

DOI: 10.7652/xjtuxb201704019

色噪声激励下非线性阻尼动力系统的 首次穿越分析

严惠云¹, 师义民¹, 苏剑²

(1. 西北工业大学理学院, 710072, 西安; 2. 西安交通大学数学与统计学院, 710049, 西安)

摘要: 应用统一色噪声原理和随机平均法研究了色噪声激励下非线性阻尼动力系统的首次穿越问题。首先给出了条件可靠性函数满足的BK(Backward Kolmogorov)方程以及首次穿越时间条件矩满足的广义GP(General Pontryagin)方程,其次在规则边界条件和初始条件下得到了系统的条件可靠性函数、概率密度函数和首次穿越时间的数值解,最后通过数值模拟图分析了系统参数及外激励噪声对系统可靠性变化的影响。分析结果表明:增大系统参数可提高系统可靠性;增大噪声强度会增大发生首次穿越的概率、降低系统的可靠性;噪声自相关时间对系统可靠性的影响与系统参数有关,即在系统参数值较大时增大噪声相关时间会提高系统的可靠性,而当系统参数较小时增大噪声相关时间反而会降低系统的可靠性。该结果可为非线性系统的可靠性研究提供参考。

关键词: 首次穿越;色噪声激励;动力系统;非线性阻尼;可靠性函数

中图分类号: O313 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)04-0122-06

First-Passage Analysis for a Nonlinear Damping Dynamical Systems under Colored Noise Excitation

YAN Huiyun¹, SHI Yimin¹, SU Jian²

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: By employing the unified colored-noise approximation approach and the stochastic averaging method, the first-passage is analyzed for a class of nonlinear damping dynamical systems under colored noise excitation. A backward Kolmogorov (BK) equation for the conditional reliability function and a generalized Pontryagin (GP) equation for the conditional moment of the first-passage time are established. Under the regular boundary conditions and initial conditions for BK and GP equations, the conditional reliability function, probability density function and numerical solution of the first-passage time of the systems are obtained, and the effects of system parameters and external excitation noise on system reliability are discussed via numerical simulation. The results show that the system reliability can be improved by increasing system parameters, and the probability of the first-passage rises and the system reliability lowers with the increasing excitation intensity. Moreover, the influence of noise autocorrelation time on the system reliability is related to the system parameters. The system reliability rises if the noise autocorrelation time for a large system parameter increases, but the system reliability lowers if the noise autocorrelation time for a small system parameter increases.

收稿日期: 2016-10-24。 作者简介: 严惠云(1977—),女,讲师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571144, 71401134, 71171164);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2015JM1003)。

网络出版时间: 2016-12-14

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20161214.1110.002.html>

Keywords: first-passage; colored noise excitation; dynamical system; nonlinear damping; reliability function

在适当的参数取值区间和外激励噪声的扰动下,系统的响应第一次离开某个安全域就称该系统发生了首次穿越。首次穿越行为广泛存在于工程、物理、生物、经济等领域^[1-4]。

作为分析系统可靠性的一个重要途径,数十年来随机动力系统的首次穿越问题一直受到人们的关注,学者们研究了动力系统阻尼系数^[5-6]、外激励噪声强度^[7]、结构的对称性^[8]、乘性噪声与加性噪声的强度比对^[9]、系统的内共振与外共振^[10]、系统的耦合等因素^[11-12]对系统首次穿越的影响,分析了动力系统发生首次穿越的条件及控制方法^[13],得到了不少有益的结论。然而,在实际分析中,首次穿越问题仍然是随机动力学研究中的困难问题之一。一方面,多自由度及强非线性动力系统的 BK(Backward Kolmogorov)方程和 GP(General Pontryagin)方程形式复杂,很难求得精确解析解。另一方面,只有系统响应为扩散的 Markov 过程时,系统的首次穿越研究才有严格的理论支撑。当色噪声激励系统的动力学响应不再是 Markov 过程时,现有的 Markov 过程理论不能直接用于首次穿越分析,从而增加了研究的难度。目前,已有的研究成果主要集中在非线性动力系统、线性阻尼动力系统及白噪声激励的动力系统,色噪声激励下的动力系统和含有非线性阻尼项动力系统的首次穿越问题还有待进一步探讨。鉴于此,本文研究了色噪声激励下非线性阻尼动力系统的首次穿越问题,通过数值模拟揭示了噪声自相关时间、噪声强度和非线性阻尼系数对系统可靠性的影响。

1 非线性阻尼动力学系统

考虑如下含三次非线性阻尼项的动力学系统

$$\ddot{x} + \omega \dot{x}^3 + (\alpha - s + v - 2)\dot{x} + (1 - \alpha)x = Q(t) \quad (1)$$

式中: v, s, α 均为系统参数; $Q(t)$ 为 Gauss 色噪声,满足

$$\langle Q(t) \rangle = 0, \langle Q(t)Q(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right)$$

其中 τ 是噪声的自相关时间, D 是 $Q(t)$ 的噪声强度 (D 是 ϵ 小量)。下文中所有物理量均经过了归一化处理。

令 $\Gamma(t) = LW(t)$, $L^2 = 2D$, 按照文献^[14], 则色噪声激励下的系统(1)可以转化成平均 Itô 随机微分方程的形式

$$dH = m(H)dt + \sigma(H)dB(t) \quad (2)$$

式中

$$m(H) = m_1 H^2 + m_2 H + m_3$$

$$\sigma(H) = n_1 H^2 + n_2 H + n_3$$

其中

$$m_1 = -\frac{3}{4}k_1 v$$

$$m_2 = -\frac{3}{64} \frac{L^4 k_1^2 k_2^2}{(1-\alpha)^2} + L^2 k_2^2 - k_1 u - \frac{L^2 k_1 k_2}{4}$$

$$m_3 = -\frac{3}{256} \frac{L^8 k_1^3 k_2^4}{(1-\alpha)^3} +$$

$$\frac{1}{8} \frac{L^4 k_1 k_2^2}{1-\alpha} \left(L^2 k_2^2 - k_1 u - \frac{L^2 k_1 k_2}{4} \right) + \frac{L^2}{2}$$

$$n_1 = \frac{3}{2}k_2^2; \quad n_2 = \frac{3}{32} \frac{k_1 k_2^4}{1-\alpha} + L^2 k_1^2$$

$$n_3 = \frac{3}{128} \frac{L^8 k_1^2 k_2^6}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{8} \frac{L^6 k_1^3 k_2^2}{1-\alpha}$$

$$k_1 = \frac{\tau^{-1}}{\tau^{-1} + u}; \quad k_2 = \frac{\tau^{-1}(1-\alpha)}{(\tau^{-1} + u)^2}$$

2 BK 方程与 GP 方程

设 $H(t)$ 所示的系统(2)在状态空间中的安全域 $S = [0, \Gamma)$, Γ 是安全域 S 的平滑边界。若在有限时间区间 $(0, T]$ 内, $H(t)$ 停留在安全区域内, 则一旦 $H(t)$ 在某一时刻越出安全边界, 就称该系统发生了首次穿越^[15]。

为了得到首次穿越时间, 需要引入可靠性函数

$$R(t | H_0) = P\{H(t) \in S, t \in (0, T] | H(0) = H_0 \in S\} = \int_S q(H, t | H_0) dH \quad (3)$$

其表示过程在初始时刻位于 S 内, 且在 $(0, T]$ 保持在 S 内的概率不变。对上式右边进行积分, 可以得到 BK 方程^[15]

$$\frac{\partial R}{\partial t} = m(H_0) \frac{\partial R}{\partial H_0} + \frac{1}{2} \sigma^2(H_0) \frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} \quad (4)$$

其初始条件为

$$R(0 | H_0) = 1, \quad H_0 \in S \quad (5)$$

边界条件为

$$R(t | H_0) = 0, \quad H_0 = \Gamma \quad (6)$$

$$R(t | H_0) = \text{有限}, \quad H_0 = 0 \quad (7)$$

系统(2)初始时位于 S 而在 $(0, T]$ 内穿越 S 边

界 Γ 的概率,即条件损坏概率为

$$P(t | H_0) = 1 - R(t | H_0) \quad (8)$$

记系统(1)首次穿越安全边界的时间为 T_0 ,首次穿越时间满足的条件概率密度为

$$p(T_0 | H_0) = \frac{\partial p(t | H_0)}{\partial t} \Big|_{t=T_0} = - \frac{\partial R(t | H_0)}{\partial t} \Big|_{t=T_0} \quad (9)$$

且首次穿越时间的各阶矩 $u_{k+1}(H_0) = E(T^{k+1})$ 满足 GP 方程^[15]

$$m(H_0) \frac{du_{k+1}}{dH_0} + \frac{1}{2} \sigma^2(H_0) \frac{d^2 u_{k+1}}{dH_0^2} = -(k+1)u_k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

其中 $u_0 = 1$, 相应的 2 个边界条件分别为

$$u_{k+1}(H_0) = 0, \quad H_0 = \Gamma \quad (11)$$

$$u_{k+1}(H_0) = \text{有限}, \quad H_0 = 0 \quad (12)$$

当 $k=0$ 时, u_1 即为平均首次穿越时间,它是衡量系统(1)可靠性的重要指标之一。

3 定量边界条件与首次穿越时间

为了求解方程(4)和方程(10),需要将方程(4)的定性边界条件(式(6)、(7))和 GP 方程的定性边界条件(式(11)、(12))转化为相应的定量边界条件。按照文献[16],式(2)所示一维扩散过程的边界类别可以由以下 4 个函数来分类,即尺度函数

$$l(H) = \int_{H_0}^H \varphi^{-1}(u) du \quad (13)$$

速度函数

$$v(H) = \int_{H_0}^H \frac{\phi(u)}{\sigma^2(u)} du \quad (14)$$

从 H_0 到达 H 的时间

$$\sum(H) = \int_{H_0}^H v(u) dl(u) \quad (15)$$

从 H 到达 H_0 的时间

$$N(H) = \int_{H_0}^H l(u) dv(u) \quad (16)$$

以上各式中的 $H_0 \in (H_l, H_r)$ 为内点, H_l 、 H_r 分别为左、右边界。

由式(2)可得

$$\varphi(H) = \exp\left(\int \frac{2m(H)}{\sigma^2(H)} dH\right) = \exp\left(\int \left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{M_2 H + N_2}{H^2 + k_3 H + k_4}\right) dH\right) \quad (17)$$

式中: $M_2 = \frac{m_2}{n_1} - \frac{m_1 n_2}{n_1^2}$; $N_2 = \frac{m_3}{n_1} - \frac{m_1 n_3}{n_1^2}$; $k_3 = \frac{n_2}{n_1}$; $k_4 = \frac{n_3}{n_1}$ 。

考虑到式(17)中 $\frac{M_2 H + N_2}{H^2 + k_3 H + k_4}$ 的原函数在

$k_4 - \frac{k_3^2}{4} < 0$ 和 $k_4 - \frac{k_3^2}{4} > 0$ 情况下显性表达式不同,下面分 2 种情况来计算式(17),并在后续的分析中也分情况采用式(17)的不同积分结果。

(1) 当 $k_4 - \frac{k_3^2}{4} < 0$ 时

$$H^2 + k_3 H + k_4 = \left(H + \frac{k_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{k_3^2}{4} - k_4\right) = \left(H + \frac{k_3}{2} + \left(\frac{k_3^2}{4} - k_4\right)^{1/2}\right) \left(H + \frac{k_3}{2} - \left(\frac{k_3^2}{4} - k_4\right)^{1/2}\right)$$

从而

$$\int \frac{m(H)}{\sigma^2(H)} dH = \frac{m_1}{n_1} H + \int \frac{M_2 H + N_2}{H^2 + k_3 H + k_4} dH =$$

$$\frac{m_1}{n_1} H + \int \left(\frac{A_3}{H + A_2} + \frac{B_3}{H + B_2}\right) dH =$$

$$\frac{m_1}{n_1} H + A_3 \ln |H + A_2| + B_3 \ln |H + B_2| + C$$

式中: C 为任意常数; $A_2 = k_3/2 + A^{1/2}$, $A = \frac{k_3^2}{4} - k_4$;

$$B_2 = k_3/2 - A^{1/2}; A_3 = \frac{(k_3/2 + A^{1/2})M_2 - N_2}{2A^{1/2}} =$$

$$\frac{A_2 M_2 - N_2}{2A^{1/2}}; B_3 = \frac{(k_3/2 - A^{1/2})M_2 - N_2}{-2A^{1/2}} = \frac{-B_2 M_2 + N_2}{2A^{1/2}}。$$

所以

$$\varphi(H) = \exp[2(\frac{m_1}{n_1} H + A_3 \ln |H + A_2| + B_3 \ln |H + B_2| + C)] = |H + A_2|^{2A_3} |H + B_2|^{2B_3} \exp\left(\frac{2m_1}{n_1} H + C\right) \quad (18)$$

(2) 当 $k_4 - \frac{k_3^2}{4} > 0$ 时

$$H^2 + k_3 H + k_4 = \left(H + \frac{k_3}{2}\right)^2 + \left(k_4 - \frac{k_3^2}{4}\right)$$

$$\text{令 } H + \frac{k_3}{2} = t, \text{ 并记 } H^2 + k_3 H + k_4 = t^2 +$$

$$(-A)^{1/2}, M_2 H + N_2 = M_2 t + B_4, B_4 = N_2 - \frac{M_2 k_3}{2},$$

则有

$$\int \frac{m(H)}{\sigma^2(H)} dH = \frac{m_1}{n_1} H + \int \frac{M_2 H + N_2}{H^2 + k_3 H + k_4} dH =$$

$$\frac{m_1}{n_1} H + \int_0^H \frac{M_2 t}{t^2 + (-A)^{1/2}} + \frac{B_4}{t^2 + (-A)^{1/2}} dt =$$

$$\frac{m_1}{n_1} H + \frac{M_2}{2} \ln |H^2 + k_3 H + k_4| +$$

$$\frac{B_4}{(-A)^{1/2}} \arctan \frac{H + k_3/2}{(-A)^{1/2}} + C$$

$$\begin{aligned} \varphi(H) &= \exp\left[\int \frac{2m(H)}{\sigma^2(H)}dH\right] = \\ &|H^2 + k_3H + k_4|^{M_2} \exp\left(\frac{2m_1}{n_1}H + \right. \\ &\left. \frac{2B_4}{(-A)^{1/2}}\arctan \frac{H + k_3/2}{(-A)^{1/2}} + C\right) \end{aligned} \quad (19)$$

当 $H \in (0, H_c)$, H_c 为一个有限值,则根据式(18)和式(19)可知, $\varphi(H)$ 是一个大于零且有界的函数。因此,在 $H \in (0, H_c)$ 上,尺度函数

$$l(H) = \int_0^{H_c} \varphi^{-1}(u)du < \infty$$

同理,可以得知速度函数

$$v(H) = \int_0^{H_c} \frac{\varphi(u)}{\sigma^2(u)}du < \infty$$

因此,式(2)所示一维扩散过程的边界为规则边界。

在规则边界条件下,式(2)的漂移系数 $m(H)$ 和扩散系数 $\sigma^2(H)$ 在 $[0, H_c]$ 上无奇点。在左边界 $H_l=0$ 为吸收边界、右边界 $H_r=H_c$ 为反射边界的条件下对式(10)积分得到平均首次穿越时间

$$u_1(H_0) = 2 \int_{H_0}^{H_c} \frac{1}{\varphi(u)} du \int_0^u \frac{\varphi(v)}{\sigma^2(v)} dv \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \exp\left(\int \frac{2m(v)}{\sigma^2(v)}dv\right) = \\ &\begin{cases} |v + A_2|^{-2A_3} |v + B_2|^{-2B_3} \exp\left(\frac{2m_1}{n_1}v + C\right), & k_4 - \frac{k_3^2}{4} < 0 \\ |v_0^2 + k_3v + k_4|^{M_2} \exp\left(\frac{2m_1}{n_1}v + \right. \\ & \left. \frac{2B_4}{(-A)^{1/2}}\arctan \frac{v + k_3/2}{(-A)^{1/2}} + C\right), & k_4 - \frac{k_3^2}{4} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

4 数值结果

因为式(4)、(9)、(20)均无法求得解析表达式,所以本文应用有限差分法来计算可靠性函数和首次穿越时间。在计算中取安全域的右边界 $\Gamma=10$,时间间隔 $\Delta t=0.02$ 。考虑到系统(1)来自 Puu-Goodwin 经济周期模型^[14],因此取参数 $v=1/(1-\alpha)$ 、 $s=1-\alpha$ 、 $0<\alpha<1$,由此所得数值计算结果如图 1~图 4 所示。

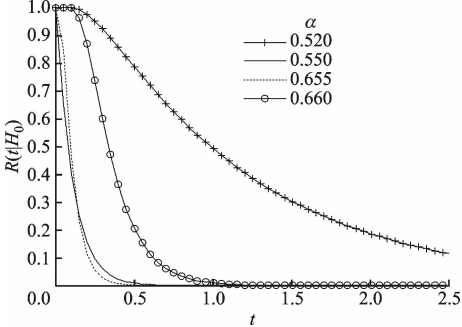
图 1 所示系统参数 α 变化对系统(1)可靠性有如下显著影响。

(1)由图 1a 可知,在相同的噪声相关时间 τ 及噪声强度下, α 由 0.52 增大为 0.66 时系统可靠性

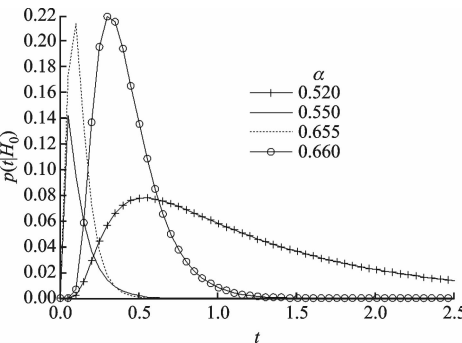
函数的值先减小再增大,即 α 对系统可靠性的影响是不稳定的。由非线性阻尼项系数 $v=1/(1-\alpha)$ 可知,非线性阻尼项的系数 v 是 α 的单调递增函数,因此非线性阻尼项系数对系统可靠性的影响也是不稳定的。

(2)由图 1b 显示,系统(1)在相同的噪声相关时间 τ 及噪声强度下, α 由 0.52 增大为 0.66 时首次穿越时间的密度函数峰的位置先向左移动,再向右移动,与可靠性函数的变化趋势相同。

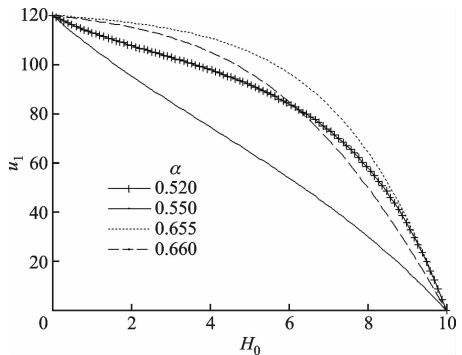
(3)由图 1c 显示,系统(1)在 $\tau=1.3$ 及噪声强度 $D=1.2$ 且 $H_0<6.5$ 时,系统(1)在 $\alpha=0.55$, 0.66 时首次穿越时间的大小与 $H_0>6.5$ 时的情况相反,这也说明了首次穿越时间随 α 的增大变化不



(a)可靠性函数



(b)系统首次穿越的条件概率密度函数



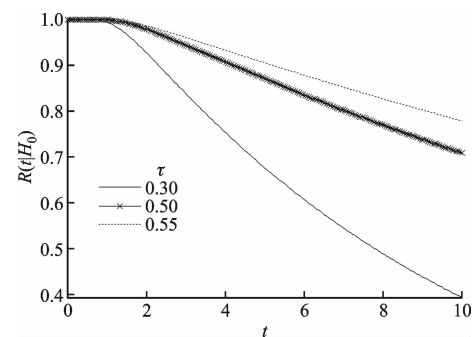
(c)平均首次穿越时间

图 1 $\tau=1.3$ 、 $D=1.2$ 时 α 对系统(1)可靠性的影响

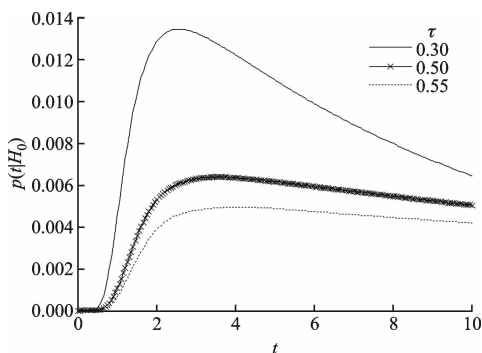
稳定。

图2及图3所示系统参数 α 与噪声强度 D 保持不变时,噪声自相关时间 τ 对系统(1)的可靠性有如下影响。

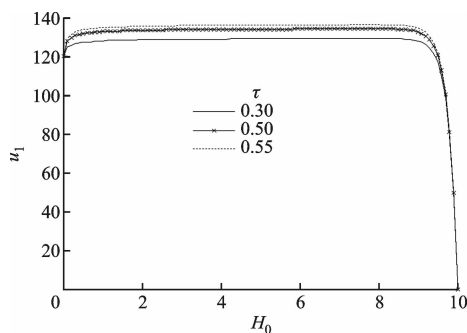
(1)比较图2a和图3a可以看到: α 较大($\alpha=0.55$)时,系统的可靠性函数的值随 τ 的增大而增大; α 较小($\alpha=0.35$)时,系统的可靠性函数的值随 τ 的增大而减小。



(a) 可靠性函数



(b) 系统首次穿越的条件概率密度函数

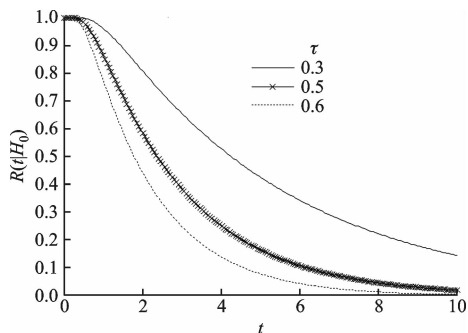


(c) 平均首次穿越时间

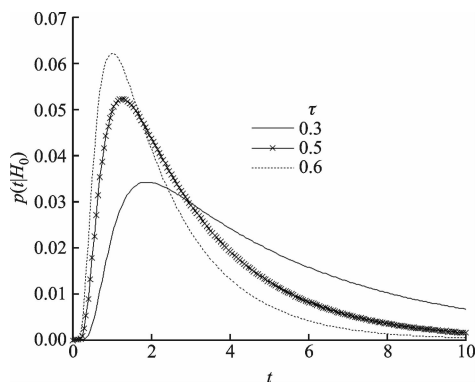
图2 $\alpha=0.55$ 、 $D=1.2$ 时 τ 对系统(1)可靠性的影响

(2)比较图2b和图3b可以看到: α 较大($\alpha=0.55$)时,首次穿越的密度函数峰的位置随 τ 的增大向右移动,峰值降低,峰的右边坡度迅速减小; α 较小($\alpha=0.35$)时,首次穿越的密度函数峰的位置随 τ 的增大向左移动,峰值增大,峰的右边坡度增大。

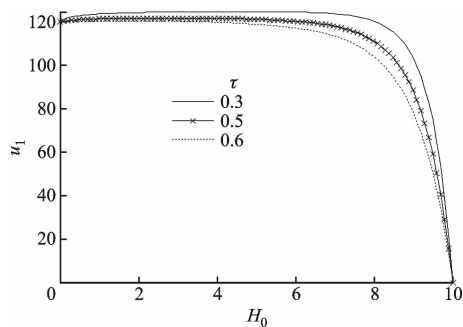
(3)比较图2c和图3c可以看到: α 较大($\alpha=0.55$)且 $H_0>9.3$ 时,系统的平均首次穿越时间随 τ 的增大迅速减小; $\alpha=0.35$ 且 $H_0>8$ 时,系统的平均首次穿越时间随 τ 的增大迅速减小。



(a) 可靠性函数



(b) 系统首次穿越的条件概率密度函数



(c) 平均首次穿越时间

图3 $\alpha=0.35$ 、 $D=1.2$ 时 τ 对系统(1)可靠性的影响

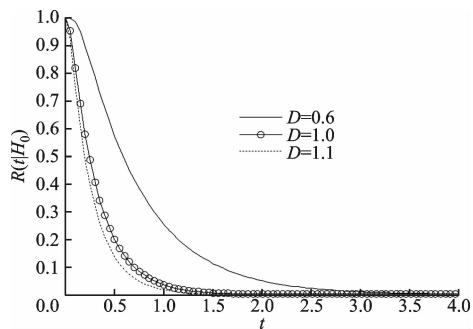
图4所示系统参数 α 与噪声自相关时间 τ 保持不变时,噪声强度 D 对系统(3)可靠性有如下影响。

(1)由图4a可以看到,系统可靠性函数的值随 D 的增大而减小。

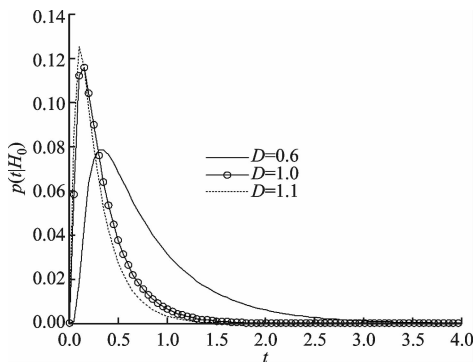
(2)由图4b可以看到,首次穿越的密度函数峰的位置随 D 的增大向右移动,峰值降低,峰的右边坡度迅速减小。

(3)由图4c可以看到,系统的平均首次穿越时间随 D 的增大而减小,当 $D>1$ 时的平均首次穿越

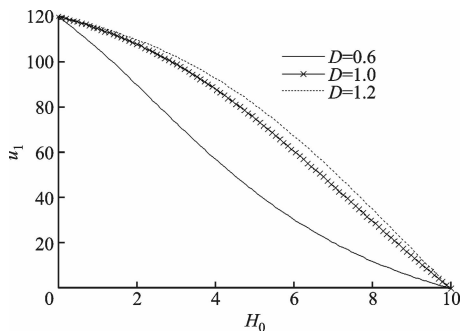
时间比 $D=1$ 时有所减小,但减小的幅度不大。这些现象都说明,随着 D 的变化,系统(1)的可靠性也会发生变化。



(a)可靠性函数



(b)系统首次穿越的条件概率密度函数



(c)平均首次穿越时间

图4 $\alpha=0.55, \tau=1.2$ 时 D 对系统(3)可靠性的影响

5 结论

本文通过 BK 方程和 GP 方程研究了 Gauss 色噪声激励下非线性阻尼系统(1)的首次穿越问题,分析了系统参数、外激励色噪声强度和噪声的相关时间对系统可靠性的影响,研究结果如下。

(1) α 、 v 和 τ 对系统可靠性会相互影响,单一因素对系统可靠性的影响不稳定。

(2) 噪声的强度增大会增大系统首次穿越的概率,降低系统的可靠性,缩短系统的首次穿越时间。

(3) 根据文献[14],系统(1)中的 α 可表示边际

消费率,非线性阻尼项系数 v 可表示资本产出率。因此,上述研究结果也说明:在短期内,经济系统的可靠性会随着外界干扰(噪声)强度的增加而增大,但随着外界干扰强度的增大,经济系统的可靠性反而会降低。在经济不稳定(α 较小)时期,需要不断调整政策性引导(τ 较小),来促使经济向稳定的方向发展。

参考文献:

- [1] 王洪礼,姚士磊,葛根,等. 形状记忆合金梁在随机激励下的随机分岔与首次穿越 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(9): 24-28.
WANG Hongli, YAO Shilei, GE Gen, et al. Stochastic bifurcation and first-passage failure of shape memory alloy beam subjected to stochastic excitation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(9): 24-28.
- [2] 谭建国,王洪礼,葛根,等. 二元机翼模型在随机参数激励下的首次穿越问题 [J]. 天津大学学报, 2009, 42(7): 581-585.
TAN Jianguo, WANG Hongli, GE Gen, et al. First passage of a two-dimensional airfoil model subject to stochastic parametric excitation [J]. Journal of Tianjin University, 2009, 42(7): 581-585.
- [3] FENG Y L, ZHU J, ZHANG M, et al. The mean first passage time and stochastic resonance in gene transcriptional systems with time delay [J]. International Journal of Modern Physics: B, 2015(6): 1-11.
- [4] 张雷,吴勇军. 五自由度强非线性随机振动系统的首次穿越研究 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(12): 1-4.
ZHANG Lei, WU Yongjun. First-passage of a 5-DOF strongly nonlinear random vibration system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(12): 1-4.
- [5] 谭平,刘良坤,李祥秀,等. 基于首次穿越破坏的 TMD 体系频域可靠性分析 [J]. 西南交通大学学报, 2015, 50(5): 886-890.
TAN Ping, LIU Liangkun, LI Xiangxiu, et al. Frequency-domain reliability analysis of tuned mass damper system by first-passage theory [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2015, 50(5): 886-890.
- [6] 曾岩,李刚. 非高斯随机激励下滞迟系统响应与首次穿越失效 [J]. 计算力学学报, 2014, 31(1): 13-17.
ZENG Yan, LI Gang. Response and first-passage of hysteretic system under non-Gaussian random excitation [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2014, 31(1): 13-17.

(下转第 154 页)