

DOI: 10.7652/xjtuxb201611017

谱元法应用于涡声传播问题的研究

包振忠, 秦国良, 耿艳辉, 和文强

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了满足计算气动声学对低色散、低耗散高精度数值离散格式的需求, 将高精度谱元法结合声比拟理论应用于求解气动声学问题。以伪声压的时间二阶导数作为非齐次波动方程的声源项, 空间离散采用谱元法, 时间离散应用隐式 Newmark 法, 并在外边界采用 C-E-M 吸收边界条件, 求解了由两个相距为 $2r_0$ 的等环量点涡组成的同向旋转涡对的发声问题。旋转涡对的不可压缩流场通过复位势理论获得, 声源由流场量计算得来, 并将数值结果与应用多级匹配展开法得到的解析解进行比较, 可得数值解与分析解吻合较好。研究表明: 应用高精度谱元法进行空间离散时, 每波长的网格数为 11 时可达到很高的精度; 网格数一定的情况下, 时间步长越小得到的数值解与分析解之间的误差就越小; 另外, 证明了将伪声压对时间的二阶导数作为声源项, 能够高精度求解不可压缩流动引起的气动声学问题。

关键词: 计算气动声学; 谱元法; 声比拟理论; 吸收边界条件; 有限元; 同向旋转涡对

中图分类号: O121.8; G558 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)11-0110-06

Investigation of Vortex Sound Propagation Using Spectral Element Method

BAO Zhenzhong, QIN Guoliang, GENG Yanhui, HE Wenqiang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to meet the requirements of low dispersive and low dissipative numerical discretization schemes in computational aero-acoustics, the spectral element method combined with Lighthill's acoustic analogy theory for the simulation of aeroacoustic problems is investigated. Taking the second temporal derivative of pseudopressure as the source of the inhomogeneous wave equation, and space discretization using spectral element method time discretization using implicit Newmark method, under the C-E-M absorbing boundary condition the acoustic field generated by a co-rotating spinning vortex pair is solved. This co-rotating vortex pair consists of two point vortices separated by a fixed distance of $2r_0$ with a circulation intensity Γ . The incompressible flow field is obtained using the complex potential theory, and the acoustic source terms are computed using these hydrodynamic quantities. The acoustic pressure results are evaluated by comparing them with the analytical solution obtained from the matched asymptotic expansion (MAE) method. The numerical solutions are in good agreement with the analytical solutions. The results show that the spectral element method can obtain high accuracy using only eleven grids in one wavelength. In the case of the same number of grids, the smaller the time step, the smaller the error between numerical solution and analytical solution. Finally,

收稿日期: 2016-05-20。 作者简介: 包振忠(1992—),男,博士生;秦国良(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB026004)。

网络出版时间: 2016-09-14

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20160914.1803.002.html>

it is proved that the aero-acoustic problems induced by incompressible flows can be solved with high accuracy by using the second temporal derivative of the pseudopressure as the acoustic source.

Keywords: computational aero-acoustics; spectral element method; acoustic analogy theory; absorbing boundary condition; finite element method; co-rotating spinning vortex pair

随着各种交通工具速度的快速提升,辐射的气动噪声也急剧增大。气动噪声不仅引起环境污染甚至还会造成结构的疲劳和破坏,会对人的生理和心理构成严重影响。随着计算流体力学(CFD)的飞速发展,数值模拟被广泛应用于工程实践,但传统的 CFD 方法无法满足气动声学问题的研究,计算气动声学(CAA)对计算格式提出了比较苛刻的要求^[1-2]。由于声波在传播过程中衰减很慢且声学量相对于流动量在量级上要小得多,这就要求数值方法本身必须是高精度数值方法,其数值噪声要尽量小,避免声波脉动量被数值误差所掩盖,即该高精度方法具有极低的数值色散和耗散以确保能够高精度模拟声波的长距离传播。另外,传统的 CFD 所求解的区域较小,数值模拟总在有限的区域内进行,声波在传播过程中具有低耗散特性相较于流场的数值模拟,声场的数值模拟需要更多的计算花费。为减少计算量,声波在计算域开放边界必须能无反射出入,采用适当的吸收边界条件^[3]才能达到这一效果。

湍流产生的噪声大都起源于流动中的涡结构,因此在计算气动声学中常使用涡源作为人工声源来分析噪声产生的机理^[4]。双涡流动结构是复杂流场中的常见现象,大型民机增升装置后缘襟翼侧缘所卷起的旋涡即为典型的双涡流动^[5]。Manfred 等用有限元法求解了不可压缩 N-S 方程和非齐次波动方程,结合声比拟理论将流场信息插值到声场网格中,得到了双涡流动发声的数值解^[6-7]。Zhu 等采用高阶有限差分格式结合黏声分离法对双涡流动发声问题进行了数值模拟^[8-9]。Farshchi 等采用线性和非线性黏声分离技术,并使用高阶色散保持格式进行数值离散,求解了双涡流动发声问题,结果表明,线性计算在保持计算精度的条件下大幅降低了计算时间^[10]。Ekaterinaris 发展了黏声分离技术,并用高阶迎风格式对控制方程进行了离散求解,验证了数值格式具有较好的数值精度^[11-12]。

本文基于 Chebyshev 谱元法对控制方程进行空间离散,时间离散应用隐式 Newmark 法并结合声比拟理论从流场中提取声源,对同向旋转涡对的发声问题进行了数值模拟,并研究了数值精度的影

响因素^[13-14],为更好地求解计算气动声学问题提供了一定的理论依据。

1 控制方程

自 1952 年 Lighthill 提出声比拟理论以来, Lighthill 方程

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

在气动声学问题中得到广泛应用,其中 T_{ij} 为 Lighthill 应力张量,在绝热无黏的情况下表达式为

$$T_{ij} = \rho u_i u_j \quad (2)$$

在不可压缩流动中,压力波动 p' 可分解成声压 p^a 和伪声压 p^i ^[15],即

$$p' = p^i + p^a \quad (3)$$

由不可压缩连续性方程和动量方程可得伪声压,满足条件^[16]

$$-\nabla^2 p^i = \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4)$$

将式(4)代入式(1)可得

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p^a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p^a}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2 p^i}{\partial t^2} \quad (5)$$

式(5)提供了一种只用伪声压的二阶时间导数即可作为声源来计算声压的方法,该方法等价于文献[9]中所提的黏声分离法,初始条件为

$$p^a(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial p^a}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (6)$$

2 数值算法

对边界条件的处理是声波传播的一个关键问题,由于计算机资源和区域的限制,所以在数值模拟波动问题时需要求解区域进行边界截断。由于截断在边界处会引起波的反射,影响数值求解区域,为了减小波的反射,本文采用 C-E-M 吸收边界条件^[17]

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \Gamma_l \times [0, T] \quad (7)$$

结合吸收边界条件,式(5)相应的 Galerkin 变分形式为

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p^a}{\partial t^2} w d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial p^a}{\partial x_i} d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma_l} \frac{1}{c_0} \frac{\partial p^a}{\partial t} w d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 p^i}{\partial t^2} w d\Omega$$
$$\forall p^a, w \in H^1(\Omega), t \in [0, T] \tag{8}$$

式中： Γ_l 为边界； w 为检验函数。

2.1 空间离散

谱元法 (SEM) 具有高精度、灵活性好等优点，单元中增加插值节点或加密网格都能使精度大幅提高，且对复杂几何具有极好的适应性，能满足计算气动声学的要求。对于变分问题，本文采用高精度谱元法对其进行了空间离散，以 Chebyshev 多项式的极值点作为插值点，利用 Chebyshev 多项式逼近待求函数。分别以 $\ddot{p}^a$ 、 $\dot{p}^a$ 表示 $\frac{\partial^2 p^a}{\partial t^2}$ 、 $\frac{\partial p^a}{\partial t}$ ，考虑到检验函数的任意性，由式 (8) 可得关于时间的二阶常微分线性方程组

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{p}}^a + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{p}}^a + \mathbf{K} \cdot \mathbf{p}^a = \mathbf{S} \tag{9}$$

式中： $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{S}$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和源项，具体离散过程和表达式可参见文献 [18]。

2.2 时间离散

式 (9) 在时域上的求解一般有隐式和显式两种逐步积分途径，显式逐步积分方法一般是条件稳定的，隐式方法是绝对稳定的。考虑到算法的稳定性，本文选择隐式 Newmark 方法，递推公式为

$$\left(\mathbf{K} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{p}_{t+\Delta t}^a = \mathbf{S}_{t+\Delta t} +$$
$$\mathbf{M} \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{p}_t^a + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{p}}_t^a + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{p}}_t^a \right] +$$
$$\mathbf{C} \left[\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{p}_t^a + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{p}}_t^a + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{p}}_t^a \right] \tag{10}$$

式中： α 、 δ 为由积分精度和稳定性要求决定的参数； $\dot{\mathbf{p}}_0^a = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{S}_0 - \mathbf{K} \mathbf{p}_0^a - \mathbf{C} \dot{\mathbf{p}}_0^a)$ 为起始步。

3 数值算例

3.1 数值模型

同向旋转涡对配置如图 1 所示，由两个相距为 $2r_0$ 、环量为 Γ 的点涡组成，由于点涡间速度的相互

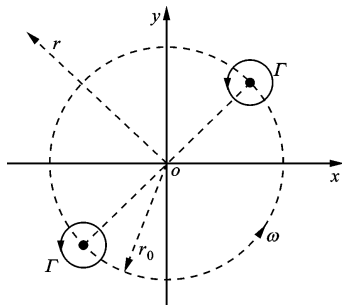


图 1 同向旋转涡对配置

诱导作用，使得涡对围绕坐标原点作公转运动，运动速度 $v_\theta = \Gamma / (4\pi r_0)$ ，旋转角速度 $\omega = \Gamma / (4\pi r_0^2)$ ，旋转周期 $T = 8\pi^2 r_0^2 / \Gamma$ ，旋转马赫数 $M_r = v_\theta / c_0$ ，其中 c_0 为声速。

在不可压缩、无黏的条件下，涡对产生的流场可用复位势函数来表示，即

$$\phi(z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z^2 \left(1 - \frac{b^2}{z^2} \right) \tag{11}$$

式中： $z = x + iy = r e^{i\theta}$ ； $b = r_0 e^{i\omega t}$ 。

由式 (11) 可得计算声源时需要的流量量

$$u_x - i u_y = \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} = \frac{\Gamma}{i\pi} \frac{z}{z^2 - b^2}$$
$$p^i = p_0 - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \{ \text{Re}(\phi(z, t)) \} - \frac{1}{2} \rho_0 (u_x^2 + u_y^2) \tag{12}$$

声压波动的分析解 [18] 可通过匹配渐近展开法获得，即

$$p^a = \frac{\rho_0 \Gamma^4}{64 \pi^3 r_0^4 c_0^2} [J_2(kr) \sin(\psi) - Y_2(kr) \cos(\psi)] \tag{13}$$

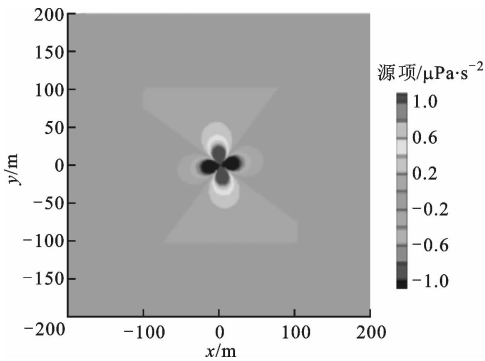
式中： $k = 2\omega / c_0$ ； $J_2(kr)$ 、 $Y_2(kr)$ 分别为第 1、2 类二阶贝塞尔函数； $\psi = 2(\omega t - \theta)$ 。

计算区域选为 $400 \text{ m} \times 400 \text{ m}$ 的方形区域，将源项区域限定在中间范围的 $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$ 区域。总节点数 $N_d = (N_m N_x + 1)(N_n N_y + 1)$ ，旋转半径 $r_0 = 1 \text{ m}$ ，环量 $\Gamma = 1.00531 \text{ m}^2/\text{s}$ ，声速 $c_0 = 1 \text{ m/s}$ ，波长 $\lambda \approx 39 \text{ m}$ ， $M_r = 0.0796$ 。本文在模拟中取均匀单元，单元内的插值节点数为 2，在全部区域的网格都为均匀网格。

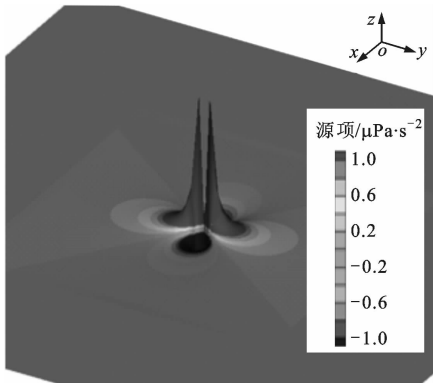
3.2 数值结果

图 2 给出了式 (5) 中的源项在 $t = 100 \text{ s}$ 时的云图和三维图，其中时间步长 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ，网格间距 $\Delta x = 3.64 \text{ m}$ ，此时每波长的网格数约为 11。由图 2 可看出四极子源项的特征，且源项区域足够大，使得截断处源项的幅值远小于最大值，仅为其 0.25%；原点处具有奇异性，源项梯度特别大。为了消除这一奇异性，Manfred 等采用 Scully 涡核模型 [19]，Ekat-erinaris 等采取了对原点附近的源项进行截断的办法 [12]。本文采用文献 [12] 的方法，即 $r/r_0 \leq 1.5$ 时不存在源项。

同向旋转涡对在 240 s 时产生的声压场如图 3 所示。由图 3 可看出，产生的声场为旋转的双螺旋形结构，吸收边界条件的应用可吸收外向声波，不影响声场中解的精度，声波传递出去基本没有引起反射。

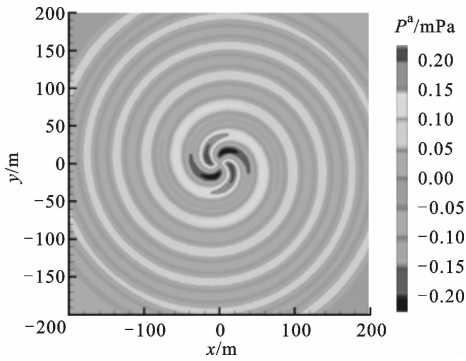


(a)源项云图

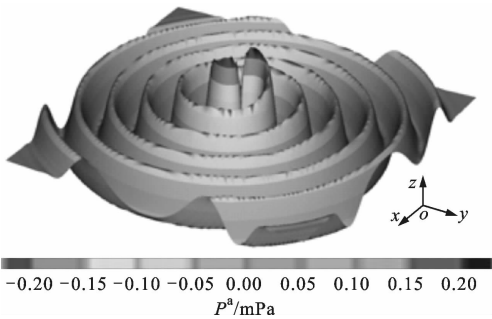


(b)源项三维图

图 2 源项分布图



(a)同向旋转涡对声场云图



(b)同向旋转涡对声场三维图

图 3 240 s 时同向旋转涡对声场

为了比较不同网格间距对数值结果的影响,分别计算了 $\Delta x=9.52, 6.45, 3.92, 2.82$ m、 $\Delta t=2.0$ s 时的声场,声压沿 x 正半轴方向的变化情况如图 4 所示。随着传播距离的增加,声压总体呈现衰减的趋势。 $\Delta x=9.52$ m 时,由于其网格间距太大,与其他节点数时的解有明显偏差,其他声压型线整体基本一致,幅值和相位都没有太大偏差。

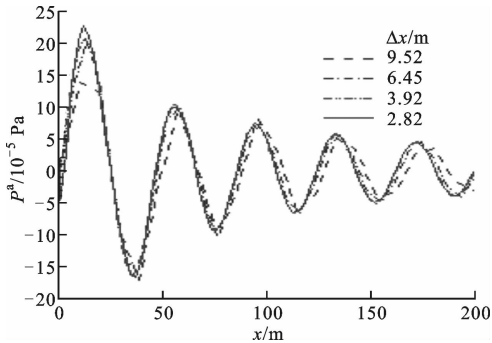


图 4 不同网格间距时 x 方向的声压型线

$\Delta x=3.64$ m、不同时间步长时声压沿 x 正半轴方向的变化曲线如图 5 所示。由图 5 可看出,在靠近原点附近数值解与分析解差别较大,这是由消除原点奇异性对源项的截断所引起的。另外,随着时间步长的减小,声压型线与分析解之间的差别也越来越小,但是幅值仍稍微低于分析解,可能和谱元算法在计算离散波动方程时的耗散有关。色散误差除了在 $\Delta t=2.0$ s 时较大,其余时间步长均很小,与分析解吻合较好。具体谱元方法求解波动方程及数值精度的相关因素分析可参考文献[20]。

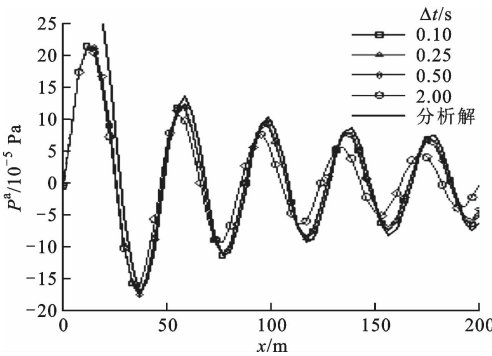


图 5 不同时间步长时 x 方向的声压型线

(0,58.2)点处声压数值解和分析解随求解时间的变化如图 6 所示,原点附近的声波到达该点后,声压数值解与分析解匹配很好,只有在波峰与波谷处略微小于分析解。这是由消除原点奇异性对源项进行截断,而导致总体源项偏小所引起的。240 s 处声压数值解与分析解的比较如图 7 所示。由图 7 可看出,数值解与分析解的相位、幅值都比较吻合,在

分界线处没有明显的数值跳跃。

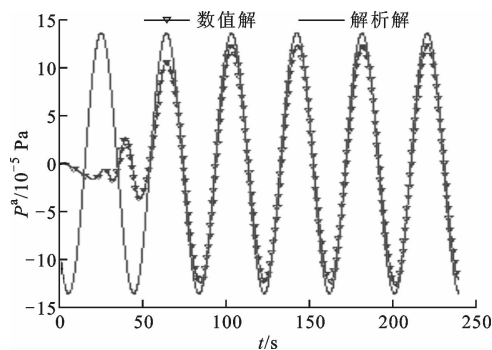


图6 (0,58.2)点处声压随时间的变化

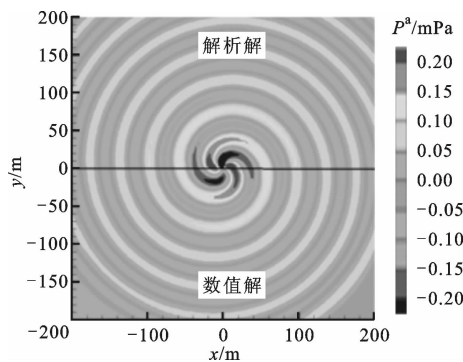


图7 240 s时数值解与分析解的比较

4 结 论

本文实现了将高精度谱元法结合声比拟理论应用于求解气动声学的问题,并对由两个点涡形成的同向旋转涡对声场进行了数值模拟。为了分析影响数值精度的原因,计算了不同网格、不同时间步长情况下的声场,并将计算结果与用多极匹配展开法得来的分析解进行了对比。结果表明:应用谱元法进行空间离散时,采用极少的节点数就可达到很高的精度;节点数一定的情况下,时间步长越小得到的数值解与分析解之间的误差越小,但花费的计算资源越多。用数值算例验证了将伪声压对时间的二阶导数作为声源项,可用来求解不可压缩流动引起的气动声学问题。

参考文献:

- [1] 李晓东,江旻,高军辉,等. 计算气动声学进展与展望[J]. 中国科学:物理学·力学·天文学,2014(3): 234-248.
- LI Xiaodong, JIANG Min, GAO Junhui, et al. Progress and prospective of computational aeroacoustics [J]. Science China: Physics, Mechanics & Astrono-

my, 2014(3): 234-248.

- [2] LELE S K, NICHOLS J W. A second golden age of aeroacoustics [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London: A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2014, 372(2022): 20130321.
- [3] GIVOLI D. High-order local non-reflecting boundary conditions: a review [J]. Wave Motion, 2004, 39(4): 319-326.
- [4] DAHL M D. Numerical solutions to the fourth and second computational aeroacoustics (CAA) workshop benchmark problems [C] // The 4th Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems. Washington, DC, USA: NASA Glenn Research Center, 2004: 187-197.
- [5] 徐康乐,陈迎春,陶俊,等. 低马赫数条件下气动声场流场分裂求解方法研究[J]. 复旦学报(自然科学版), 2014, 53(5): 636-644.
- XU Kangle, CHEN Yingchun, TAO Jun, et al. A splitting simulation method for aeroacoustic at low Mach conditions [J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2014, 53(5): 636-644.
- [6] HÜPPE A, KALTENBACHER M. Spectral finite elements for computational aeroacoustics using acoustic perturbation equations [J]. Journal of Computational Acoustics, 2012, 20(2): 1240005.
- [7] ALI I, ESCOBAR M, KALTENBACHER M, et al. Time domain computation of flow induced sound [J]. Computers & Fluids, 2008, 37(4): 349-359.
- [8] ZHU W J, SHEN W Z, SØRENSEN J N. High-order numerical simulations of flow-induced noise [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011, 66(1): 17-37.
- [9] HARDIN J, POPE D. An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics [J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1994, 6(5/6): 323-340.
- [10] FARSHCHI M, HANNANI S K, EBRAHIMI M. Linearized and nonlinear acoustic/viscous splitting techniques for low Mach number flows [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2003, 42(10): 1059-1072.
- [11] EKATERINARIS J A. New formulation of Hardin-Pope equations for aeroacoustics [J]. AIAA Journal, 1999, 37(9): 1033-1039.
- [12] EKATERINARIS J A. An upwind scheme for the computation of acoustic field generated by incompressible flow [J]. AIAA Journal, 1997, 35(1): 14481455.

(下转第120页)