

DOI: 10.7652/xjtuxb201701008

时空耦合谱元方法求解一维 Burgers 方程

王亚洲, 秦国良, 和文强, 包振忠

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对 Burgers 方程在空间离散格式与时间离散格式方面的精度匹配问题, 提出了一种时空耦合谱元方法, 求解了一维 Burgers 方程。求解时在时间及空间方向同时采用了谱元方法离散方程, 推导了求解过程, 比较了空间方向采用谱元离散结合时间方向分别采用向后欧拉方法、四阶 Runge-Kutta 方法和四阶 Adams-Bashforth 方法的数值精度以及时空匹配特性, 研究了时间方向网格单元数及插值节点数对时空耦合谱元方法数值精度的影响。研究显示: 时空耦合谱元方法能够求解 Burgers 方程且与传统的时间差分方法相比能够获得更高的数值精度; 随着空间方向单元内插值阶数的不断增大, 时空耦合谱元方法的数值精度不断提高, 且保留了指数阶收敛的特点, 具有较好的时空匹配特性; 当空间网格划分方式固定时, 时间方向上增加单元数或单元内插值阶数, 对数值精度提高影响不大, 这一结论与相关研究结果一致。研究内容对引入与空间谱元方法精度相匹配的时间离散格式具有指导意义。

关键词: 时空耦合; 数值精度; 谱元方法; Burgers 方程

中图分类号: O357 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)01-0045-06

Time-Space Coupled Spectral Element Method for One-Dimensional Burgers Equation

WANG Yazhou, QIN Guoliang, HE Wenqiang, BAO Zhenzhong

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To improve the matching of numerical accuracy between time and space for Burgers equation, a time-space coupled spectral element method is proposed to solve one-dimensional Burgers equation. The equation is discretized with the spectral element method in both time and space directions, and detailed derivation is displayed. Additionally, the numerical accuracy and the matching characteristic of time and space of the proposed method are compared with those of three other schemes in which spectral element discretization is adopted in space direction while the backward Euler method, the fourth-order Runge-Kutta method and the fourth-order Adams-Bashforth method are employed, respectively, in time direction. The influences of the numbers of elements and interpolation nodes on the numerical accuracy in time direction are investigated. It is verified that: 1) higher accuracy can be obtained with the proposed time-space coupled spectral element method compared with conventional temporal difference schemes in time direction; the numerical accuracy is continuously promoted with the increasing interpolation order, and the exponential convergence rate is still maintained, which shows a better characteristic of matching

收稿日期: 2016-06-01。 作者简介: 王亚洲(1993—),男,博士生;秦国良(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(2012CB026004)。

网络出版时间: 2016-10-18

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20161018.1522.012.html>

between time and space; and 3) increasing the elements or interpolation nodes in time direction with fixed space meshing has slight effect on improvement of the numerical accuracy, which coincides with the related research in literature.

Keywords: time-space coupling; numerical accuracy; spectral element method; Burgers equation

Burgers 方程为二阶非线性偏微分方程,可用于描述湍流、边界层发展、激波等现象,特别是其与 Navier-Stokes 方程具有类似的形式,因而该方程的求解方法研究具有重要的意义。Kutluay 等采用 Hopf-Cole 变换将 Burgers 方程转变为线性的导热方程,并通过显式有限差分法进行了求解^[1]。Seydaoglu 等采用高阶分裂方法,将 Burgers 方程中的扩散项及对流项分两步求解,空间方向采用 Fourier 谱方法及差分法,时间方向采用四阶 Runge-Kutta 方法^[2],也获得了较为精确的结果。目前,相关的工作主要集中在高精度的空间离散方法,而时间方向的离散格式仍采用基于 Taylor 级数法导出的经典的单步或多步有限差分格式,如向后欧拉法、四阶 Runge-Kutta 法等,这就出现了空间离散格式与时间离散格式的精度匹配性问题。

Erol 等采用有限元方法求解 Burgers 方程时提出在时间方向与空间方向同时采用有限元方法进行离散^[3],这为研究与空间离散格式的精度相匹配的时间离散格式提供了一种新思路。谱元方法结合了谱方法高精度及无穷阶收敛性的特点和有限元方法很好的几何区域适应性特点,最早由 Patera 提出并求解了突扩管道内的流动问题^[4]。此后,该方法被广泛应用于流动^[5]、传热^[6]及气动声学^[7-8]中,获得了高精度的数值解。目前,谱元方法主要应用于空间方向的离散,而时间方向较多的仍采用差分格式,而关于时空耦合谱元方法的相关研究成果较少。耿艳辉等将时空耦合谱元方法成功地应用于求解带第一类边界条件的非齐次二阶波动方程,验证了时空耦合谱元方法的有效性^[9]。

本文推导了时空耦合谱元方法求解一维 Burgers 方程的具体过程,比较了时空耦合谱元方法与空间方向采用谱元离散结合时间方向分别采用向后欧拉方法、四阶 Runge-Kutta 方法及四阶 Adams-Bashforth 方法在计算精度及时空匹配特性等方面的特点,最后研究了时间方向网格单元数及插值节点数对时空耦合谱元方法求解精度的影响。研究内容对引入与空间谱元方法精度相匹配的时间离散格式具有指导意义。

1 Burgers 方程

一维 Burgers 方程可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

式中: ν 为常数,用于调整对流项和扩散项在方程中所占的比例。数值算例中的边界条件和初始条件为

$$u(a, t) = \beta_1, \quad u(b, t) = \beta_2, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

2 离散方法

2.1 时空耦合谱元方法

时空耦合谱元方法在空间上及时间上同时采用谱元离散,相当于在原问题的空间维度上增加了一个时间维度,即将 n 维问题变为 $n+1$ 维问题。在此条件下,式(1)的变分问题为求 $u \in U = \{u \in H^1, u|_{\Gamma_x} = g\}$,使得下式恒成立

$$\iint \frac{\partial u}{\partial t} w dx dt - \frac{1}{2} \iint u^2 \frac{\partial w}{\partial x} dx dt + \nu \iint \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dt = 0 \quad \forall w \in U \quad (4)$$

式中: w 为检验函数, $w \in V = \{w \in H^1, u|_{\Gamma_x} = 0\}$ 。

将计算区域 Ω 划分为 N_m 个互不重叠的单元,即 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_m} \Omega_i$,且 $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset (i \neq j)$ 。将每个单元转化到标准单元内,并在标准单元内的空间方向和时间方向分别选取 N_x^i 和 N_t^i 阶 Chebyshev 多项式的极值点和端点作为插值点,则试探函数和检验函数分别为

$$u^i(\xi, \tau) = \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_t^i} u_{jk}^i h_j^i(\xi) h_k^i(\tau) \quad (5)$$

$$(u^i(\xi, \tau))^2 = \sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_t^i} (u_{jk}^i)^2 h_j^i(\xi) h_k^i(\tau) \quad (6)$$

$$w^i(\xi, \tau) = \sum_{p=0}^{N_x^i} \sum_{q=0}^{N_t^i} w_{pq}^i h_p^i(\xi) h_q^i(\tau) \quad (7)$$

其中插值基函数为

$$h_s^i(\xi) = \frac{2}{N_x^i} \sum_{m=0}^{N_x^i} \frac{1}{c_s c_m} T_m(\xi) T_m(\xi) \quad (8)$$

$$h_d^i(\tau) = \frac{2}{N_t^i} \sum_{m=0}^{N_t^i} \frac{1}{c_d c_m} T_m(\tau) T_m(\tau) \quad (9)$$

式中: T_m 为 m 阶 Chebyshev 多项式; c_m 满足

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0, N_x^i \text{ 或 } 0, N_t^i \\ 1, & m \neq 0, N_x^i \text{ 或 } 0, N_t^i \end{cases} \quad (10)$$

将式(5)~(10)代入式(4),化简得到

$$\sum_{j=0}^{N_x^i} \sum_{k=0}^{N_t^i} \left[u_{jk}^i (A_{jp} A_{kq} + \nu C_{jp} C_{kq}) - (u_{jk}^i)^2 \frac{1}{2} B_{jp} B_{kq} \right] = 0$$
$$p=0 \sim N_x^i, \quad q=0 \sim N_t^i \quad (11)$$

表 1 给出了式(11)中各符号的具体表达式,表中的积分均可通过 m 阶 Chebyshev 多项式的性质精确求出。

表 1 式(11)中各符号的具体表达式

符号	表达式
A_{jp}	$\int_{x_i}^{x_{i+1}} h_j^i(\xi) h_p^i(\xi) d\xi$
A_{kq}	$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial h_k^i(\tau)}{\partial t} h_q^i(\tau) d\tau$
B_{jp}	$\int_{x_i}^{x_{i+1}} h_j^i(\xi) \frac{\partial h_p^i(\xi)}{\partial x} d\xi$
B_{kq}	$\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_k^i(\tau) h_q^i(\tau) d\tau$
C_{jp}	$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial h_j^i(\xi)}{\partial x} \frac{\partial h_p^i(\xi)}{\partial x} d\xi$
C_{kq}	$\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_k^i(\tau) h_q^i(\tau) d\tau$

2.2 空间谱元离散结合时间差分离散

2.2.1 空间离散格式 区别于时空耦合的谱元离散方法,本节仅在空间方向进行谱元离散,对于非定常项则采用差分格式。式(1)的变分形式为求 $u \in U = \{u \in H^1, u|_{\Gamma_x} = g\}$,使得下式恒成立

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} w dx - \frac{1}{2} \int u^2 \frac{\partial w}{\partial x} dx + \nu \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0$$
$$\forall w \in V \quad (12)$$

区别于式(5)~(7),式(12)中的试探函数和检验函数分别为

$$u^i(\xi, t) = \sum_{j=0}^{N_x^i} u_j^i(t) h_j^i(\xi) \quad (13)$$

$$(u^i(\xi, t))^2 = \sum_{j=0}^{N_x^i} (u_j^i(t))^2 h_j^i(\xi) \quad (14)$$

$$w^i(\xi, t) = \sum_{p=0}^{N_x^i} w_p^i(t) h_p^i(\xi) \quad (15)$$

将其代入式(12),化简得到

$$\sum_{j=0}^{N_x^i} \left[A_{jp} \frac{du_j^i}{dt} + \nu C_{jp} u_j^i - (u_j^i)^2 \frac{1}{2} B_{jp} \right] = 0 \quad (16)$$

其中 $p=0 \sim N_x^i$,各符号的具体表达式参见表 1。

2.2.2 时间离散格式 针对非定常项 $\frac{du_j^i}{dt}$,分别采用向后欧拉格式、四阶 Runge-Kutta(4RK)格式以及显式 Adams-Bashforth(ABM)格式进行离散,离散格式具体表达形式可参考文献[10],本文不再赘述。其中,向后欧拉格式具有二阶精度,而 4RK 以及 ABM 格式均具有四阶精度。

3 数值算例及讨论

3.1 算例

算例 1 考虑如下边界条件及初始条件

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t) = 0, & 1 \leq t \leq 2 \text{ s} \\ u(x, 1) &= \frac{x}{1 + (1/t_0)^{1/2} \exp(x^2/4\nu)}, & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$t_0 = \exp\left(\frac{1}{8\nu}\right) \quad (18)$$

该问题解析解形式为

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + (t/t_0)^{1/2} \exp(x^2/4\nu t)} \quad (19)$$

算例 2 考虑如下边界条件及初始条件

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \frac{2\nu\pi \sin(\pi x)}{2 + \cos(\pi x)}, & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

对应的解析解形式为

$$u(x, t) = \frac{2\nu\pi \exp(-\pi^2 \nu t) \sin(\pi x)}{2 + \exp(-\pi^2 \nu t) \cos(\pi x)}$$
$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \quad (21)$$

本文 2 个算例在计算中均取 $\nu=0.005$ 。空间方向网格划分均采用 6 单元 6 网格(即将计算区域分为 6 个单元,每个单元内选取 6 阶 Chebyshev 多项式的极值点及端点作为插值点),时空耦合谱元方法中时间方向网格划分采用 10 单元 5 网格,图 1 给出了时空耦合谱元方法计算区域网格剖分示意图。差分格式中计算步长为 0.001 s。

采用 L_2 误差和 L_∞ 误差来考察不同离散方法下 Burgers 方程的求解结果。2 种误差的定义如下

$$L_2 = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (u_i^{\text{exact}} - u_i^{\text{num}})^2 \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$L_\infty = \max_i |u_i^{\text{exact}} - u_i^{\text{num}}| \quad (23)$$

3.2 计算结果及讨论

3.2.1 计算精度比较 图 2~图 5 分别给出了采用时空耦合谱元方法及空间谱元离散结合时间差分离散方法求解算例 1 和算例 2 得到的 L_2 误差,以及

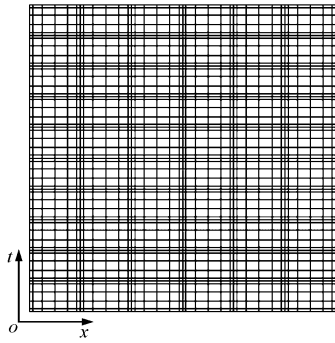
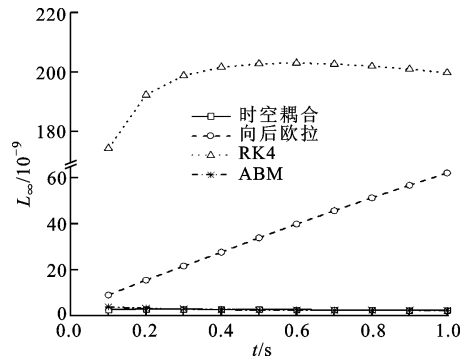
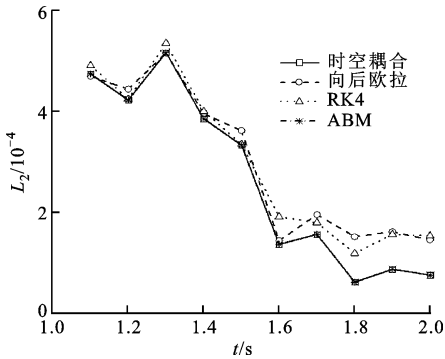
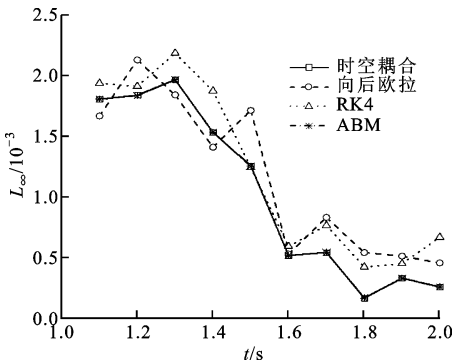
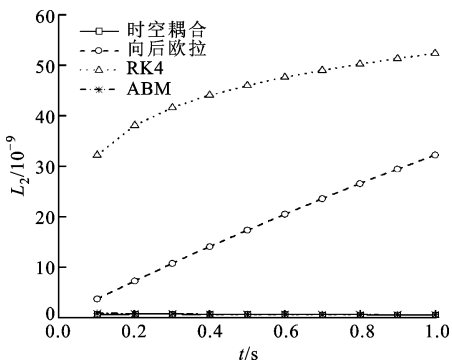


图1 时空耦合谱元方法计算区域网格划分

图5 算例2 L_∞ 误差随计算时间的变化图2 算例1 L_2 误差随计算时间的变化图3 算例1 L_∞ 误差随计算时间的变化图4 算例2 L_2 误差随计算时间的变化

空耦合谱元方法及空间谱元离散结合3种时间差分离散方法所得的 L_2 误差以及 L_∞ 误差均呈减小的趋势,而时空耦合方法及时间方向采用 ABM 格式所得的误差减小得更快,即获得了更高的求解精度。由图4和图5可知,在算例2中随计算时间的推进,时间方向采用向后欧拉格式和四阶 Runge-Kutta 格式的 L_2 误差以及 L_∞ 误差均不断增大,而时空耦合谱元方法及时间方向采用 ABM 格式所得的误差则较为稳定。究其原因,当空间方向采用高精度的谱元离散格式时,时间方向采用低阶精度的差分格式则使得时间方向的计算误差成为影响整体计算精度的主要原因,而时空耦合谱元方法由于时间方向及空间方向同时采用高精度的谱元离散格式,使得整体的计算精度得以提高。

3.2.2 时间及空间离散格式匹配性比较 为研究不同时间离散格式与空间谱元离散格式的匹配特性,固定时间离散格式的参数,即时空耦合谱元方法中取时间方向网格划分为10单元5网格,差分法中时间步长为0.001 s,通过改变空间方向单元内插值函数的阶数 N_x ,分析同一计算时刻 L_2 误差和 L_∞ 误差的变化情况。

图6和图7分别给出了算例1及算例2误差随 N_x 的变化情况。由图分析可知,当 N_x 取值不断增大时,时空耦合谱元方法的计算精度不断提高,且保留了指数量收敛的特点,具有较好的时空匹配特性。算例1中当 N_x 取8,算例2中 N_x 取6时,采用向后欧拉法与 RK4 方法离散非稳态项,均无法通过增加 N_x 来提高计算精度,且在2个算例中当 N_x 取值大于12时, RK4 方法发散。此外,2个算例中当 N_x 取值大于6时,采用 ABM 方法无法得到收敛解,结合3.2.1节的分析结果可知,虽然 ABM 离散格式能够得到较高精度的计算结果,但计算稳定性较差,无法与空间方向谱元离散格式实现较好的匹配。考虑离散格式的稳定性,时间差分格式会出现不稳定

L_∞ 误差随计算时间的变化。由图可知,时空耦合谱元方法能够求解 Burgers 方程,且与传统的时间差分方法相比,能够获得更高的求解精度。具体来说,由图2和图3可知,算例1中随计算时间的推进,时

现象,主要是计算步长受到空间方向网格大小的限制,使得每种时间差分格式都有自己的计算稳定范围,而从数值计算结果来看,时空耦合谱元方法则具有更好的稳定性。

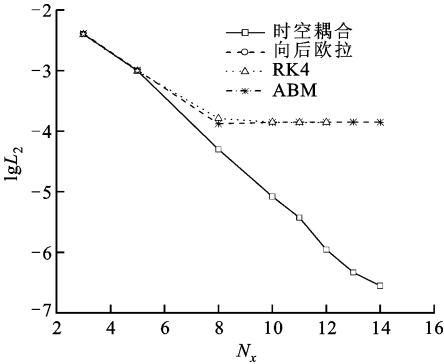


图 6 $t=1.5\text{ s}$ 时算例 1 误差随 N_x 的变化情况

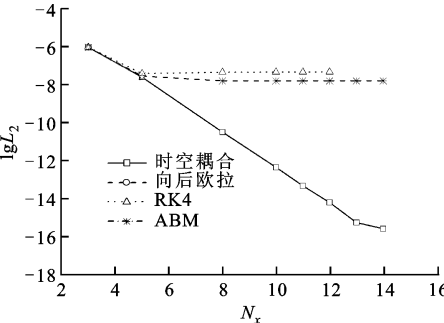


图 7 $t=0.5\text{ s}$ 时算例 2 误差随 N_x 的变化情况

3.2.3 时间方向单元数及插值节点数的影响 计算中固定空间方向网格划分方式为 6 单元 6 网格,分别增加时间方向单元数及单元内插值节点数,分析误差的计算结果。

表 2 和表 3 分别给出了在时间方向上和不同网格划分条件下算例 1 和算例 2 的误差计算结果。由表中数据可知,采用时空耦合谱元方法,当空间网格划分方式固定时,时间方向无论是增加单元数还是网格数,时空耦合谱元方法的计算精度提高均不明显,这与文献[9]中求解波动方程得到的相关结论一致。

表 2 $t=2\text{ s}$ 时算例 1 时间方向 and 不同网格参数下误差计算结果

单元数	网格数	$L_2/10^{-5}$	$L_{\infty}/10^{-4}$
5	4	7.519 366 23	2.567 448 50
5	5	7.516 977 90	2.574 500 58
5	6	7.516 733 20	2.574 266 04
8	5	7.516 699 56	2.574 225 91
10	5	7.516 715 48	2.574 273 43

表 3 $t=1\text{ s}$ 时算例 2 在时间方向上和不同网格参数下误差计算结果

单元数	网格数	$L_2/10^{-10}$	$L_{\infty}/10^{-9}$
5	4	6.326 603 59	2.229 113 14
5	5	6.326 608 93	2.229 205 47
5	6	6.326 608 93	2.229 205 58
8	5	6.326 608 93	2.229 205 53
10	5	6.326 608 93	2.229 205 55

4 结 论

本文采用时空耦合谱元方法求解了一维 Burgers 方程,对比了该方法与空间方向采用谱元方法结合时间方向采用经典的差分方法在计算精度及收敛性方面的不同,研究了时间方向网格单元数及插值节点数对该方法计算精度的影响,得到的主要结论有:

- (1)时空耦合谱元方法能够求解 Burgers 方程,并具有较高的求解精度;
- (2)时间方向采用谱元离散能够保持空间方向谱元离散的谱精度,时间方向采用差分格式时,空间方向插值节点数仅在一定范围内可以维持空间方向的谱精度;
- (3)时间方向增加单元数或插值节点数对时空耦合谱元方法的求解精度影响不大。

参考文献:

[1] KUTLUAY S, BAHADIR A R, ÖZDEŞ A. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods [J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 1999, 103(2): 251-261.

[2] SEYDAOĞLU M, ERDOĞAN U, ÖZİŞ T. Numerical solution of Burgers equation with high order splitting methods [J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2014, 291(C): 410-421.

[3] VAROĞLU E, LIAM FINN W D. Space-time finite element incorporating characteristics for the Burgers equation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, 16: 171-184.

[4] PATERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54: 468-488.

[5] 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程 [J]. 应用力学学报, 2000, 17(4): 20-25.

QIN Guoliang, XU Zhong. A spectral element method

- for incompressible Navier-Stokes equations [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(4): 20-25.
- [6] 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解正方形封闭空腔内的自然对流换热 [J]. 计算物理, 2001, 18(2): 119-124.
QIN Guoliang, XU Zhong. Computation of natural convection in two-dimensional cavity using spectral element method [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2001, 18(2): 119-124.
- [7] 张荣欣, 秦国良. 用切比雪夫谱元方法求解均匀流场中的声传播问题 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(7): 120-124.
ZHANG Rongxin, QIN Guoliang. Chebyshev spectral elements method for acoustic propagation problem in a uniform mean flow [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(7): 120-124.
- [8] 耿艳辉, 秦国良. Chebyshev 谱元法求解含吸收边界的二维均匀稳定流场的声传播 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(3): 100-106.
GENG Yanhui, QIN Guoliang. Chebyshev spectral elements methods for 2-dimensional acoustic propagation problem in a uniform mean flow with absorbing boundary condition [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(3): 100-106.
- [9] GENG Yanhui, QIN Guoliang. The research of space-time coupled spectral element method for acoustic wave equations [J]. Chinese Journal of Acoustics, 2016(1): 29-47.
- [10] SHEN J, TANG T, WANG L L. Spectral methods: algorithms, analysis and applications [M]. Berlin, Germany: Springer, 2011: 447-453.

(编辑 苗凌)

(上接第8页)

- [14] WANG S, KOMVOPOULOS K. A fractal theory of the interracial temperature distribution in the slow sliding regime: part I Elastic contact and heat transfer analysis [J]. ASME Journal of Tribology, 1994, 116(4): 812-823.
- [15] 田红亮, 方子帆, 朱大林, 等. 固定接触界面切向静弹性刚度问题研究 [J]. 应用力学学报, 2011, 28(5): 458-464.
TIAN Hongliang, FANG Zifan, ZHU Dalin, et al. Investigation on tangential static elastic stiffness of fixed contact interface [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2011, 28(5): 458-464.
- [16] JOHNSON K L. Contact mechanics [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985: 227.
- [17] 温淑花, 张宗阳, 张学良, 等. 固定结合面刚度分形模型 [J]. 农业机械学报, 2013, 44(2): 255-260.
WEN Shuhua, ZHANG Zongyang, ZHANG Xueliang, et al. Stiffness fractal model for fixed joint interfaces [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(2): 255-260.
- [18] LIOU J L. The theoretical study for microcontact model with variable topography parameters [D]. Taiwan: Cheng Kung University, 2006: 97.
- [19] BHUSHAN B. Analysis of the real area of contact between a polymeric magnetic medium and a rigid surface [J]. ASME Journal of Tribology, 1984, 106(1): 26-34.

[本刊相关文献链接]

- 田红亮, 余媛, 陈甜敏, 等. 考虑表面粗糙度和几何曲率的两球体接触问题. 2016, 50(3): 1-7. [doi: 10.7652/xjtuxb201603001]
- 刘伟强, 张进华, 洪军, 等. 椭圆抛物体形微凸体弹性接触力学模型. 2015, 49(10): 34-40. [doi: 10.7652/xjtuxb201510006]
- 王磊, 杜瑞, 金涛, 等. 螺钉连接固定结合面匹配设计研究. 2013, 47(7): 62-67. [doi: 10.7652/xjtuxb201307012]
- 杜飞, 洪军, 李宝童, 等. 结合面参数的超声检测方法研究. 2013, 47(3): 18-23. [doi: 10.7652/xjtuxb201303004]
- 杨国庆, 熊美华, 洪军, 等. 3D粗糙表面的数字化表征与接触特性分析. 2012, 46(11): 58-63. [doi: 10.7652/xjtuxb201211012]
- 杨国庆, 王飞, 洪军, 等. 螺栓被连接件刚度理论的计算方法. 2012, 46(7): 50-56. [doi: 10.7652/xjtuxb201207010]
- 陈成军, 杨国庆, 常东方, 等. 面向结合面密封性能要求的装配连接工艺设计. 2012, 46(3): 75-83. [doi: 10.7652/xjtuxb201203014]
- 李辉光, 刘恒, 虞烈. 粗糙机械结合面的接触刚度研究. 2011, 45(6): 69-74. [doi: 10.7652/xjtuxb201106013]
- 张学良, 温淑花, 兰国生, 等. 平面结合面切向接触阻尼分形模型及其仿真. 2011, 45(5): 74-77. [doi: 10.7652/xjtuxb201105014]
- 刘海涛, 赵万华. 基于结合面的机床振动分析及优化设计. 2010, 44(1): 96-99. [doi: 10.7652/xjtuxb201001021]

(编辑 葛赵青)