

DOI: 10.7652/xjtuxb201703005

一种求解反应对流扩散方程的稳定化谱元方法

和文强, 秦国良, 艾子健, 林静祥

(西安交通大学流体机械研究所, 710049, 西安)

摘要: 针对谱元方法求解二维非稳态反应对流扩散方程中出现的稳定性问题, 提出了一种稳定的高精度数值方法。该方法在空间上将 Chebyshev 谱元方法和一致逼近迎风方法相结合, 时间上采用分步 θ -格式。通过解析解算例验证了该方法的精度及数值稳定性, 并对含有不同类型边界层的反应对流扩散问题进行了求解。研究表明: 一致逼近迎风项的增加扩大了谱元方法求解反应对流扩散方程的稳定域, 在对流项及反应项占优时保持了数值解的高精度; 对于含有边界层的复杂反应对流扩散问题, 数值解在整个计算区域内获得了一致收敛的结果。研究工作对谱元方法在反应对流扩散问题高精度数值求解中的应用提供参考。

关键词: 反应对流扩散方程; 谱元法; 稳定性; 边界层

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)03-0027-05

A Stabilized Spectral Element Method for Reaction-Convection-Diffusion Equation

HE Wenqiang, QIN Guoliang, AI Zijian, LIN Jingxiang

(Institute of Fluid Machinery, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A stabilized numerical method with high accuracy is proposed to solve the stability problems, which are generated by spectral element method for two-dimensional transient reaction-convection-diffusion equation. The method combines Chebyshev spectral element method with consistent approximate upwind method in space and adopts fractional-step θ -pattern in time. The numerical example is solved and compared with analytical solution to verify the accuracy and numerical stability. Reaction-convection-diffusion problems with different kinds of boundary layers are also solved. This approach reveals that the stability domain of the spectral element method for reaction-convection-diffusion equation is enlarged with the addition of the consistent approximate upwind term, and the high accuracy of the numerical solution is maintained when convection and reaction term are dominated. For the complicated reaction-convection-diffusion problems with boundary layers, the numerical solution is able to obtain uniform convergence in the whole computational domain.

Keywords: reaction-convection-diffusion equation; spectral element method; stability; boundary layer

反应对流扩散方程是描述物质反应输送过程的典型物理模型, 在环境、化工、水利、气象等多个工程

领域都有着广泛的应用。由于该方程一般难以求得精确解, 因此有效的高精度数值方法对于反应对流

收稿日期: 2016-08-05。 作者简介: 和文强(1982—), 男, 博士生; 秦国良(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB026004)。

网络出版时间: 2016-12-07

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20161207.1602.004.html>

扩散问题的研究有着十分重要的意义。当方程中的对流项及反应项占优时,利用传统的有限元法进行求解会产生剧烈的数值振荡^[1],破坏数值解的精度。因此,人们在传统有限元法的基础上相继提出了流线迎风有限元法(SUPG)^[2-3]、最小二乘有限元法(GLS)^[4]等非标准的有限元方法。这些方法在流线方向增加了适当的人工黏性,基本上消除了计算区域内的数值振荡,获得了收敛的数值结果。对于对流项及反应项占优的反应对流扩散问题,其计算区域内通常会有边界层的出现,而上述的改进方法在求解这类问题时,边界层附近仍然存在数值振荡。一致逼近迎风有限元法(CAU)^[5-6]在流线黏性的基础上又增加了求解变量梯度方向的人工黏性,从而使边界层附近的数值振荡得到了有效控制。但是,在计算单元内有限元法采用了代数多项式对求解变量进行逼近,当单元插值阶数增加时,数值解仅以代数阶的速度收敛。

谱元方法^[7]结合了谱方法的高精度和有限元法的灵活性特点,在计算单元内采用无穷阶光滑的正交多项式作为插值函数,当单元插值阶数增加时,数值解以指数阶的速度快速收敛。由于谱元方法同样采用标准的 Galerkin 变分形式,其在求解对流项及反应项占优的反应对流扩散方程时,也会出现数值不稳定,严重影响了数值解的精度。因此,提高谱元方法的数值稳定性,使其在求解对流项及反应项占优的反应对流扩散方程时能够保持数值解的精度,就具有十分重要的学术意义和应用前景。

本文在前期 Chebyshev 谱元法^[8]研究的基础上,将谱元法和 CAU 法相结合,形成稳定化谱元方法,并将该方法应用于对流项及反应项占优的二维非稳态反应对流扩散方程的求解,同时通过数值模拟验证了该方法在提高稳定性、保持数值精度等方面的有效性,探索其对不同类型边界层的逼近效果及单元插值阶数对计算结果的影响。

1 反应对流扩散方程

二维非稳态反应对流扩散方程如下

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma \phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \varepsilon \Delta \phi = f, \text{ in } (0, T] \times \Omega \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为速度矢量; γ 为反应系数; ε 为扩散系数; f 为源项; Ω 为计算区域且 $\partial \Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ 。相应的边界条件和初始条件为

$$\phi = g_D, \text{ on } \Gamma_D; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = g_N, \text{ on } \Gamma_N; \quad (2)$$

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}), \text{ in } \Omega \quad (3)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为边界外法线单位矢量。

2 时间离散

采用分步 θ 格式对时间项进行离散,由式(1)可得 t^{n+1} 时刻的方程离散形式为

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla (\theta \phi^{n+1} + (1 - \theta) \phi^n) + \\ \gamma^{n+1} (\theta \phi^{n+1} + (1 - \theta) \phi^n) - \varepsilon \nabla^2 (\theta \phi^{n+1} + \\ (1 - \theta) \phi^n) = \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)可表示为稳态反应对流扩散方程的形式

$$\begin{aligned} L(\phi^{n+1}) = R^{n+1} \phi^{n+1} + \mathbf{C}^{n+1} \cdot \\ \nabla \phi^{n+1} - D^{n+1} \nabla^2 \phi^{n+1} = F^{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

$$D^{n+1} = \theta \Delta t \varepsilon, \mathbf{C}^{n+1} = \theta \Delta t \mathbf{u}^{n+1}, R^{n+1} = 1 + \theta \Delta t \gamma^{n+1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F^{n+1} = (1 - \Delta t (1 - \theta) \gamma^{n+1}) \phi^n - \Delta t (1 - \theta) \mathbf{u}^{n+1} \cdot \\ \nabla \phi^n + \Delta t (1 - \theta) \varepsilon \nabla^2 \phi^n + \Delta t (\theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n) \end{aligned} \quad (7)$$

3 稳定化谱元方法

将计算区域 Ω 划分为 N_e 个互相不重叠的单元

$\Omega_e, \bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}_e, \bigcap_{e=1}^{N_e} \Omega_e = \emptyset$, 式(5)的 CAU 变分问题为: 求 $\phi^{n+1} \in H_{g_D}^1(\Omega)$ 使得

$$A_G(\phi^{n+1}, \eta) + A_S(\phi^{n+1}, \eta) + A_C(\phi^{n+1}, \eta) = F_S(\eta), \forall \eta \in H_0^1(\Omega) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_G(\phi^{n+1}, \eta) = D^{n+1} (\nabla \phi^{n+1}, \nabla \eta) + \\ (\mathbf{C}^{n+1} \cdot \nabla \phi^{n+1}, \eta) + (R^{n+1} \phi^{n+1}, \eta) \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_S(\phi^{n+1}, \eta) = \sum_{e=1}^{N_e} (L(\phi^{n+1}), \tau_S^{n+1} \mathbf{C}^{n+1} \cdot \nabla \eta) |_{\Omega_e} \quad (10)$$

$$A_C(\phi^{n+1}, \eta) = \sum_{e=1}^{N_e} (\beta(\phi^{n+1}), \tau_C^{n+1} \mathbf{G}^{n+1} \cdot \nabla \eta) |_{\Omega_e} \quad (11)$$

$$F_S(\eta) = F_G(\eta) + \sum_{e=1}^{N_e} (F^{n+1}, \tau_S^{n+1} \mathbf{C}^{n+1} \cdot \nabla \eta) |_{\Omega_e} \quad (12)$$

$$F_G(\eta) = (F^{n+1}, \eta) + (g_N^{n+1}, \eta)_{\Gamma_N} \quad (13)$$

$$\mathbf{G}^{n+1} = \frac{\Delta t \theta \beta(\phi^{n+1})}{(\|\nabla \phi^{n+1}\| + k_T)^2} \nabla \phi^{n+1} \quad (14)$$

$$\tau_S^{n+1} \sim \min \left\{ \frac{l}{p^k \|\mathbf{C}^{n+1}\|}, \frac{1}{\|R^{n+1}\|}, \frac{l^2}{(p^k)^4 \|D^{n+1}\|} \right\} \quad (15)$$

$$\tau_C^{n+1} = \tau_S^{n+1} \max \left\{ \frac{\|\mathbf{C}^{n+1}\|}{\|\mathbf{G}^{n+1}\|} - \alpha^{n+1}, 0 \right\} \quad (16)$$

$$(g_N^{n+1}, \eta)_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} g_N^{n+1} \eta ds \quad (17)$$

$$\alpha^{n+1} = \max\left(1, \frac{\mathbf{C}^{n+1} \cdot \nabla \phi^{n+1}}{\beta(\phi^{n+1})}\right) \quad (18)$$

式中: τ_S^{n+1} 、 τ_C^{n+1} 为 SUPG 和 CAU 项的迎风函数^[9-10], $\beta(\phi^{n+1})$ 为式(1)的计算残量, $\mathbf{G}^{n+1}$ 为求解变量梯度方向的辅助速度, p^k 为单元插值阶数, l 为单元特征长度, k_T 为常量, 计算中取 1.0。

由 CAU 项的定义可知, 增加的人工黏性为非线性形式, 求解问题也就由线性转变为非线性, 这样需要采用迭代方式对式(8)进行求解。利用第 k 次迭代的计算结果, 对 CAU 项进行简单的线性化处理

$$c(\phi_k^{n+1}; \phi_{k+1}^{n+1}, \eta) \Big|_{\Omega_e} = (\tau_C^{n+1} K_k^{n+1} \nabla \phi_{k+1}^{n+1}, \nabla \eta) \Big|_{\Omega_e} \quad (19)$$

$$\tau_C^{n+1} = \tau_C^{n+1}(\mathbf{G}^{n+1}(\phi_k^{n+1})) \quad (20)$$

$$K_k^{n+1} = \frac{\Delta t \theta \beta^2(\phi_k^{n+1})}{(|\nabla \phi_k^{n+1}| + k_T)^2} \quad (21)$$

则线性化迭代方法即为给定 ϕ_k^{n+1} , 求 $\phi_{k+1}^{n+1} \in H_{GD}^1(\Omega)$, 使得

$$A_G(\phi_{k+1}^{n+1}, \eta) + A_S(\phi_{k+1}^{n+1}, \eta) +$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} c(\phi_k^{n+1}; \phi_{k+1}^{n+1}, \eta) \Big|_{\Omega_e} = F_S(\eta), \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega) \quad (22)$$

且 $\|\phi_{k+1}^{n+1} - \phi_k^{n+1}\| < \chi$ 。 χ 为给定的迭代精度, 迭代初始值 ϕ_0^{n+1} 为 SUPG 方法的计算结果。

将单元 Ω_e 通过映射转换到二维标准单元, 在标准单元内选取 Chebyshev 多项式极值点为插值点, 则求解变量的单元逼近形式为

$$\phi^{n+1,e}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{N_d^e} \phi_i^{n+1,e} N_i^e(\xi, \eta) = \boldsymbol{\phi}^{n+1,e} \mathbf{N}^e \quad (23)$$

$$N_j^e(\xi, \eta) = h_j^e(\xi) h_k^e(\eta)$$

$$0 \leq j \leq N_x^e, \quad 0 \leq k \leq N_y^e, \quad i = k(N_x^e + 1) + j \quad (24)$$

$$h_j^e(\xi) = \frac{2}{N_x^e} \sum_{m=0}^{N_x^e} \frac{1}{c_j c_m} T_m(\xi_j) T_m(\xi) \quad (25)$$

$$h_k^e(\eta) = \frac{2}{N_y^e} \sum_{n=0}^{N_y^e} \frac{1}{c_k c_n} T_n(\eta_k) T_n(\eta) \quad (26)$$

式中: N_i^e 为单元内插值函数; T_m 、 T_n 为 Chebyshev 多项式; N_d^e 为单元内的插值节点数; N_x^e 、 N_y^e 为单元 x 、 y 方向的插值阶数。在单元外 $h_j^e(\xi)$ 、 $h_k^e(\eta)$ 为 0, 在单元内 $h_j^e(\xi_p) = \delta_{jp}$ 、 $h_k^e(\eta_q) = \delta_{kq}$, c_m 满足

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0, N_x^e \\ 1, & m \neq 0, N_x^e \end{cases} \quad (27)$$

在单元 Ω_e 内对式(8)进行离散, 则其单元矩阵

方程为

$$(\mathbf{B}^e + \mathbf{M}^e + \mathbf{Q}^e + \mathbf{B}_1^e + \mathbf{M}_1^e + \mathbf{Q}_1^e + \mathbf{Q}_2^e) \boldsymbol{\phi}^{n+1,e} = (\mathbf{E}^e + \mathbf{M}_2^e) \mathbf{F}^{n+1,e} + (\mathbf{S}^e + \mathbf{S}_1^e) \mathbf{g}_N^{n+1,e} \quad (28)$$

$$\mathbf{B}^e = (\mathbf{R}^{n+1,e}; \mathbf{N}^e, \mathbf{N}^e) \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_1^e = \tau_S^{n+1,e} (\mathbf{R}^{n+1,e}; \mathbf{N}^e, \mathbf{C}^{n+1,e} \cdot \nabla \mathbf{N}^e) \quad (30)$$

$$\mathbf{M}^e = (\mathbf{C}^{n+1,e} \cdot \nabla \mathbf{N}^e, \mathbf{N}^e) \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_1^e = \tau_S^{n+1,e} (\mathbf{C}^{n+1,e}; \nabla \mathbf{N}^e, \mathbf{C}^{n+1,e} \cdot \nabla \mathbf{N}^e) \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_2^e = \tau_S^{n+1,e} (\mathbf{N}^e, \mathbf{C}^{n+1,e} \cdot \nabla \mathbf{N}^e) \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}^e = D^{n+1,e} (\nabla \mathbf{N}^e, \nabla \mathbf{N}^e) \quad (34)$$

$$\mathbf{Q}_1^e = \tau_S^{n+1,e} D^{n+1,e} (\nabla \mathbf{N}^e, \nabla (\mathbf{C}^{n+1,e} \cdot \nabla \mathbf{N}^e)) \quad (35)$$

$$\mathbf{Q}_2^e = \tau_C^{n+1,e} (\mathbf{K}^{n+1,e}; \nabla \mathbf{N}^e, \nabla \mathbf{N}^e) \quad (36)$$

$$\mathbf{E}^e = (\mathbf{N}^e, \mathbf{N}^e) \quad (37)$$

$$\mathbf{S}^e = D^{n+1,e} (\mathbf{N}^e, \mathbf{N}^e)_{\Gamma_N} \quad (38)$$

$$\mathbf{S}_1^e = D^{n+1,e} \tau_S^{n+1,e} (\mathbf{N}^e, \mathbf{C}^{n+1,e} \cdot \nabla \mathbf{N}^e)_{\Gamma_N} \quad (39)$$

式中: $\mathbf{B}^e$ 、 $\mathbf{B}_1^e$ 、 $\mathbf{M}^e$ 、 $\mathbf{M}_1^e$ 、 $\mathbf{M}_2^e$ 、 $\mathbf{Q}^e$ 、 $\mathbf{Q}_1^e$ 、 $\mathbf{Q}_2^e$ 、 $\mathbf{E}^e$ 、 $\mathbf{S}^e$ 、 $\mathbf{S}_1^e$ 为单元矩阵, 矩阵元素为关于 Chebyshev 多项式的积分, 利用 Chebyshev 多项式的性质可精确求出。将式(28)中的单元矩阵按照有限元中合成总矩阵的原则进行叠加, 即可得到 t^{n+1} 时刻整个求解区域的离散方程

$$(\mathbf{B} + \mathbf{M} + \mathbf{Q} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \boldsymbol{\phi}^{n+1} = (\mathbf{E} + \mathbf{M}_2) \mathbf{F}^{n+1} + (\mathbf{S} + \mathbf{S}_1) \mathbf{g}_N^{n+1} \quad (40)$$

式(40)为 t^{n+1} 时刻关于求解变量的非线性方程, 采用上述的简单线性化迭代方法即可求得式(1)在 t^{n+1} 时刻的解。

4 数值算例

数值算例的计算区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 时间离散采用 Crank-Nicolson 格式($\theta = 0.5$), 时间步长 $\Delta t = 0.001$ s。

4.1 解析解算例

给定式(1)的一个解析解

$$\phi(x, y, t) = \exp(\sin(\pi t)) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (41)$$

相应的右端项、初始条件及边界条件可由式(41)直接获得。 $\mathbf{u} = [1, 1]^T$, $\gamma = 0$, $\epsilon = 10^{-20}$, 计算网格为 6×6 , 单元内采用 6 阶 Chebyshev 多项式。 $t = 0.1, 0.3, 0.5$ s, $y = 0.5$ 的解析解(Ana)和数值解(Num)如图 1 所示。从图 1 可以看出, 稳定化谱元方法计算所得的数值解和解析解完全一致, 说明了该方法在对流项占优时的有效性。

4 种网格划分在 $t = 0.05$ s 时, 不同计算网格数值解的 L_2 误差随单元插值阶数 p^k 的变化如图 2 所示。从图 2 可以看出, 数值解的 L_2 误差随单元插值阶数的增加迅速减小, 体现了稳定化谱元方法在收

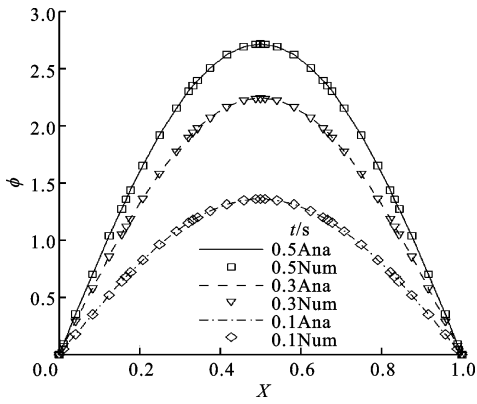


图 1 $t=0.1, 0.3, 0.5$ s 时的数值解和解析解

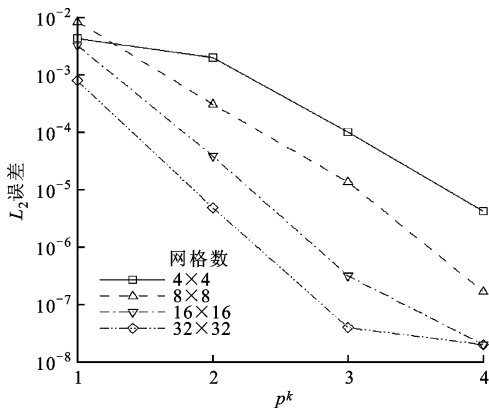


图 2 不同插值阶数的 L_2 误差

敛速度上的优势。

4.2 45°斜坡算例

设定 $u=[1,0]^T, \gamma=0, \epsilon=10^{-4}, \phi_0=0, f=1$, 边界条件为第一类齐次边界条件。在本例及随后的算例中统一采用 30×30 的计算网格和单元内 3 阶 Chebyshev 多项式插值。该算例为计算区域内由入口向出口随时间逐步发展的 45°斜坡,其在出口 $x=1$ 处存在一指数边界层,在 $y=0, y=1$ 处存在 2 个抛物边界层。45°斜坡算例在 $t=0.25, 0.5, 0.75, 1$ s 时的图形如图 3 所示。从图 3 可以看出,稳定化

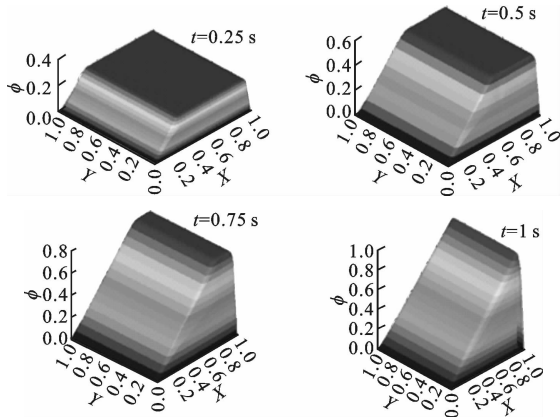


图 3 $t=0.25, 0.5, 0.75, 1$ s 时的 45°斜坡算例

谱元方法对指数及抛物边界层进行了准确的描述,未产生任何数值振荡。

4.3 倾斜内边界层算例

设定 $u=[1,-1]^T, \gamma=0, \epsilon=10^{-4}, \phi_0=0, f=0$, 边界条件为

$$\begin{aligned} \phi(x,1) &= 1, \quad \frac{\partial \phi(1,y)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial y} = 0 \\ \phi(0,y) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq 0.6 \\ y-0.6, & 0.6 < y \leq 0.65 \\ 18(y-0.65+0.05), & 0.65 < y \leq 0.7 \\ y+0.25, & 0.7 < y \leq 0.75 \\ 1, & 0.75 < y \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

由于左侧第一类边界存在较大的梯度,随着时间的发展,流场会在计算区域内形成倾斜的内部边界层,其在 $t=0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ s 时的图形如图 4 所示。从图 4 中可以看出,稳定化谱元方法同样对内边界层进行了准确描述。

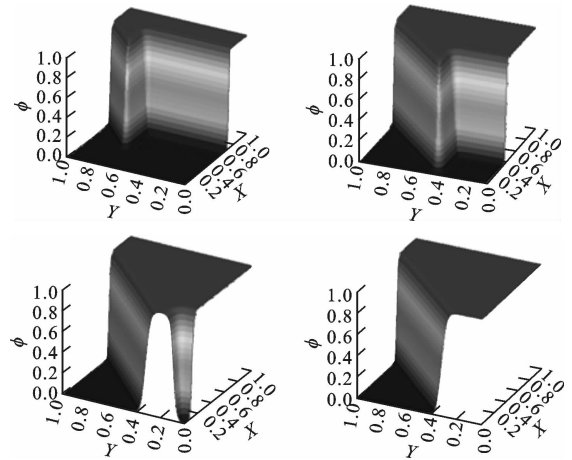


图 4 $t=0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ s 时的内边界层算例

$y=0.5$ 、计算网格为 30×30 时单元插值阶数对边界层逼近效果的影响如图 5 所示。从图 5 可以

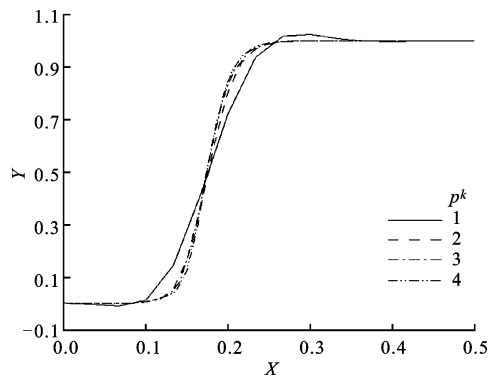


图 5 单元插值阶数对边界层逼近的影响

看出:采用线性单元进行计算时,内边界层附近仍然存在一定的数值振荡;当单元插值阶数增加时,内边界层附近的数值振荡迅速消失,且逼近效果迅速趋于一致。

4.4 方形平台算例

设定 $\mathbf{u}=[0,0]^T$, $\gamma=1$, $\varepsilon=0$, $\phi_0=0$, $f=1$, 边界条件为第一类齐次边界条件。本算例属于反应项占优的反应对流扩散方程的求解,由于源项 f 及第一类齐次边界条件的作用,在计算区域的边界处会形成外部边界层,其在 $t=0.25, 0.5, 0.75, 1$ s 时的图形如图6所示。从图6可以看出,稳定化谱元方法对内部节点求解变量均匀增加和外部边界层发展都进行了准确反映。

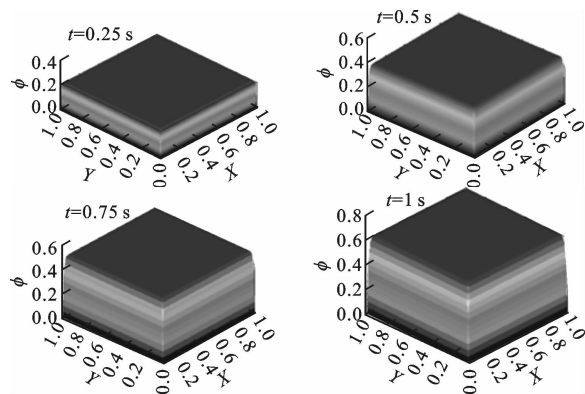


图6 $t=0.25, 0.5, 0.75, 1$ s 时的方形平台算例

5 结 论

本文将 Chebyshev 谱元方法和 CAU 方法相结合形成了稳定化谱元方法,并利用其求解了对流项及反应项占优的二维非稳态反应对流扩散方程,结合具体算例验证了该方法的数值精度、求解稳定性,分析了单元插值阶数对计算误差、边界层逼近效果的影响,可以得出如下结论:

(1) 稳定化谱元方法求解对流项及反应项占优的反应对流扩散方程时的稳定性得到了很大提高,获得了收敛的高精度数值结果;

(2) 稳定化谱元方法对反应对流扩散问题中出现的各种不同类型的边界层进行了准确的逼近和描述,完全消除了边界层附近的数值振荡;

(3) 随着单元插值阶数的增加,稳定化谱元方法的计算误差迅速减小,同时对边界层的逼近效果迅速提高,表明该方法利用相对较低的单元插值阶数即可获得很好的数值结果,减少了计算量;

(4) 此项研究工作可为高精度数值方法在复杂反应对流扩散问题研究中的进一步应用提供参考。

参考文献:

- [1] ZIENKIEWICZ O C, HEINRICH J C. The finite element method and convection problems in fluid mechanics [M]. New York, USA: John Wiley & Sons Inc., 1978: 1-22.
- [2] LIMA R C, MESQUITA A L A, BLANCO C J C, et al. On the application of SUPG/h-method in 2D advection-diffusion-reaction simulation [J]. J Braz Soc Mech Sci Eng, 2014, 36: 591-603
- [3] BOCHEV P, GUNZBURGER M, SHADID J. Stability of the SUPG finite element method for transient advection-diffusion problems [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2004, 193: 2301-2323.
- [4] LIN R C. A discontinuous Galerkin least-squares finite element method for solving coupled singularly perturbed reaction-diffusion equations [J]. J Comput Appl Math, 2016, 307: 134-142.
- [5] DOCARMO E G D, ALVAREZ G B. A new stabilized finite element formulation for scalar convection-diffusion problems: the streamline and approximate upwind/Petrov-Galerkin method [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2003, 192: 3379-3396.
- [6] GALEÃO A C, ALMEIDA R C, MALTA S M C, et al. Finite element analysis of convection dominated reaction-diffusion problems [J]. Appl Numer Math, 2004, 48: 205-222.
- [7] PETERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion [J]. J Comput Phys, 1984, 54(3): 468-488.
- [8] 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程 [J]. 应用力学学报, 2000, 17(4): 20-26. QIN Guoliang, XU Zhong. A spectral element method for incompressible Navier-Stokes equations [J] Chin J Appl Mech, 2000, 17(4): 20-26.
- [9] LUBE G, RAPIN G. Residual-based stabilized higher-order FEM for advection dominated problems [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2006, 195: 4124-4138.
- [10] JOHN V, KNOBLOCH P. On spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection-diffusion equations: part I A review [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2007, 196: 2197-2215.

(编辑 苗凌)