式 Adams 法时间离散,对流项采用一阶插值形式,黏性项采用三阶插值形式时,式(10)的全离散形式可表示为

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + Cu^n = -\frac{1}{12Re} A(5u^{n+1} + 8u^n - u^{n-1}) + Bf^{n+1} \quad (21)$$

将式(21)表示为式(16)的形式,利用多步法稳定性条件对求解稳定性进行判定。对流项一阶插值、黏性项三阶插值时的求解稳定域如图3所示。从图3可以看出,黏性项三阶插值时,不仅存在上临界 Re ,也存在下临界 Re ,只有当 Re 位于上临界 Re 和下临界 Re 之间时求解才是稳定的。上临界 Re 随时间步长的增大而减小,下临界 Re 随时间步长的增大而增大,同时求解稳定域随网格节点数的增加而减小。黏性项三阶插值对求解的稳定性的影响很大,且显著减小了稳定域的范围。

对于半隐式 Adams 法时间离散,当黏性项采用一阶插值形式,对流项分别采用二阶、三阶插值形式时,式(10)的全离散形式可表示为

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} C(3u^n - u^{n-1}) = -\frac{1}{Re} Au^{n+1} + Bf^{n+1} \quad (22)$$

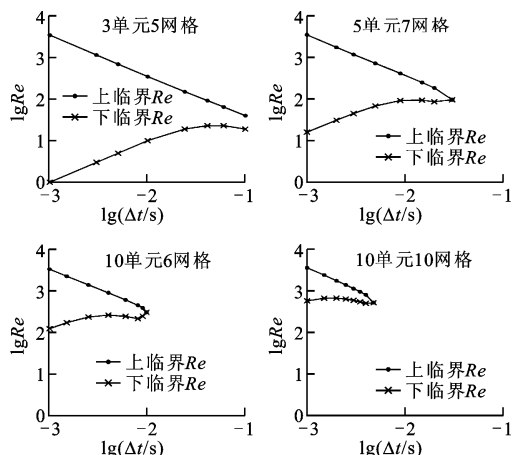


图3 黏性项三阶插值的稳定性曲线

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{12} C(23u^n - 16u^{n-1} + 5u^{n-2}) = -\frac{1}{Re} Au^{n+1} + Bf^{n+1} \quad (23)$$

将式(22)、式(23)表示为式(16)的形式,同样利用多步法稳定性条件对求解稳定性进行判定。黏性项一阶插值,对流项一阶、二阶、三阶插值时的求解稳定域如图4所示。从图4可以看出:对流项二阶插值存在临界时间步长,上临界 Re 在时间步长大于临界值时有所减小,在时间步长小于临界值时大幅度增加;对流项三阶插值也存在临界时间步长,上临界 Re 在时间步长大于临界值时比二阶插值进一步减小,在时间步长小于临界值时迅速增加到无穷大。网格节点数对临界时间步长的影响也很大,随节点数的增加,临界时间步长减小,对于 10×10 的网格划分,二阶、三阶插值的临界时间步长均小于 0.001。

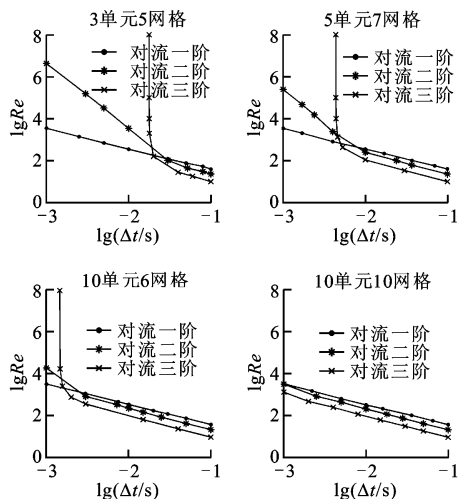


图4 对流项不同插值阶数的稳定性曲线

5 计算实例和数值结果

当 $f=0$ 时,式(1)有解析解 $u(x,t)=\exp(-x+(1+\frac{1}{Re})t)$,相应的初始条件和边界条件可通过将 x,t 的值代入解析解中求得。由数值解和解析解的比较可以验证谱元方法耦合半隐式 Adams 时间离散方法在求解对流扩散方程及其稳定性分析时的准确性。本文采用误差 L_2^n 来考察 n 时间层上数值解的准确性

$$L_2^n = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |u_N^n(x_i, n\Delta t) - u(x_i, n\Delta t)|^2 \right)^{1/2}$$

(24)

统一选取时间步长 $\Delta t=0.001$,比较 3 单元 5 网格和 10 单元 10 网格 2 种网格划分,并给出 $t=1.0$ 时的计算误差。

5.1 单步法全离散数值结果

单步法全离散的数值结果如图 5 所示。 Re 小于上临界 Re 时,2 种网格划分都取得了正确的数值结果,但由于时间离散阶数较低,所以数值结果的精度不高。 Re 大于上临界 Re 时,10 单元 10 网格的数值结果快速发散,3 单元 5 网格的数值结果虽有发散的趋势,但速度非常平缓,说明节点数越多,不稳定作用越强。

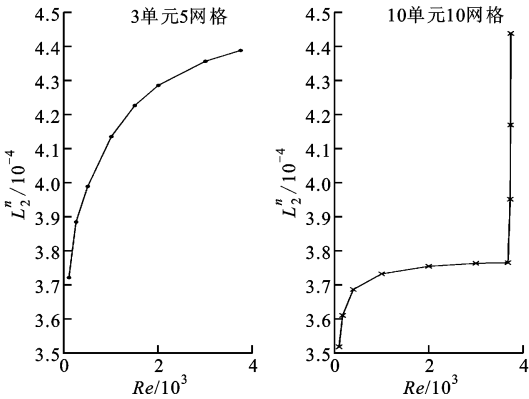


图 5 单步谱元法的计算误差

5.2 多步法全离散数值结果

对流项采用一阶插值,黏性项采用二阶、三阶插值时的数值结果如图 6 所示。对于黏性项二阶插值,当 Re 小于上临界 Re 时,计算误差和一阶插值相差很小;当 Re 大于上临界 Re 且节点数较多时,数值结果的发散速率远大于节点数较少时的发散速率。黏性项三阶插值的计算误差和二阶插值基本相同,当 Re 大于上临界 Re 或小于下临界 Re 且节点数较多时,数值结果快速发散。

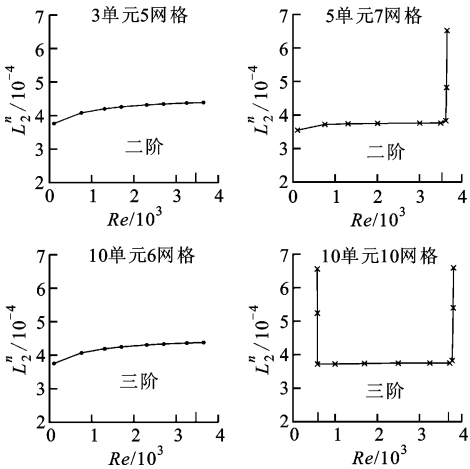


图 6 黏性项二阶、三阶插值的计算误差

黏性项采用一阶插值,对流项采用二阶、三阶插值时的数值结果如图 7 所示。对流项采用二阶插值时,计算误差相较一阶插值大大减小,同时 Re 较大时的误差下降更多, Re 大于上临界 Re 且节点数较多时,数值结果快速发散。对流项三阶插值的计算精度与二阶插值基本相同。

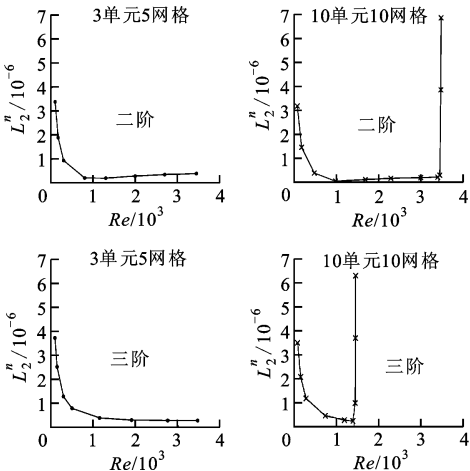


图 7 对流项二阶、三阶插值的计算误差

6 结 论

本文采用 Chebyshev 谱元方法耦合半隐式 Adams 时间离散方法求解了一维对流扩散方程,并对求解过程中方程的半离散和全离散形式的稳定性条件进行了讨论,分析了半隐式 Adams 时间离散对流项、黏性项在不同插值阶数、网格划分和时间步长时对求解稳定性及计算精度的影响,得出如下结论。

- (1)对流扩散方程的空间谱元离散,对于任意的 Re ,网格划分都满足半离散方程的稳定性条件。
- (2)随着对流项插值阶数的增加,求解稳定域得到了扩大,计算精度大大提高。对流项二阶插值、时

间步长小于临界值时,上临界 Re 能取得较大的值;时间步长大于临界值时,上临界 Re 减大幅度减缓,适宜在实际数值计算中应用。

(3)随着黏性项插值阶数的增加,求解稳定域缩小。三阶插值时出现了下临界 Re ,稳定域大大减小。

今后的工作可以从以下两方面展开:在方程中通过增加谱消除人工黏性项,使得谱元方法能够求解的稳定区域扩大;探索高精度的时间处理方法,如时空耦合的最小二乘谱元方法。

参考文献:

- [1] GE L X, ZHANG J. High accuracy iterative solution of convection diffusion equation with boundary layers on nonuniform grids [J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(2): 560-578.
- [2] ZIENKIEWICZ O C, HEINRICH J C. The finite element method and convection problems in fluid mechanics [M]. New York, USA: John Wiley & Sons Inc., 1978: 1-22.
- [3] GOTTLIEB D, ORSZAG S A. Numerical analysis of spectral method: theory and application [M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1977: 139-143.
- [4] MOFID A, PEYRET R. Stability of the Chebyshev collocation approximation to the advection-diffusion equation [J]. Computers Fluids, 1993, 22(4/5): 453-465.
- [5] PETERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(3): 468-488.
- [6] FISCHER P, MULLEN J. Filter-based stabilization of spectral element methods [J]. Comptes Rendus de L'Académie des Sciences, 2001, 332(3): 265-270.
- [7] XU C J, PSAQUETTI R. Stabilized spectral element computations of high Reynolds number incompressible flows [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 196(2): 680-704.
- [8] 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程 [J]. 应用力学学报, 2000, 17(4): 20-26. QIN Guoliang, XU Zhong. A spectral element method for incompressible Navier-Stokes equations [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(4): 20-26.

- [9] 陈雪江, 秦国良, 徐忠. 谱元法和高阶时间分裂法求解方腔顶盖驱动流 [J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 281-285. CHEN Xuejiang, QIN Guoliang, XU Zhong. Spectral element method and high order splitting method for Navies-Stokes equation [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(3): 281-285.
- [10] WILLIAM GEAR C. Numerical initial value problem in ordinary differential equations [M]. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall Inc., 1973: 147-158.
- [11] 张家忠. 非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2010: 12-19.
- [12] ERCILIA S. The controversial stability analysis [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 145(2/3): 777-794.
- [13] VAN DORSSELAER J L M, HUNDSDORFER W. Stability estimates based on numerical ranges with an application to a spectral method [J]. BIT Numerical Mathematics, 1994, 34(2): 228-238.

[本刊相关文献链接]

- 耿艳辉, 秦国良. Chebyshev 谱元法求解含吸收边界的二维均匀稳定流场的声传播. 2012, 46(3): 100-106. [doi: 10.7652/xjtuxb201203018]
- 詹飞龙, 张楚华. 对流扩散方程的拟谱格式稳定性分析及扩稳方法. 2012, 46(3): 113-118. [doi: 10.7652/xjtuxb201203020]
- 孙旭, 张家忠, 黄科峰. 基于弹簧近似的非结构化网格自适应处理方法. 2010, 44(9): 104-108. [doi: 10.7652/xjtuxb201009021]
- 章争荣, 张湘伟. 对流扩散方程的数值流形格式及其稳定性分析. 2010, 44(9): 104-108. [doi: 10.7652/xjtuxb201009021]
- 张荣欣, 秦国良. 用切比雪夫谱元方法求解均匀流场中的声传播问题. 2009, 43(7): 120-124. [doi: 10.7652/xjtuxb200907026]
- 朱昌允, 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解波动方程时显式与隐式差分方法的比较. 2008, 42(9): 1142-1145. [doi: 10.7652/xjtuxb200809017]
- 朱昌允, 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解波动方程及影响其数值精度的相关因素. 2008, 42(1): 56-59. [doi: 10.7652/xjtuxb200801013]
- 许靖, 秦国良, 朱昌允. 谱元方法求解含吸收边界的声学问题. 2007, 41(7): 875-878. [doi: 10.7652/xjtuxb200707027]

(编辑 苗凌)