

DOI: 10.7652/xjtuxb201705023

应用点基局部光滑点插值法的 固有频率上下界计算

鲁欢¹, 于大鹏¹, 张桂勇^{1,2,3}, 刘宜军¹, 王海英⁴

(1. 大连理工大学船舶工程学院辽宁省深海浮动结构工程实验室, 116024, 辽宁大连; 2. 大连理工大学工业装备与结构分析国家重点实验室, 116024, 辽宁大连; 3. 高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 200240, 上海; 4. 大连海洋大学航海与船舶工程学院, 116023, 辽宁大连)

摘要: 针对传统有限元方法得到的刚度阵过硬导致所提供的固有频率上限值较为粗糙、点基光滑点插值方法得到的刚度阵过软导致所提供的固有频率下限值较为宽泛且存在时间不稳定性等问题,提出了点基局部光滑点插值法(NLS-PIM)。该方法将有限元和点基光滑点插值法相结合,对背景网格基础上形成的点基光滑域进行局部应变光滑,通过调整二者结合的权重来控制计算模型的整体刚度。研究发现,采用局部梯度光滑方法控制模型刚度而形成的点基局部光滑点插值法,克服了点基光滑点插值方法的时间不稳定性及有限元法的固有缺陷,且能提供更为精细的固有频率上下界区间。所提方法简便、实用、易于实现,可用于复杂问题求解。

关键词: 固有频率;有限元方法;点基光滑点插值法;局部应变光滑

中图分类号: O313.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)05-0165-08

Node-Locally-Based Smoothed Point Interpolation Method for Calculating Upper/Lower Bounds of Natural Frequency

LU Huan¹, YU Dapeng¹, ZHANG Guiyong^{1,2,3}, LIU Yijun¹, WANG Haiying⁴

(1. Liaoning Engineering Laboratory for Deep-Sea Floating Structures, School of Naval Architecture Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China; 2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China; 3. Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration, Shanghai 200240, China; 4. School of Navigation and Marine Engineering, Dalian Ocean University, Dalian, Liaoning 116023, China)

Abstract: The traditional finite element method (FEM) gives over-hard stiffness and hence provides rough upper bounds for natural frequencies, but the node-based smoothed point interpolation method (NS-PIM) gives over-soft stiffness hence provides lower bounds with temporal instability for natural frequencies. A node-based locally smoothed point interpolation method (NLS-PIM) is thus proposed. FEM is combined with NS-PIM by conducting locally gradient smoothing operation on the node-based smoothing domains based on background cells. And the stiffness can be adjusted by changing the parameter α , which is the proportion of the locally smoothed domain over each background cell. It is found that the proposed method can successfully overcome the temporal instability of NS-PIM and the inherent shortcomings of FEM and provide much tighter upper and lower bounds for natural frequencies due to the controlled

收稿日期: 2016-08-29。 作者简介: 鲁欢(1992—),男,硕士生;张桂勇(通信作者),男,教授。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51579042,51639003);国家“青年千人计划”资助项目(D1007001);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT16 ZD218)。

网络出版时间: 2017-02-23

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20170223.1108.006.html>

model stiffness by the node-based locally gradient smoothing operation.

Keywords: natural frequency; finite element method; node-based smoothed point interpolation method; local strain smoothing

求解结构固有频率是工程中经常遇到的问题,结构固有频率和振型是结构动力分析的基础,在结构设计、系统辨别等领域起着重要作用。目前,固有频率测定方法主要有实验方法、理论方法和数值模拟。实验方法准确性高但较为昂贵,理论分析仅能求解形状规则的结构,对于大型复杂结构的固有频率分析很难给出解析解,往往需要进行数值模拟。有限元方法(FEM)离散化^[1]后的精确性取决于网格的数量、单元类型以及划分方式;采用高阶的单元、精细化网格可得到精确的固有频率,但耗时长。针对复杂结构,在固有频率精确值难以测定和计算的情况下,如果得到各阶频率上下限数据便可有效避开共振,在近似解误差估计时也可根据固有频率区间进行计算^[2]。

计算结构固有频率上下限的方法为数不多^[3-5],已被证明有限元方法采用一致质量阵可以得到固有频率的上限^[6],但同时存在一些固有缺陷^[7]:使用三角形网格时刚度阵过硬,得到固有频率上界较为粗糙;使用四边形网格时精确性较高,但很难完成复杂结构的网格划分^[8];大变形时网格畸变会导致精确度降低甚至计算失败。

对于结构固有频率下限值的求解,已有诸多学者进行了相关研究并提出了多种方法,包括瑞利商法^[9]、积分方程法^[10-12]、Bazley 第二投影法和福克斯理论^[13-16]等,但是这些方法只针对一些几何形状规则的梁或板。由于基于广义梯度光滑化技术^[17-18]的点基光滑点插值方法(NS-PIM)的刚度阵软化,所以其又提供了能量解上限和固有频率下限值^[19-23],但通过一些数值算例验证发现,NS-PIM 求得的固有频率精度较低,提供的下限值较为宽泛^[18,22,24],下限值也未必能逼近真实解。基于上述内容,本文将有限元和点基光滑点插值方法相结合,采用局部梯度光滑的方法来控制模型刚度,形成点基局部光滑点插值法(NLS-PIM),既克服了点基光滑点插值方法的时间不稳定性及有限元法的固有缺陷,又提供了更为精细的固有频率上下界区间。

1 数值方法

1.1 有限元法

根据伽辽金弱式得到

$$\int_{\Omega} (\nabla_s \delta \mathbf{u})^T \mathbf{D} (\nabla_s \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^T) \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^T) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

式中: $\mathbf{D}$ 为材料弹性常数矩阵; $\mathbf{b}$ 为体力矢量; $\bar{\mathbf{t}}$ 为自然边界 Γ_t 上的外力; $\mathbf{u}$ 为试函数; $\delta \mathbf{u}$ 是检验函数; $\nabla_s \mathbf{u}$ 为位移场梯度; Ω 为物理域。

相应的位移场可近似为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{N_p} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) \mathbf{d}_j \\ \delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{N_p} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) \delta \mathbf{d}_j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{N}_j(\mathbf{x})$ 为形函数矩阵; $\mathbf{d}_j$ 为节点位移矢量; N_p 为插值所用的节点数。

将式(2)代入式(1)得到系统的离散方程

$$\mathbf{K}^{\text{FEM}} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{K}^{\text{FEM}}$ 为系统刚度矩阵; $\mathbf{f}$ 为力矢量。它们由下式得到

$$\mathbf{K}_{IJ(e)}^{\text{FEM}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (4)$$

$$\mathbf{f}_{J(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_J^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_J^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_J(\mathbf{x}) = \nabla_s \mathbf{N}_J(\mathbf{x}) \quad (6)$$

本文采用三节点单元,应变矩阵是常数矩阵,则式(4)变为

$$\mathbf{K}_{IJ(e)}^{\text{FEM}} = \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J A_e \quad (7)$$

式中: A_e 为单元面积。

1.2 点基光滑点插值法

点基光滑点插值方法借助背景网格将问题域进行离散,在此基础上形成基于节点的光滑域^[18-19],如图1所示。

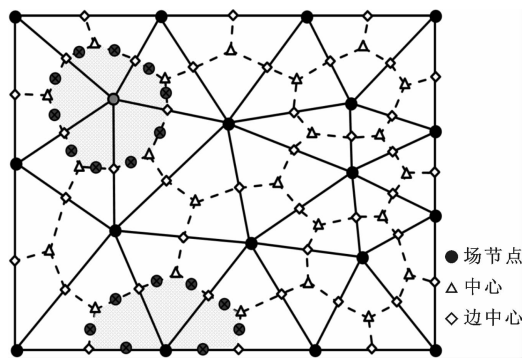


图1 三角形背景网格及基于节点的光滑域示意图

根据 GS-Galerkin 弱形式 (generalized smoothed Galerkin weak form) 得到下式^[18]

$$\sum_{i=1}^{N_s} A_i^s (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T(\bar{\mathbf{u}})) \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\bar{\mathbf{u}}) - \left(\int_{\Omega} (\delta \bar{\mathbf{u}}^T) \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta \bar{\mathbf{u}}^T) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) = 0 \quad (8)$$

式中: A_i^s 为光滑域面积; N_s 为光滑域数目 (对于 NS-PIM 等于节点数); $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\bar{\mathbf{u}})$ 为光滑应变

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma_i^s} \mathbf{L}_n \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (9)$$

其中 Γ_i^s 为光滑域边界, $\mathbf{L}_n$ 为外法向量组成的矩阵

$$\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

n_1 和 n_2 分别对应光滑域边界的方向余弦。

相应的位移场近似为

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in s_n} \boldsymbol{\Phi}_I(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}}_I = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}} \quad (11)$$

式中: $\boldsymbol{\Phi}_I(\mathbf{x})$ 为节点 I 处的点插值形函数, 有多项式基函数和径向基函数两种形式, 采用多项式基函数形成点插值形函数, 插值点采用基于背景网格选点的 T6/3 格式^[18] 选取; $\boldsymbol{\Phi}$ 为由 $\boldsymbol{\Phi}_I(\mathbf{x})$ 组成的形函数矩阵; s_n 为用于插值的节点集; $\bar{\mathbf{d}}$ 为节点位移矢量

$$\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{\mathbf{d}}_1(\mathbf{x}) \ \bar{\mathbf{d}}_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \bar{\mathbf{d}}_I(\mathbf{x}) \ \cdots \ \bar{\mathbf{d}}_{s_n}(\mathbf{x})\}^T \quad (12)$$

将式(10)、(11)代入式(9)得到

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\mathbf{x}) = \sum_{I \in s_s} \bar{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}}_I = \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{d}} \quad (13)$$

式中: s_s 为形成光滑应变过程中用到的插值点集; $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ 为光滑应变矩阵

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = [\bar{\mathbf{B}}_1(\mathbf{x}) \ \bar{\mathbf{B}}_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \bar{\mathbf{B}}_{s_s}(\mathbf{x})] \bar{\mathbf{d}} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma_i^s} \mathbf{L}_n(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Phi}_I(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (15)$$

将式(11)、(13)代入式(8)得

$$\mathbf{K}^{\text{NS-PIM}} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (16)$$

$$\mathbf{K}^{\text{NS-PIM}} = \sum_{i=1}^{N_s} A_i^s \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\Phi}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (18)$$

系统矩阵 $\mathbf{K}^{\text{NS-PIM}}$ 由下式得到

$$\mathbf{K}_{IJ}^{\text{NS-PIM}} = \sum_{i=1}^{N_s} A_i^s \bar{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_J \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_{IJ(I)}^{\text{NS-PIM}} = A_i^s \bar{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_J \quad (20)$$

1.3 点基局部光滑点插值法

对于动力问题, GS-Galerkin 弱式可写成

$$\sum_{i=1}^{N_s} A_i^s (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T(\bar{\mathbf{u}})) \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(\bar{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} (\delta \bar{\mathbf{u}}^T) \mathbf{b} d\Omega -$$

$$\int_{\Gamma_t} (\delta \bar{\mathbf{u}}^T) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (\delta \bar{\mathbf{u}}^T) \bar{\mathbf{u}}'' d\Omega = 0 \quad (21)$$

式中: ρ 为质量密度。

将式(11)、(13)代入式(21)得到

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{d}}'' + \mathbf{C} \bar{\mathbf{d}}' + \mathbf{K} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为质量矩阵; $\mathbf{C}$ 为阻尼矩阵; $\bar{\mathbf{f}}$ 为力矢量。

相应表达式分别为

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} d\Omega \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{c} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} d\Omega \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\Phi}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (25)$$

式(23)为一致质量矩阵表达式, 质量矩阵也可以采用集中质量阵, 即将单元质量集中到各个节点上, 可用对角阵表示。

对于自由振动, 式(22)简化为

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{d}}'' + \mathbf{K} \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}_A \exp(i\omega t) \quad (27)$$

式中: $\bar{\mathbf{d}}_A$ 为位移幅值; t 为时间; ω 为自然频率, 可由下式求得

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{d}}_A = \mathbf{0} \quad (28)$$

在结合了有限元方法 (FEM) 和点基光滑点插值方法 (NS-PIM) 后, 背景网格部分区域可采用有限元法, 部分区域采用点基光滑点插值方法, 这样对问题域只需进行局部光滑处理, 如图 2 所示。对于 NLS-PIM, 通过引入权重参数 $\alpha \in [0, 1]$ 使刚度阵由 FEM 和 NS-PIM 方法二者相结合得到

$$\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{K}_{IJ}^{\text{NS-PIM}} + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{FEM}} \quad (29)$$

$$(1 - \alpha) \sum_{i=1}^{N_s} \bar{\mathbf{B}}_I^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_J A_i^s + \alpha \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J A_e \quad (29)$$

式中: A_e 为第 e 个背景单元的面积; A_i^s 为第 i 个节点光滑域的面积 (见图 2); N_e 为单元数目。从图 2 和式(26)可知: 当 $\alpha=0$ 时方法退化为 NS-PIM; 当 $\alpha=1$ 时, 方法为 FEM; 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时, 方法介于 FEM 和 NS-PIM 二者之间, 且随着 α 的增大, 刚度阵由过软过渡到过硬。具体计算时采用 $\alpha=0.1$ 计算固有频率下限值, 此时刚度阵较 NS-PIM 的硬, 但

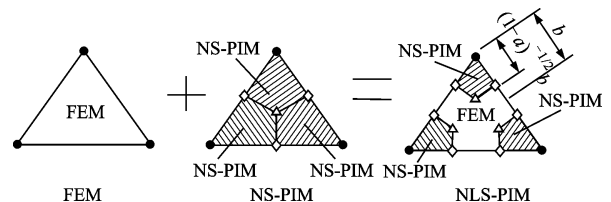


图2 NLS-PIM 方法的形成过程

依旧比精确刚度的软;取 $\alpha=0.6$ 计算固有频率上限值,此时刚度阵较 FEM 的软,但比精确刚度的硬。因此,所提计算方法能够很好地提供固有频率上下限,这些性质在后续的算例中可以得到证明。

2 数值算例

2.1 悬臂梁固有频率

2 维悬臂梁计算模型如图 3 所示,其参数:梁长 $L=100\text{ m}$,宽 $D=10\text{ m}$,厚度 $t=1.0\text{ m}$,杨氏模量为 $2.1\times 10^4\text{ Pa}$,泊松比 $\nu=0.3$,质量密度 $\rho=8.0\times 10^{-10}\text{ kg/m}^3$ 。利用 3 种不同的三角形网格划分来离散问题域,不规则节点数分别为 120、209、612。由于欧拉理论下悬臂梁解析解未考虑剪切变形的影响,所以本文利用 ABAQUS 软件中四边形单元和相对更精细的网格(101 101 个节点和 100 000 个单元)求得的结果作为参考解。

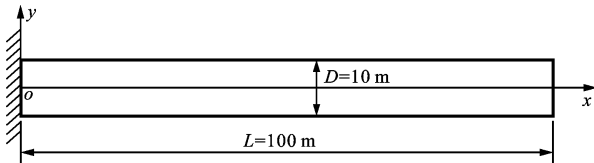


图 3 2 维悬臂梁计算模型

不同方法在 209 个节点下悬臂梁各阶固有频率如图 4 所示。从图中可以看出: NS-PIM 能够提供固有频率下限解,但数值远小于参考解; FEM 求得固有频率上限解; 本文方法 NLS-PIM($\alpha=0.6, 0.1$)求得的结果位于参考解的上下两侧,在 FEM 和 NS-PIM 提供的区间内部,表明本文方法提供了一个更为准确的固有频率上下界区间。

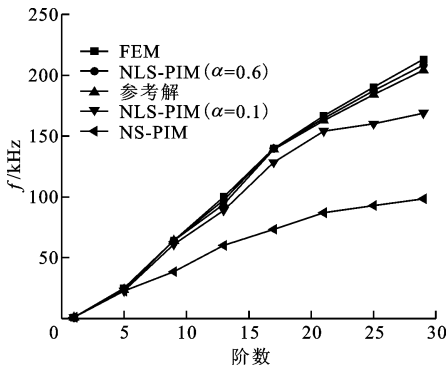
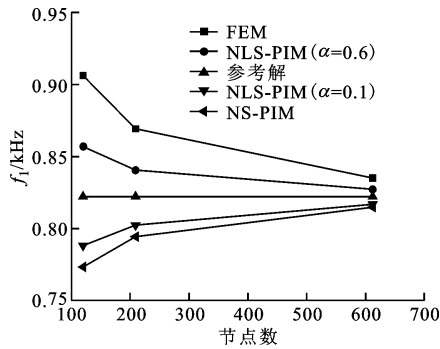


图 4 不同方法在 209 个节点下悬臂梁各阶固有频率

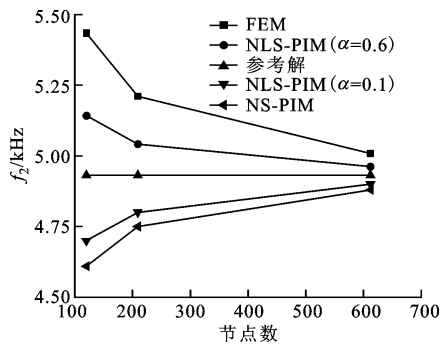
不同节点数采用不同方法求得的悬臂梁 1、2、5、20、25、30 阶固有频率如图 5 所示。从图中明显看出: 随着网格的细化,各方法均向参考解逼近; FEM 提供了上限解, NS-PIM 提供了下限解且结果距离参考解较远,上下限范围较大; NLS-PIM($\alpha=$

0.6, 0.1)提供的结果始终位于参考解的上下两侧并在 FEM 和 NS-PIM 提供的上下限的内部,表明本文方法能够提供更为准确的固有频率上下限。

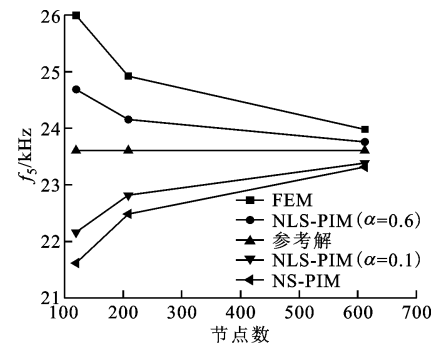
不同方法在 209 个节点下求得的 1~10 及 20



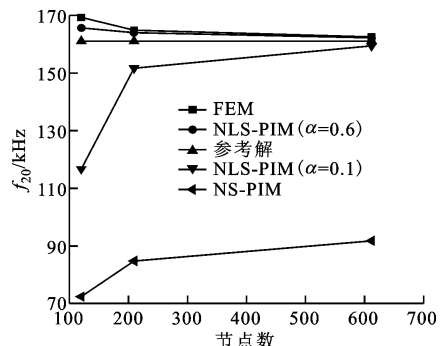
(a) 1 阶频率



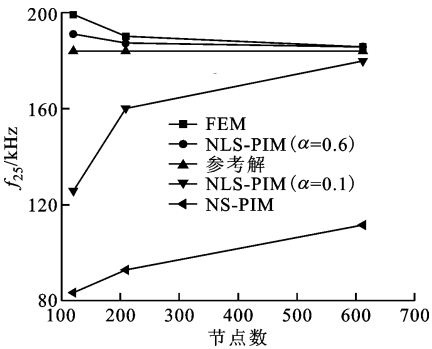
(b) 2 阶频率



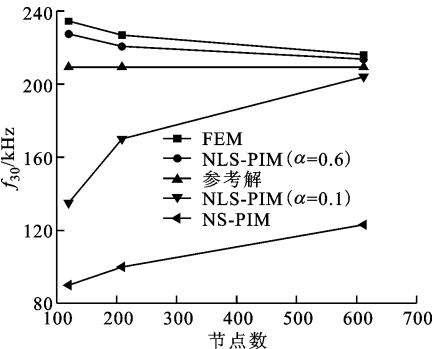
(c) 5 阶频率



(d) 20 阶频率



(e)25 阶频率



(f)30 阶频率

图 5 不同节点数采用不同方法求得的悬臂梁固有频率

阶模态如图 6 所示,并和 ABAQUS 软件求得的参考解进行了对比。

从图中可以看出: NS-PIM 在 5、7、10、20 模态出现了虚假的非零能模态; NLS-PIM($\alpha=0.6, 0.1$)均未出现非零能模态,且各阶振型与 ABAQUS 求得的参考振型相一致,说明采用局部点光滑方法改

变了模型刚度,可以有效解决 NS-PIM 的时间不稳定问题,使之适用于动力学问题求解。

2.2 连接件固有频率

2 维连接杆模型如图 7 所示。该算例为平面应力问题,参数:杨氏模量为 1.0×10^{10} Pa,泊松比 $\nu=0.3$,质量密度 $\rho=7.8 \times 10^3$ kg/m³,左侧内环的节点完全固定。本文利用 ABAQUS 软件中四边形单元和相对更加精细网格(26 465 个节点和 25 673 个单元)求得的结果作为参考解。

同算例 1 类似,分别利用 NS-PIM、NLS-PIM($\alpha=0.6, 0.1$)和 FEM 求解该问题。649 个节点下各种方法求得的前 30 阶固有频率比对如图 8 所示。从图中可以看出,对于这个复杂构件,NS-PIM 提供了固有频率下限, FEM 提供了固有频率上限, NLS-PIM($\alpha=0.6, 0.1$)求得的结果位于二者之间,且提供了一个更为狭窄的固有频率上下界区间。

不同节点数采用不同方法得到连接杆的 1、2、5、20、25、30 阶固有频率,如图 9 所示。从图中可以看出,网格细化后所有方法均收敛到参考解,而 NLS-PIM 能够提供更为精细的固有频率上下限区间。

连接杆 1、2、3、16、18、20 阶模态如图 10 所示。从图中可以看出,利用 NS-PIM 求解时 16、18、20 模态型出现了虚假的零能模态,时间不稳定,而 NLS-PIM($\alpha=0.6, 0.1$)没有出现此种现象,算法时间稳定。从图 10 还可以看出,采用 NLS-PIM($\alpha=0.6$)时振型计算结果更接近参考振型。这是因为 $\alpha=0.6$ 时刚度阵较精确的硬,而 $\alpha=0.1$ 时较精确的

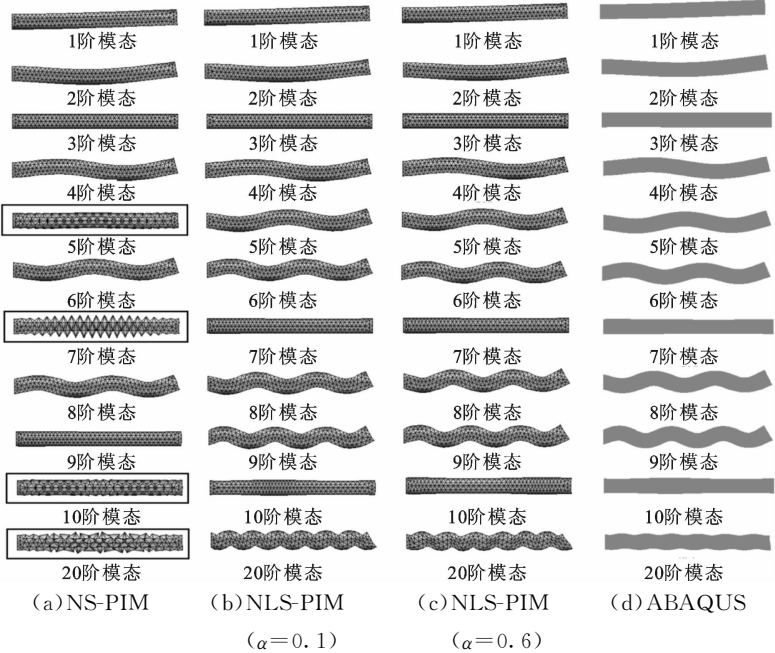


图 6 不同方法求得的悬臂梁各阶模态

软,相对于较软刚度模型,较硬刚度模型更适合求解动力问题^[18]。

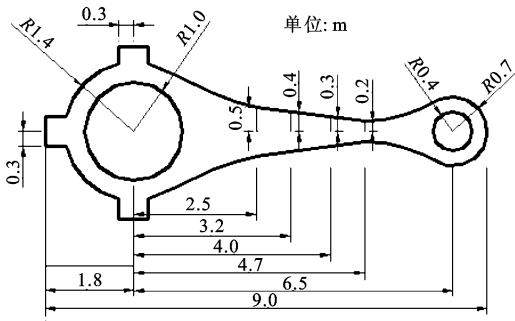


图 7 2 维连接杆模型

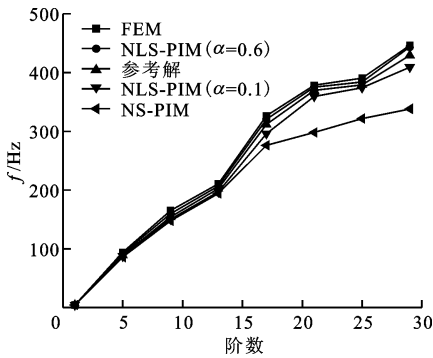
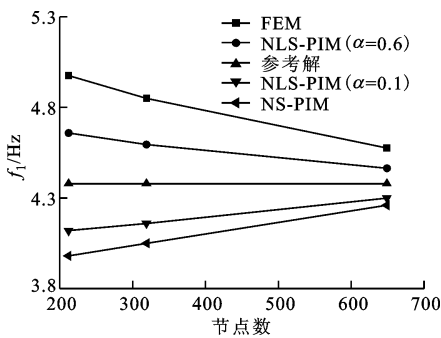
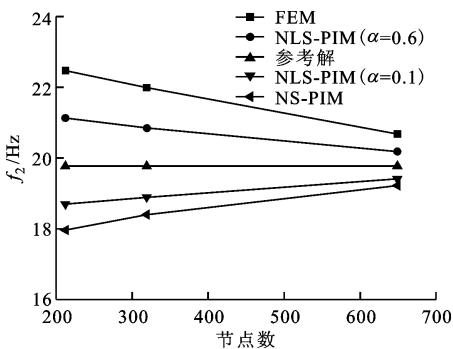


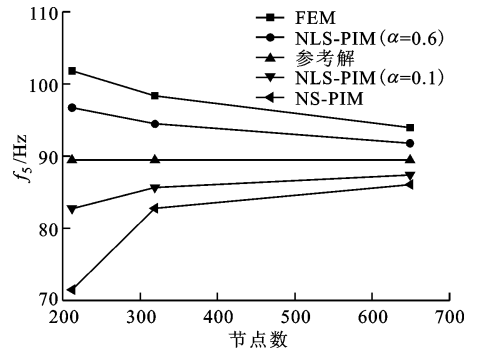
图 8 649 个节点下采用不同方法求得的前 30 阶固有频率对比



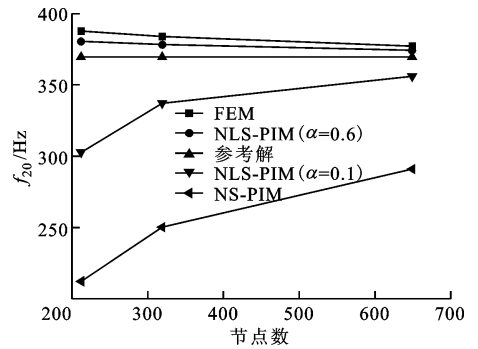
(a)1 阶频率



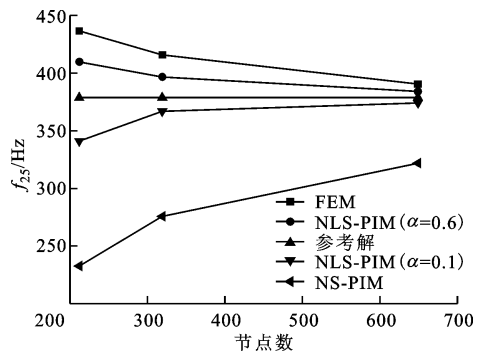
(b)2 阶频率



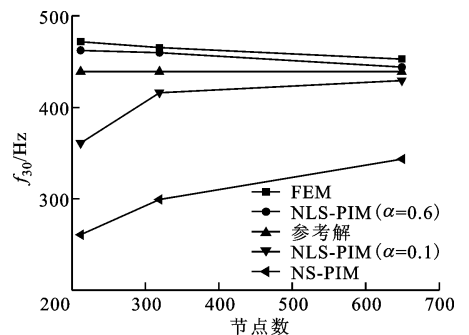
(c)5 阶频率



(d)20 阶频率



(e)25 阶频率



(f)30 阶频率

图 9 不同节点数采用不同方法得到的连接杆各阶固有频率

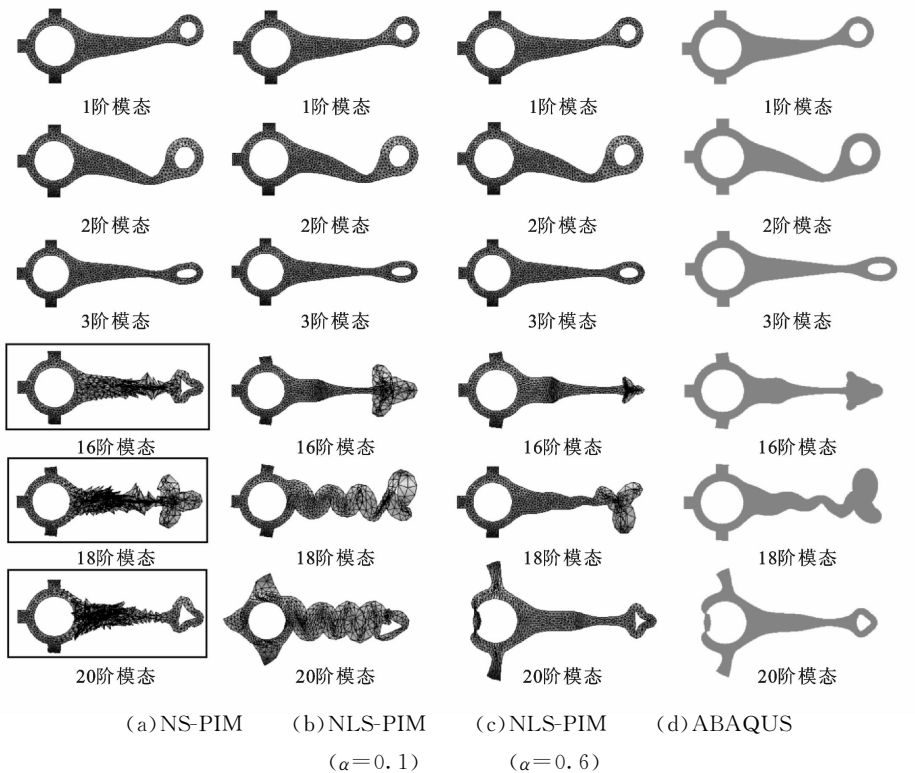


图 10 649 个节点下连接杆的 1、2、3、16、18、20 阶模态

3 结 论

本文将有限元方法和点基光滑点插值方法相结合,采用点基局部应变光滑方法、通过调整参数 α 来控制各方法的权重,得到固有频率的上下限,由此计算结构的各阶模态。结果表明,有限元方法和点基光滑点插值方法结合后,在 $\alpha=0.1$ 和 $\alpha=0.6$ 的情况下能够准确地给出固有频率的下界和上界,且程序结构简单、易于实现。本文所提方法克服了点基光滑点插值方法的时间不稳定性,能够较好地给出结构的各阶阵型,可为工程中结构设计以及系统辨别提供参考。

参考文献:

[1] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. The finite element method; vol 1 [M]. 5th ed. Oxford, UK: Butterworth/Heinemann, 2000: 58-60.

[2] 胡海昌. 放大倍数和本征值的上下限 [J]. 振动与冲击, 1983(2): 1-8.

HU Haichang. Factors of amplification and upper and lower bounds of eigenvalues [J]. Journal of Vibration and Shock, 1983(2): 1-8.

[3] CRANDAL S H. Engineering analysis [M]. Columbus, OH, USA: McGraw-Hill, 1956: 69-70.

[4] BATHE K J, WILSON E L. Numerical methods in finite element analysis [M]. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1976: 55-58.

[5] 胡海昌. 论几种本征值包含定理的内在联系 [J]. 固体力学学报, 1983(1): 1-10.

HU Haichang. On the interconnections among several inclusion theorems for eigenvalues [J]. Acta Mechanica Solids Sinica, 1983(1): 1-10.

[6] DOKUMACI E. On super accurate finite elements and their duals for eigenvalue computation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298(1/2): 432-438.

[7] 张雄, 刘岩. 无网格法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-2.

[8] 刘桂荣, 顾元通. 无网格法理论及程序设计 [M]. 济南: 山东大学出版社, 2007: 23-24.

[9] LY B L. An upper and lower bound for natural frequencies [J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 112(3): 547-549.

[10] PENNY J E, REED J R. An integral equation approach to the fundamental frequency of vibrating beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1971, 19(4): 393-400.

[11] SPENCE J P, HORGAN C O. Bounds on natural frequencies of composite circular membranes: integral equation methods [J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 87(1): 71-81.

- [12] BICKFORD W B, WU S Y. Bounds on natural frequencies of composite circular plates: integral equation methods [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 126(1): 19-35.
- [13] FAUCONNEAU G, MARANGONI R D. Natural frequencies and elastic stability of a simply-supported rectangular plate under linearly varying compressive loads [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1971, 7(5): 473-493.
- [14] BAZLEY N W, FOX D W. Methods for lower bounds to frequencies of continuous elastic systems [J]. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physic*, 1966, 17: 1-37.
- [15] BAZLEY N W, FOX D W, STADTER J T. Upper and lower bounds for the frequencies of rectangular clamped plates [J]. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechc*, 1967, 47(3): 191-198.
- [16] MARANGONI R D, COOK L M, BASAVANHALLY N. Upper and lower bounds to the natural frequencies of vibration of clamped rectangular orthotropic plates [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, 14(8): 611-623.
- [17] LIU G R. A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2008, 5(2): 199-236.
- [18] LIU G R, ZHANG G Y. Smoothed point interpolation methods: G space and weakened weak forms [M]. Singapore: World Scientific, 2013: 305-306.
- [19] ZHANG G Y, LIU G R, WANG Y Y, et al. A linearly conforming point interpolation method (LC-PIM) for three-dimensional elasticity problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 72(13): 1524-1543.
- [20] ZHANG G Y, LIU G R, NGUYEN T T, et al. The upper bound property for solid mechanics of the linearly conforming radial point interpolation method (LC-RPIM) [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2007, 4(3): 521-541.
- [21] LIU G R, ZHANG G Y. Upper bound solution to elasticity problems: a unique property of the linearly conforming point interpolation method (LC-PIM) [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 74(7): 1128-1161.
- [22] ZHANG Z Q, LIU G R. Temporal stabilization of the node-based smoothed finite element method and solution bound of linear elastostatics and vibration problems [J]. *Computational Mechanics*, 2010, 46(2): 229-246.
- [23] 杜超凡, 章定国. 光滑节点插值法: 计算固有频率下界值的新方法 [J]. *力学学报*, 2015, 47(5): 839-847. DU Chaofan, ZHANG Dingguo. Node-based smoothed point interpolation method: a new method for computing lower bound of natural frequency [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(5): 839-847.
- [24] 彭金晓. 光滑点插值无网格法及在工程力学中的应用 [D]. 长春: 吉林大学, 2011: 19-21.

[本刊相关文献链接]

- 张帆, 金英泽, 王祥, 等. 可倾瓦导轴承液膜力非线性指数模型及应用研究. 2017, 51(3): 72-79. [doi:10.7652/xjtuxb201703013]
- 陈永会, 张学良, 温淑花, 等. 粗糙表面弹塑性接触连续光滑指数函数模型与法向接触刚度研究. 2016, 50(7): 58-67. [doi:10.7652/xjtuxb201607010]
- 蔺彦虎, 赵宁, 彭艳军. 具有循环对称特点的耦合结构振动特性分析. 2016, 50(7): 68-74. [doi:10.7652/xjtuxb201607011]
- 高尧明, 洪军, 甄宜超. 机床多体系统空间刚度场约束下的加工误差预测. 2016, 50(6): 90-96. [doi:10.7652/xjtuxb201606014]
- 王少锋, 洪军, 王建国, 等. 大型薄壁件的多点支承/定位方法研究. 2016, 50(6): 122-129. [doi:10.7652/xjtuxb201606019]
- 田红亮, 郑金华, 陈甜敏, 等. 直线运动滚动导轨副的法向接触力学模型. 2016, 50(5): 1-11. [doi:10.7652/xjtuxb201605001]
- 朱爱斌, 何胜利, 邹超, 等. 考虑接触刚度的含间隙铰接副动态磨损分析. 2016, 50(5): 12-18. [doi:10.7652/xjtuxb201605002]
- 王少锋, 洪军, 王建国, 等. 大型薄壁件多点定位的初始布局优化算法研究. 2016, 50(5): 38-44. [doi:10.7652/xjtuxb201605006]
- 夏凯, 孙岩桦, 洪德江, 等. 轴向拉紧的圆弧端齿轴段扭转特性研究. 2016, 50(5): 51-56. [doi:10.7652/xjtuxb201605008]
- 倪高翔, 朱才朝, 宋朝省, 等. 平行轴渐开线变厚齿轮传动的几何设计与啮合特性分析. 2016, 50(5): 57-64. [doi:10.7652/xjtuxb201605009]
- 刘雅琳, 上官博, 徐自力. 干摩擦阻尼对失谐叶盘系统受迫振动的影响. 2016, 50(2): 111-117. [doi:10.7652/xjtuxb201602019]
- 李志刚, 李军, 丰镇平. 进口防旋板对孔型密封非定常气流激振特性的影响. 2016, 50(1): 16-21. [doi:10.7652/xjtuxb201601003]

(编辑 苗凌)