

DOI: 10.7652/xjtuxb201603001

考虑表面粗糙度和几何曲率的两球体接触问题

田红亮, 余媛, 陈甜敏, 郑金华, 张屹, 赵春华

(三峡大学机械与动力学院, 443002, 湖北宜昌)

摘要: 为探讨曲面结合面的接触机理, 研究了两球体的法向接触问题。计入结合面虚拟材料厚度, 对两球体点高副接触时形成的圆形接触区域进行了受力分析, 在分析过程中尝试联合 Majumdar-Bhushan 平面模型和经典赫兹理论; 采用 Hardy 在任一点处处不可求导的条件, 严格证明了二维 Weierstrass-Mandelbrot 分形函数中分形维数 D 的整个取值范围为 $1 \leq D < 2$ 。数值模拟表明: 球体广义接触面积比不大于 1; 内接触时的球体广义接触面积比大于外接触时的, 增加压紧力或减小结合面虚拟材料厚度均会增大球体广义接触面积比; 内接触时的真实接触面积大于外接触时的, 真实接触面积随着分形粗糙度、材料硬度或结合面虚拟材料厚度的增加而减小; 随着分形粗糙度的增加, 产生指定真实接触面积所需要的压紧力增加; 当分形粗糙度增加时, 微凸体的法向变形量和压紧力增大; 对于给定的压紧力, 当分形维数从 1.4 增加至 1.5 时, 狭义接触面积比随之增加, 当分形维数从 1.5 增加至 1.9 时, 狭义接触面积比逐渐减小; 内接触时的赫兹应力小于外接触时的。此项研究可为深入研究滚动轴承中球轴承的接触强度计算提供基础, 所建立的球体接触分形模型具备通用性与实用性, 可望丰富机械设计中机械零件接触强度的理论。

关键词: 机械设计; 结合面; 虚拟材料; 球体; 接触面积比

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)03-0001-08

Contact Problem Between Two Spheres Considering Surface Roughness and Geometrical Curvature

TIAN Hongliang, YU Yuan, CHEN Tianmin, ZHENG Jinhua, ZHANG Yi, ZHAO Chunhua
(College of Mechanical and Power Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China)

Abstract: The normal contact problem of two spheres was studied to investigate the contact regime of curvature joint interface. The force applied to the circular contact region formed by the point higher pair contact of two spheres was analyzed through utilizing the virtual material thickness of joint interface. The Majumdar-Bhushan plane model and classic Hertz theory were combined in the analysis. It was demonstrated that the entire definite range of fractal dimension satisfies $1 \leq D < 2$ in the two-dimensional Weierstrass-Mandelbrot fractal function by adopting Hardy's non-differentiable condition at a point anywhere. Numerical simulation exhibits that the spherical generalized contact area ratio is not greater than one. The spherical generalized contact area ratio in inner contact is larger than that of outer contact. The spherical generalized contact area ratio may increase by increasing the compressive force or reducing the virtual material thickness of joint interface. The true contact area in internal contact is higher than it in external

收稿日期: 2015-08-14。 作者简介: 田红亮(1973—), 男, 博士, 副教授; 张屹(通信作者), 男, 教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51275273)。

网络出版时间: 2015-12-31

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20151231.1129.006.html>

contact. As the fractal roughness, material hardness or virtual material thickness of joint interface increases, the true contact area decreases. As the fractal roughness increases, the compressive force required to produce a specified true contact area increases. This accounts for the fact that an increase in the fractal roughness implies an increase in microcontact's normal deformation, which therefore requires a higher compressive force. As the value of fractal dimension increases from 1.4 to 1.5, the actual contact area first increases for a given compressive force. As the value of fractal dimension increases from 1.5 to 1.9, the true contact area decreases. The Hertz stress in internal contact is smaller than that in external contact. These research findings may provide a basis for further research on the contact strength calculation of spherical bearing. The spherical contact fractal model possesses the universality and practicality to expand the mechanical part contact strength theory in machine design.

Keywords: mechanical design; joint interface; virtual material; sphere; contact area ratio

按照结合面的结构形状,结合面可分为平面结合面和曲面结合面。结合面的非线性力学建模对复杂装配结构的动力学分析、设计、优化和健康监测等问题至关重要。同时,工程中任何接触表面都不是绝对光滑的,由于结合面力学行为的复杂性以及对结合面进行直接实验观测的困难,也使结合面的力学建模成为非常具有挑战性的科学问题。

长期以来,众多学者对结合面做了许多理论与实验研究工作。赫兹假设:材料是均匀的、各向同性的、完全弹性的,接触表面是理想的光滑表面,摩擦阻力可忽略不计;在两接触物体之间无润滑剂,不考虑流体的动力效应^[1]。赫兹理论侧重考虑两接触物体的宏观因素,因此只有在接近上述假设的条件下,赫兹理论公式的精度才能得到保证,否则就需加以修正。Greenwood等采用统计分析方法,提出了名义平坦表面的接触模型^[2],即 Greenwood-Williamson 基本弹性接触模型(以下简称 GW 模型),该模型做了 5 个假设:①粗糙表面各向同性;②微凸体在峰顶附近是球体;③所有微凸体的半径都相等但高度随机分布;④各微凸体彼此远离,相互之间无作用力;⑤粗糙表面无大变形,仅仅是微凸体在接触时变形。GW 模型考虑了表面形貌参数,比之前的模型更接近实际,当表面高度服从高斯一维正态分布时能对经典摩擦定律作出满意的解释,故它至今仍被广大研究者所接受。但是,GW 模型忽略了由弹性变形到塑性变形的转化状态,两接触粗糙表面的间距在偏润滑带内,属于微米量级,因此 GW 模型适用于理想情形,不能直接应用于工程实践。GW 模型中塑性接触面积与弹性接触面积之比为 0.02。针对 GW 模型中塑性接触面积在真实接触面积中所占比例偏小的不足,Chang 等考虑了黏着力,认为

塑性变形时体积守恒,提出了弹塑性接触模型^[3-5],其中文献[3]中提出的即是 Chang-Etsion-Bogy 模型(以下简称 CEB 模型)。针对 GW 模型的第 3 条假设“所有微凸体的半径都相等”不符合实际的缺陷,Majumdar 等提出了微凸体半径可变的具有尺度独立性的粗糙表面弹塑性接触分形几何模型^[6],即 Majumdar-Bhushan 平面模型(以下简称 MB 平面模型)。MB 平面模型重点考察两接触物体的微观因素。针对 CEB 模型中压应力在微凸体弹性临界变形量处出现跳跃间断点的缺陷,Zhao 等通过一条三次多项式样板曲线,体现从弹性变形到塑性流动的过渡区间——弹塑性变形^[7],提出了弹性接触、弹塑性接触、完全塑性接触的判据模型,给出了总接触面积、总载荷与干涉量的关系。针对 MB 平面模型中未区别空间频率与角频率的缺点,Yang 等提出了弹塑性分形静摩擦模型^[8],该模型可适用于两粗糙表面分形维数不相等的情况,区分了空间频率与角频率,给出了斜率方差的公式,还引入了接触角,可对概率分布密度、静摩擦系数进行预测。Jiang 等基于分形理论提出了机械平面结合面的通用法向与切向接触刚度模型^[9],并通过铣削、手工刮、磨削的加工方法获得了 3 种铸铁框架试件,将框架试件法向、切向接触刚度的理论值与试验数据进行了对比。Zhang 等基于分形理论构建了结合面的切向阻尼与损耗因子模型^[10]。尤晋闽等基于频率阻尼比法,提出了一种利用刚性框架悬臂梁的平面结合面参数识别测试模型,采用有限元法建立了力学模型,通过模态试验优化识别出了干摩擦和油脂润滑这 2 种不同介质状态下平面结合面的法向刚度系数和法向阻尼系数^[11]。张学良等基于接触分形理论和结合面接触阻尼耗能机理,以及球体与平面接触时的阻尼耗

能理论,建立了平面结合面切向接触阻尼的分形模型^[12]。黄康等结合 MB 平面模型和赫兹接触模型,建立了两圆柱体分形接触模型^[13-14],但是表面接触系数中的指数为综合曲率系数 x ,而 x 的单位是 m^{-1} ,故得到的都是经验解,这就大大限制了其应用范围与推广价值。现有文献对平面结合面已有较多研究,但对曲面结合面的研究因受制于对曲面接触机理的认识还很不充分,所以研究成果不多,鲜有公认的研究成果。

本文对两球体点高副接触时形成的圆形接触区域进行受力分析,在分析过程中尝试结合 MB 平面模型和赫兹理论,将两平面接触推广到两球体曲面接触,使所构建的球体接触分形模型具备科学性和可行性,以丰富机械设计中机械零件接触强度的理论。

1 两球体接触受力后的真实接触面积

当 2 个球体内接触或外接触受力后,由于材料的弹性变形,使得接触点向邻近四周逐渐扩展而变成半径为 c 的一个圆。接触圆的半径

$$c = \left(\frac{3F\rho}{4E} \right)^{1/3} \quad (1)$$

式中: E 为当量弹性模量; F 为压在两球体上的法向接触压紧力; ρ 为当量曲率半径。

$$E = \left(\frac{1-\mu_r^2}{E_r} + \frac{1-\mu_R^2}{E_R} \right)^{-1} \quad (2)$$

$$\rho = \frac{rR}{R \mp r} \quad (3)$$

式中: E_r 、 E_R 分别为小球体和大球体材料的弹性模量; μ_r 、 μ_R 分别为小球体和大球体材料的泊松比; r 、 R 分别为小球体和大球体初始接触点处的曲率半径; $\mp$ 代表接触形式,负号“ $-$ ”对应内接触,表示 2 个球体的中心处于接触点的同一侧,如球体与球座接触、球体与凹滚道沟接触,正号“ $+$ ”对应外接触,表示 2 个球体的中心处于接触点的两侧,如球体与内座圈接触。

接触圆的面积即为真实接触面积

$$A_r = \pi c^2 = \pi \left(\frac{9\rho^2 F^2}{16E^2} \right)^{1/3} \quad (4)$$

2 球体广义接触面积比

两球体的表面积差和为

$$S_\Sigma = S_R \mp S_r = 4\pi(R^2 \mp r^2) \quad (5)$$

式中: S_r 、 S_R 分别为小球体和大球体的表面积。

Mandelbrot 在研究地球地形学时发现,面积 A 大于一定值 a 的海洋表面上的岛屿总数目为

$$N(A > a) = \left(\frac{a_L}{a} \right)^{D/2} \quad (6)$$

式中: a_L 为两岛屿最大接触点的面积(两岛屿之间相互点接触时,将接触点视为半球体)。

接触点的概率分布密度

$$n(a) = - \frac{dN(A > a)}{da} = \frac{D}{2} \frac{a_L^{D/2}}{a^{D/2+1}} \quad (7)$$

可见, $n(a)$ 的单位是 m^{-2} ,不同于文献[14]中的无量纲。乘积为 1 的两个数互为倒数,因为随机变量的概率分布密度是有量纲的量,所以它的量纲等于随机变量的量纲的倒数。

结合面虚拟材料的厚度为 h ^[15-16],再考虑两球体的当量曲率半径,然后类比式(6),可构造球体广义接触面积比

$$\lambda = \left(\frac{A_r}{S_\Sigma} \right)^{h/\rho} \quad (8)$$

将式(5)和式(4)代入式(8),得

$$\lambda = \left[\frac{(3\rho F/4E)^{2/3}}{4(R^2 \mp r^2)} \right]^{h/\rho} = \lambda_0 F^{2h/(3\rho)} \quad (9)$$

式中: λ_0 为球体广义初始接触面积比,并且有

$$\lambda_0 = \left[\frac{(3\rho/4E)^{2/3}}{4(R^2 \mp r^2)} \right]^{h/\rho} \quad (10)$$

在 MB 平面模型中,式(7)中 $n(a)$ 的求解主要假设两接触体在无限平面里接触,或相对各个微凸体来说为无限接触。很显然,当接触的 2 个曲面非无限接触时,接触时所形成的接触点的总数 N 将有所变化,此时假设随着真实接触面积的增大,两接触体的接触点数会增加,但其值应小于或等于式(6)中的 $(a_L/a)^{D/2}$ 。因此,两接触曲面体的真实接触面积对 N 的大小有影响,而式(8)中含有真实接触面积 A_r 。当两曲面接触时,接触点的总数可修正为

$$N(A > a) = \lambda \left(\frac{a_L}{a} \right)^{D/2} \quad (11)$$

可见,式(11)不同于文献[13]中的式(4)—— $N(A > a) = \lambda a^{-D/2}$ 。

将内接触形式中的式(3)代入式(9)得

$$\lambda = \left[\frac{(3rRF/4E)^{2/3}}{4(R+r)(R-r)^{5/3}} \right]^{h(R-r)/(rR)} \quad (12)$$

当 $r \rightarrow R^-$ 时,式(12)的左极限为

$$\lim_{r \rightarrow R^-} \lambda = \lim_{r \rightarrow R^-} \left[\frac{(3R^2 F/4E)^{2/3}}{8R} \right]^{h(R-r)/R^2} \cdot \left[\frac{1}{(R-r)^{R-r}} \right]^{5h/(3R^2)} = 1 \quad (13)$$

3 两球体接触受力后的法向压紧力

式(8)包含 4 个参数,每个参数都有明确的物理

意义。易知

$$\lambda \leq 1 \quad (14)$$

在法向接触压紧力 P 作用下,当两粗糙表面为平面接触时,产生真实接触面积 A_r 。若将这2个粗糙表面弯曲成2个球体,当此两球体为点接触时,假设亦产生同样的真实接触面积 A_r ,这时两球体受法向接触压紧力 F 。由平面接触构成平面低副,由单一点接触形成点高副,则以下不等式恒成立

$$P \leq F \quad (15)$$

根据不等式(14)与不等式(15),设有等式

$$P = \lambda F \quad (16)$$

将式(9)代入式(16)得

$$P = \lambda_0 F^{(3\rho+2h)/3\rho} \Rightarrow F = \left(\frac{P}{\lambda_0}\right)^{3\rho/(3\rho+2h)} \quad (17)$$

这样,MB平面模型获得了两粗糙表面为平面接触时的法向接触压紧力 P , P 的归一化形式为

$$P^* (A_r^* > A_{rc}^*) = \frac{P(A_r > A_{rc})}{ES_r} =$$

$$\begin{cases} \frac{2\pi^{1/2}D}{3(1.5-D)}(G^*)^{D-1} \left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{D/2} \cdot \\ \left[\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{1.5-D} - (a_c^*)^{1.5-D}\right] + \\ \frac{H}{E}(A_r^*)^{D/2} \left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{1-D/2}, & D \neq 1.5 \\ (\pi G^*)^{1/2} \left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{3/4} \ln \frac{A_r^*}{3a_c^*} + 3 \frac{H}{E} \left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{3/4} (a_c^*)^{1/4}, & D = 1.5 \end{cases} \quad (18)$$

式中: $A_r^* = \frac{A_r}{S_r}$ 为狭义接触面积比,其中 $S_r = 4\pi r^2$ 为

小球体的表面积; $A_{rc}^* = \frac{A_{rc}}{S_r} = \frac{D}{2-D}a_c^*$; $G^* = \frac{G}{S_r^{1/2}}$;

$a_c^* = \frac{a_c}{S_r} = \left(\frac{2E}{H}\right)^{2/(D-1)} (G^*)^2$, 不同于文献[14]中的

$$a_c^* = \frac{a_c}{A_a} = \frac{G^*}{(K\phi/2)^{2/(D-1)}}。$$

可见,式(18)不同于文献[6]中MB平面模型的式(29)。此外,式(18)及其相关参量与MB平面模型的最大不同之处在于,式(18)及其相关参量不包含最初屈服强度 σ_y ,但MB平面模型却包括此参数,因此本文推导的公式比MB平面模型更简洁。能够消去中间变量 σ_y 的原因在于,MB平面模型定义了相关因子 $K = H/\sigma_y$ 与应变 $\phi = \sigma_y/E$,且MB平面模型中都以整体形式 $K\phi$ 呈现,因 $K\phi = \frac{H\sigma_y}{\sigma_y E} = \frac{H}{E}$,从而消去了 σ_y 。

将式(18)代入式(17),可得 F 的归一化形式

$$F^* = \frac{F}{ES_r} = \frac{(P^* ES_r/\lambda_0)^{3\rho/(3\rho+2h)}}{ES_r} \quad (19)$$

4 两球体接触受力后的赫兹应力

初始接触点处的法向压应力最大,以此最大法向压应力代表两球体间接触受力后的应力,称为最大接触应力或赫兹应力,用符号 σ_H 表示。

作用在圆形闭区域 $\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq c, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 上的法向压应力

$$p(\rho) = \frac{\sigma_H}{c}(c^2 - \rho^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \rho \leq c \quad (20)$$

函数 $p(\rho)$ 在圆形闭区域 $\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq c, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 上的平均值(即平均法向压应力)

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{A_r} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^c p(\rho) \rho d\rho \right] d\theta = \\ &= \frac{2}{c^3} \int_0^c \rho(c^2 - \rho^2)^{1/2} d\rho = \frac{2}{3} \sigma_H \end{aligned} \quad (21)$$

由式(4)亦可得平均法向压应力

$$p_m = \frac{F}{A_r} = \frac{2}{3} \left(\frac{6FE^2}{\pi^3 \rho^2} \right)^{1/3} \quad (22)$$

根据式(21)与式(22)得

$$\sigma_H = \left(\frac{6E^2 F}{\pi^3 \rho^2} \right)^{1/3} \quad (23)$$

5 MB平面模型分形维数范围的修正

德国数学家 Weierstrass 于 1872 年设计了如下函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1 \quad (24)$$

Hardy 在 1916 年取得了突破性进展,证明了对满足条件

$$ab \geq 1 \quad (25)$$

的所有 a 和 b ,且不限定 b 是整数,式(24)都是处处不可微的^[17]。

二维 Weierstrass-Mandelbrot 分形函数为

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{+\infty} (\gamma^{D-2})^n \cos(\gamma^n \pi 2x) \quad (26)$$

根据式(24)与式(25),可得式(26)处处不可微的条件是

$$0 < \gamma^{D-2} < 1 \quad (27)$$

$$\gamma^{D-2} \gamma \geq 1 \quad (28)$$

由式(27)得

$$\gamma > \gamma^{D-2} \gamma \quad (29)$$

由式(29)与式(28)得

$$\gamma > \gamma^{D-2} \gamma \geq 1 \Rightarrow \gamma > 1 \tag{30}$$

将式(30)代入式(27)得

$$D < 2 \tag{31}$$

将式(30)代入式(28)得

$$D \geq 1 \tag{32}$$

根据式(32)与式(31)得

$$1 \leq D < 2 \tag{33}$$

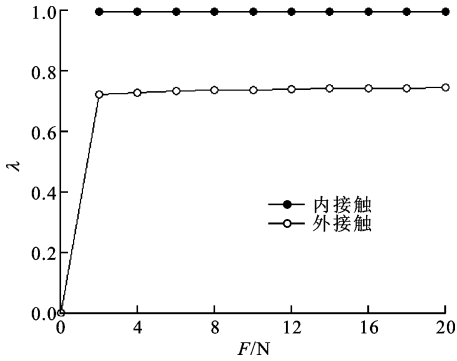
由此可见,式(33)不同于文献[6]中的式(1)—— $1 < D < 2$ 。

6 两球体接触受力的数值仿真与分析

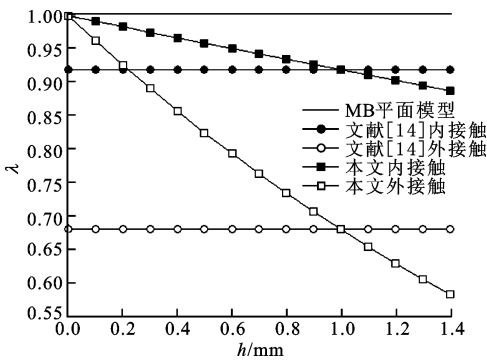
两球体的参数为:小球体材料采用碳质量分数为 0.45%的中碳调质 45 钢,弹性模量 $E_r=207\text{ GPa}$,泊松比 $\mu_r=0.29$,交货状态布氏硬度 $H_r=1\ 960\text{ MPa}$;大球体材料采用铬质量分数为 0.4%的调质合金结构钢 40Cr,弹性模量 $E_R=202\text{ GPa}$,泊松比 $\mu_R=0.28$,交货状态布氏硬度 $H_R=700\text{ MPa}$,半径 $R=100\text{ mm}$ 。文献[12]给出 $\phi=1.0$ 、 $E=2.1\times 10^{11}\text{ Pa}$ 和 $\sigma_y=3.53\times 10^9\text{ Pa}$,与公式 $\phi=\sigma_y/E$ 自相矛盾。

6.1 球体广义接触面积比的变化

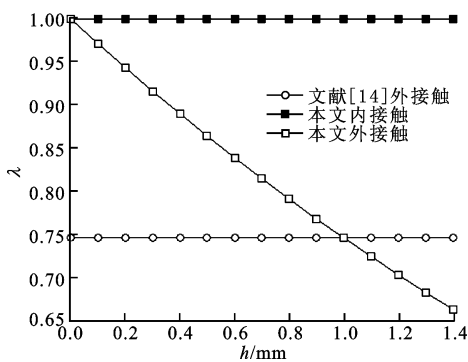
图 1 给出了球体广义接触面积比的演化规律。图 1a~1e 皆能够表明 3 个共同规律:①MB 平面模



(c) $h=1\text{ mm}$ 与 $r=R$ 时压紧力对广义接触面积比的影响



(d) $F=20\text{ N}$ 与 $r=60\text{ mm}$ 时结合面虚拟材料厚度对广义接触面积比的影响



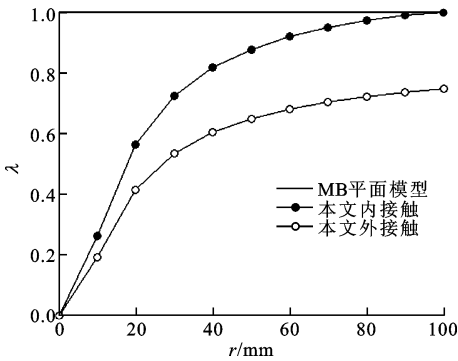
(e) $F=20\text{ N}$ 与 $r=R$ 时结合面虚拟材料厚度对广义接触面积比的影响

图 1 各种参数对球体广义接触面积比的影响

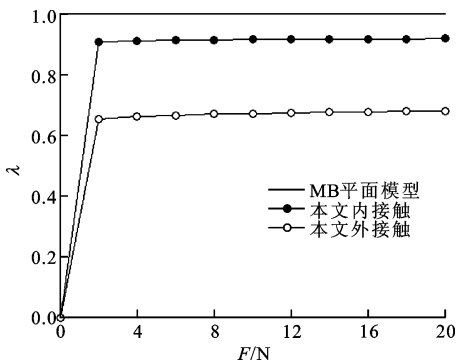
型的球体广义接触面积比始终等于 1;②本文的球体广义接触面积比始终小于或等于 1;③本文内接触时的球体广义接触面积比大于外接触时的。

从图 1a 可知:本文的 λ 随着 r 的增加而增大;当 $r\rightarrow 0$ 时 $\lambda\rightarrow 0$,因为这时无物体与大球体接触;当 $r\rightarrow R$ 且两球体内接触时 $\lambda\rightarrow 1$,因为这时两球体处处彻底内接触,但当 $r\rightarrow R$ 且两球体外接触时, $\lambda < 1$ 。

从图 1b 可知:本文的 λ 随着 F 的增加而增大;当 $2\text{ N}\leq F\leq 20\text{ N}$ 时,在此大范围内 λ 收敛于某一



(a) $h=1\text{ mm}$ 与 $F=20\text{ N}$ 时小球体半径对广义接触面积比的影响



(b) $h=1\text{ mm}$ 与 $r=60\text{ mm}$ 时压紧力对广义接触面积比的影响

定值,内接触时 $\lambda \rightarrow 0.909\ 2$,外接触时 $\lambda \rightarrow 0.653\ 3$;当 $0 \leq F \leq 2\ \text{N}$ 时,在此小范围内 λ 很快从 0 增加到相应的定值。

图 1c 的演化规律与图 1b 类似,但内接触时的 λ 恒等于 1,由于这时 $r=R$,对于内接触是一种极限情形,两球体处处完全内接触,如果提供一点很小的压紧力 F , λ 将马上从 0 骤变到 1。

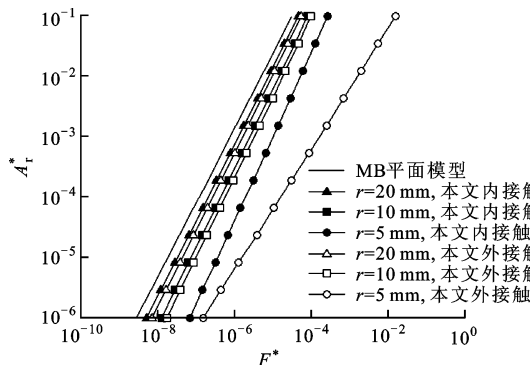
从图 1d 可知:本文的 λ 随着 h 的增加而线性减小,当 $h=0$ 时 $\lambda=1$,而文献[14]中的 λ 为小于 1 的定值。

图 1e 的演化规律与图 1d 相似,但内接触时 λ 恒等于 1。

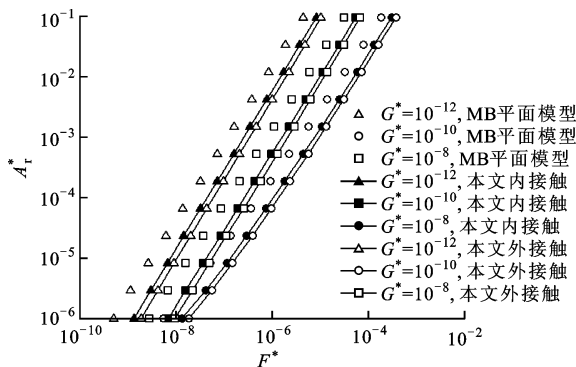
由图 1b 与 1c 可知,当 $F=0$ 时 λ 恒等于 0,因为按照式(9),以及对于任意的正数 μ , $0^\mu=0$,可见 $\lambda=0$,这相异于文献[13]中的结论:“可见,当 $F \rightarrow 0$ 时,不论在外接触或内接触时, λ 都达到最小值,但并不等于 0,原因是尽管此时两接触体间的接触应力为 0,但由于接触实体的存在,接触系数亦是存在的。”

6.2 球体狭义接触面积比的变化

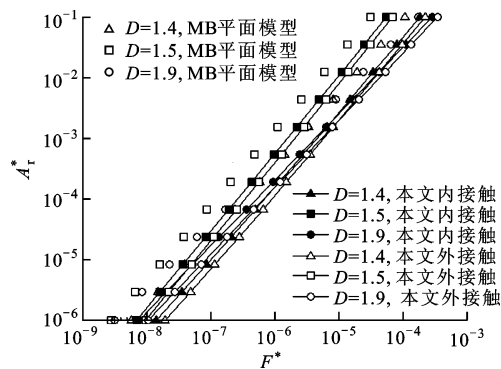
图 2 给出了当 $h=1\ \text{mm}$ 时球体狭义接触面积



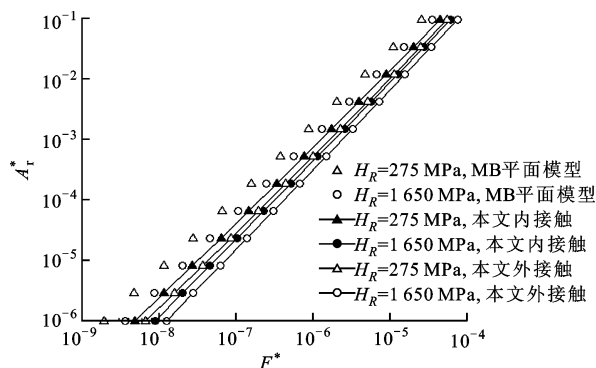
(a) $D=1.5$ 与 $G^*=10^{-10}$ 时小球半径对狭义接触面积比的影响



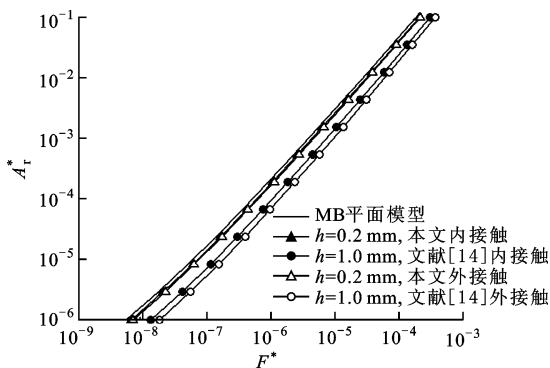
(b) $D=1.5$ 与 $r=15\ \text{mm}$ 时分形粗糙度对狭义接触面积比的影响



(c) $G^*=10^{-10}$ 与 $r=15\ \text{mm}$ 时分形维数对狭义接触面积比的影响



(d) $D=1.5$, $G^*=10^{-10}$ 与 $r=15\ \text{mm}$ 时硬度对狭义接触面积比的影响



(e) $D=1.5$, $G^*=10^{-8}$ 与 $r=15\ \text{mm}$ 时结合面虚拟材料厚度对狭义接触面积比的影响

图 2 各种参数对球体狭义接触面积比的影响

比的演化规律。图 2a~2e 均可以反映出 3 个共同规律:①本文的球体模型曲线处于 MB 平面模型曲线的下面;②在同一压紧力下,球体模型的狭义接触面积比比 MB 平面模型的小;③在产生相同狭义接触面积比的情况下,本文球体模型需要施加的压紧力比 MB 平面模型的大。

从图 2a 可知:不管是内接触还是外接触,狭义接触面积比都随着 r 的增加而增加;内接触时的狭

义接触面积比比外接触时的大。

从图 2b 可知:狭义接触面积比随着分形粗糙度的增加而减小;随着分形粗糙度的增加,产生指定狭义接触面积比所需要的压紧力增加,这是由于分形粗糙度增加时法向变形量也增加,故压紧力增加。

从图 2c 可知:对于给定的压紧力,当分形维数从 1.4 增加到 1.5 时,狭义接触面积比随之增加,但当分形维数从 1.5 增加到 1.9 时,狭义接触面积比逐渐减小。

硬度是定量表示材料软硬程度的一个物理参数。材料的硬度会随着距离表面的深度而变化,不是一个恒定值。计算中硬度取 H_r 和 H_R 中的较小者,材料的布氏硬度对狭义接触面积比的影响见图 2d,可见狭义接触面积比随着材料布氏硬度的增加而减小。

结合面虚拟材料厚度对狭义接触面积比的影响见图 2e,可见狭义接触面积比随着结合面虚拟材料厚度的增加而减小。文献[14]中计算的狭义接触面积比小于本文计算的。

6.3 赫兹应力的变化

图 3 给出了当 $h=1\text{ mm}$ 、 $F=20\text{ N}$ 时赫兹应力的变化规律。由图 3 可见:同种接触形式下,本文方法计算的赫兹应力大于赫兹理论的计算值;随着 r 的增加,赫兹应力下降;内接触时的赫兹应力小于外接触时的。球轴承主要为点接触,宜用于承受较轻或中等的载荷,故在载荷较小时,可优先选用球轴承。通常零件受载时是在较大的体积内产生应力,这种应力状态下的零件强度称为整体强度。2 个球体在受载前是点接触,受载后,由于变形接触处变为一个小接触面,通常此接触面甚小,而表层产生的局部应力却很大,这时的零件强度称为接触强度。例如滚动轴承中的球轴承,都是通过很小的接触面积传递载荷的,因此球轴承的承载能力不仅取决于整体强度,还取决于表面的接触强度。

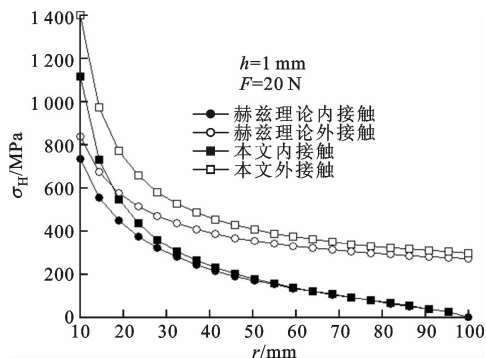


图 3 小球体半径对赫兹应力的影响

7 结 论

(1)用术语“小球体表面积”代替术语“表观接触面积”,更能形象地表征球体的几何特点。

(2)球体广义接触面积比小于或等于 1,内接触时的球体广义接触面积比大于外接触时的。球体广义接触面积比随着压紧力的增加或结合面虚拟材料厚度的减小而增大。

(3)内接触时的狭义接触面积比比外接触时的大。狭义接触面积比随着分形粗糙度、材料硬度、结合面虚拟材料厚度的增加而减小。对于给定的压紧力,当分形维数从 1.4 增加至 1.5 时,狭义接触面积比随之增大;当分形维数从 1.5 增加至 1.9 时,狭义接触面积比逐渐减小。

(4)内接触时的赫兹应力小于外接触时的。

参考文献:

- [1] HERTZ H. Über die berührung fester elastischer körper [J]. J Reine und Angewandte Mathematik, 1882, 92: 156-171.
- [2] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of nominally flat surfaces [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1966, 295(1442): 300-319.
- [3] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1987, 109(2): 257-263.
- [4] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. Adhesion model for metallic rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1988, 110(1): 50-56.
- [5] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1988, 110(1): 57-63.
- [6] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.
- [7] ZHAO Yongwu, MAIETTA D M, CHANG L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow [J]. ASME Journal of Tribology, 2000, 122(1): 86-93.
- [8] YANG J, KOMVOPOULOS K. A mechanics approach to static friction of elastic-plastic fractal surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 2005, 127(2): 315-324.
- [9] JIANG Shuyun, ZHENG Yunjian, ZHU Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on

(下转第 44 页)