

DOI: 10.7652/xjtuxb201707004

时空耦合谱元方法求解刚性圆柱体表面的声传播问题

王亚洲, 秦国良, 包振忠, 和文强, 穆毅伟

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 以刚性圆柱体表面均匀分布若干单极子质量源的声传播问题为求解目标,在极坐标系中构建时空耦合模型。基于 Least-Squares 变分,在时间及空间方向同时采用 Chebyshev 谱元方法进行离散,将原来极坐标系中的问题转化到柱坐标系中进行求解,并通过数值实验验证了模型的正确性;进一步应用时空耦合模型求解刚性圆柱体表面声传播问题,在计算区域外边界采用 C-E-M 吸收边界条件。研究结果显示:时空耦合谱元模型通过时间及空间计算精度的匹配,能够获得高精度的数值解;增加时间及空间方向的单元数及单元内的插值阶数均能提高计算精度,且提高插值阶数的方法具有指数阶收敛特性;所构建的时空耦合模型能够稳定求解刚性圆柱体表面的声传播问题,将 C-E-M 吸收边界条件改写为第一类边界条件并应用于时空耦合模型依然有效。研究内容对构建高精度的计算气动声学求解方法具有指导意义。

关键词: 时空耦合;Least-Squares 变分;极坐标系;谱元方法;吸收边界

中图分类号: O422 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)07-0024-06

Time-Space Coupled Spectral Element Method for Acoustic Wave Propagation on a Rigid Cylinder

WANG Yazhou, QIN Guoliang, BAO Zhenzhong, HE Wenqiang, MU Yiwei

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A coupled time-space model is established in a polar coordinate to obtain the propagation characters from some monopole sources distributed evenly on a rigid cylinder. Following the least-squares variational principle, Chebyshev spectral element method is chosen to discretize both the time and space domains and the problem in polar coordinate is transformed into cylindrical coordinate. The validity of this model is verified by the numerical experiment, and the acoustic wave propagation on a rigid cylinder with C-E-M absorbing boundary condition on the edge of computational domain is revealed. The results show that a high-order accuracy can be obtained by the coupled time-space model via matching the numerical accuracy between time and space. The numerical accuracy can be improved by increasing the number of the elements or the interpolation order in each element of time and space. An exponential accuracy rate can be obtained with the increasing interpolation order. The acoustic wave propagation on the surface of a rigid cylinder can be simulated stably by this model, and the C-E-M absorbing boundary condition rewritten as the Dirichlet boundary condition still works well.

收稿日期: 2016-10-11。 作者简介: 王亚洲(1993—),男,博士生;秦国良(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB026004)。

网络出版时间: 2017-04-21

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20170421.1650.016.html>

Keywords: time-space coupled; least-squares variation; polar coordinate; spectral element method; absorbing boundary

计算气动声学 (Computational Aero-Acoustics, CAA) 是采用数值方法来研究气动声学问题的一门交叉学科,是气动声学领域中的一个重要研究课题。声学问题具有涵盖频率范围宽、声传播过程中耗散和频散低、声学量的量级小等特点,这就为采用数值方法求解声学问题带来了挑战。谱元方法结合了谱方法高精度的特点和有限元方法灵活的区域适应性特点,相比于计算声学中广泛采用的有限差分法^[1]和有限元法^[2],其指数阶收敛特性在求解气动声学问题时具有明显的优势^[3]。该方法通过提高单元内的插值阶数可以显著提高计算精度,且计算中采用的网格节点数明显少于有限差分法和有限元法,如文献[4-8]采用谱元方法成功地求解了 CAA 中的经典问题。

变分问题是应用有限元方法及谱元方法中需要解决的首要问题,较为广泛采用的方法有 Galerkin 变分及 Least-Squares 变分,文献[7-8]采用这 2 种变分形式、利用谱元方法成功求解了波动方程。当空间方向采用谱元方法离散时能够获得高精度的数值解,这就要求时间方向的求解精度能够与空间方向的求解精度实现良好的匹配。然而,目前在 CAA 问题计算中,时间离散格式多采用低阶格式,如文献[8]中当空间方向采用谱元方法时,时间方向则采用 Crank-Nicolson 格式和 Adams-Bashforth 格式,这就带来了时间和空间方向的求解精度不匹配的问题。文献[7]在求解波动方程时基于 Galerkin 变分法提出了时空耦合谱元方法,并在时间和空间方向同时采用谱元离散,其数值实验结果证明 Galerkin 时空耦合谱元方法能够实现对波动方程的高精度求解,且空间方向的插值阶数对计算精度起主要作用。文献[9]在求解一维 Burgers 方程时,同样基于 Galerkin 变分构建了时空耦合模型,通过数值实验证明该时空耦合模型具有更好的时空匹配特性,其在时间方向增加单元数或插值节点数对求解精度影响不大。

本文基于 Least-Squares 变分方法,在极坐标系中构建时空耦合模型,采用 Chebyshev 谱元方法进行时间和空间方向的离散,以期在时间及空间方向同时获得谱精度,实现精度匹配,从而提高整体数值计算精度。通过数值实验验证了所构建模型的正确性与可靠性,同时分析了该方法的指数阶收敛特性,

最后利用该方法求解了刚性圆柱体表面的声传播问题。

1 控制方程

基于小扰动理论和线性化欧拉方程可得描述声波传播所遵循的基本方程^[4],该方程在静止流场中的一般形式可写成

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = f \quad (1)$$

式中: c_0 为当地声速; p' 为声压; f 为声源项; ∇^2 为拉普拉斯算子,在极坐标系中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

考虑环形区域 $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r_a \leq r \leq r_b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 内的声传播问题,第一类及第二类边界条件分别定义为

$$\left. \begin{aligned} p' \Big|_{\Gamma_1} &= g_1(r, \theta, t) \\ \frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= g_2(r, \theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: n 表示计算边界的外法线方向。在 CAA 问题中,考虑到计算边界的反射对声场的影响,需要在计算区域外边界添加吸收边界条件。本文采用了数值计算中广泛应用且具有一阶吸收精度的 C-E-M (Clayton-Engquist-Majda) 吸收边界条件^[10-11],定义如下

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_3 \quad (4)$$

式(3)、式(4)中: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$ 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset$ 。初始条件定义为

$$\left. \begin{aligned} p' \Big|_{t=0} &= h_1(r, \theta) \\ \frac{\partial p'}{\partial t} \Big|_{t=0} &= h_2(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2 数值方法

2.1 时空耦合模型

极坐标系中构建的时空耦合模型将时间看作“伪”空间,则原来的二维问题转化为三维问题,坐标系也由原来的极坐标系转化为柱坐标系。图 1 给出了采用时空耦合模型求解极坐标系中二维环形空间声传播问题的计算区域。时空耦合模型出现了末时刻边界,而这一边界条件往往是待求的量,这就造成

了边界条件的缺失。此时,若仍采用传统的 Galerkin 变分方法求解,对于末时刻,如果不给定边界条件,相当于附加了第二类自然边界条件,而这一做法显然不适用于所有问题的求解。文献[7]给出的 3 个数值算例中,对于时间区域末时刻边界,所给解析解算例在时间方向均满足第二类自然边界条件,此时采用 Galerkin 时空耦合谱元方法能够成功求解,而对于末时刻不满足自然边界的情况,文献[7]未给出计算。针对这一问题,本文采用 Least-Squares 谱元方法建立了时空耦合模型,计算中无需给定末时刻边界条件,数值实验证明仍可获得正确的数值解。

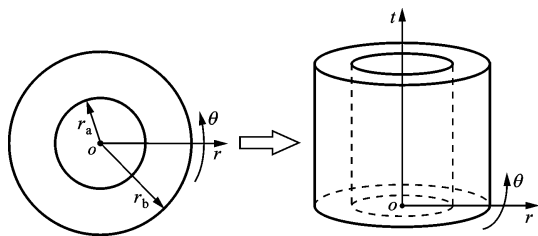


图1 时空耦合模型计算区域

2.2 Least-Squares 变分

由于式(1)为二阶偏微分方程,若采用 Least-Squares 变分,则应先将原方程转变为一阶偏微分方程。引入辅助变量 $P = \partial p' / \partial r$, $Q = \partial p' / (r \partial \theta)$, $R = \partial p' / \partial t$,代入式(1),可得如下偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial R}{\partial t} - \left(\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} P + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) &= f \\ \frac{\partial p'}{\partial r} - P &= 0 \\ \frac{\partial p'}{r \partial \theta} - Q &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} - R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

此外,式(3)所描述的第一类、第二类边界条件,在 Least-Squares 变分问题中均可用第一类边界条件进行处理,即

$$\left. \begin{aligned} p' \Big|_{\Gamma_1} &= g_1(r, \theta, t) \\ P \Big|_{\Gamma'_2} &= g'_2(r, \theta, t) \\ Q \Big|_{\Gamma''_2} &= g''_2(r, \theta, t) \\ \Gamma'_2 \cup \Gamma''_2 &= \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

同理,式(4)所描述的 C-E-M 吸收边界条件也可转化为第一类边界条件,具体表达式将在 4.1 小节中给出。基于本文构建的时空耦合模型,式(5)所描述的初始条件可当作边界条件处理,即

$$\left. \begin{aligned} p' \Big|_{t=0} &= h_1(r, \theta) \\ R \Big|_{t=0} &= h_2(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(6)的 Least-Squares 变分可写成如下形式

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}; \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{L}(\mathbf{U}) - \mathbf{F})^2 d\Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{\partial}{r \partial \theta} & -\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial r} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{r \partial \theta} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p' \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则式(6)的 Least-Squares 变分问题为:求 $\mathbf{U} \in X = \{(p', P, Q, R) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\}$,使得下式恒成立,即

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}; \mathbf{F}) \leq \mathcal{R}(\mathbf{V}; \mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{V} = [p' \ P \ Q \ R]^T \in X \quad (10)$$

式中: $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 分别为试探函数和检验函数; X 为容许空间。

采用 Euler-Lagrange 方法求解式(10),即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{R}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{V}; \mathbf{F}) = \int_{\Omega} \mathbf{L}^T(\mathbf{V})(\mathbf{L}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}) d\Omega = 0 \quad (11)$$

则满足式(11)的解即为式(10)的解。由此,该变分问题可转变为求 $\mathbf{U} \in X$,使得下式恒成立,即

$$\int_{\Omega} \mathbf{L}^T(\mathbf{V}) \mathbf{L}(\mathbf{U}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{L}^T(\mathbf{V}) \mathbf{F} d\Omega \quad (12)$$

式中: $\forall \mathbf{V} = [p' \ P \ Q \ R]^T \in X$ 。

2.3 谱元离散

将时空耦合模型的计算区域 Ω 划分为 $E = E_r \times E_{\theta} \times E_t$ 个互相不重叠的单元(E_r 、 E_{θ} 、 E_t 分别为沿 r 、 θ 、 t 3 个方向的单元数),即 $\Omega = \bigcup_{i=1}^E \Omega_i$,且 $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ 。采用如下映射关系

$$\xi = 2 \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i} - 1 \quad (13a)$$

$$\eta = 2 \frac{r(\theta - \theta_i)}{r(\theta_{i+1} - \theta_i)} - 1 \quad (13b)$$

$$\tau = 2 \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} - 1 \quad (13c)$$

将第 i 个子单元转化到标准六面体单元内,而在标

准单元内分别采用 N_r^i 、 N_θ^i 、 N_t^i 阶 Chebyshev 多项式的极值点和端点,即

$$\xi_j^i = -\cos \frac{j\pi}{N_r^i}, \quad j = 0, 1, \dots, N_r^i \quad (14a)$$

$$\eta_j^i = -\cos \frac{j\pi}{N_\theta^i}, \quad j = 0, 1, \dots, N_\theta^i \quad (14b)$$

$$\tau_j^i = -\cos \frac{j\pi}{N_t^i}, \quad j = 0, 1, \dots, N_t^i \quad (14c)$$

作为插值节点,由此构成谱元方法的三维张量内积网格。图 2 给出了下述条件下从实际单元到标准单元的映射关系示意图: $E_r = 3$, $E_\theta = 12$, $E_t = 4$, 总单元数 E 为 144; 插值阶数取 $N_r^i = N_\theta^i = N_t^i = 5$, 总节点数 $N_{\text{dof}} = 20\ 160$ 。

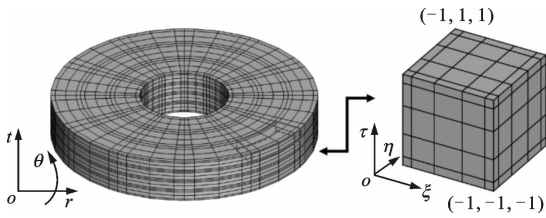


图 2 实际单元与标准单元映射关系

单元内插值基函数可写成如下形式

$$h_j^i(\xi) = \frac{2}{N_r^i} \sum_{m=0}^{N_r^i} \frac{1}{c_j c_m} T_m(\xi_j^i) T_m(\xi), \quad j = 0, 1, \dots, N_r^i \quad (15a)$$

$$h_k^i(\eta) = \frac{2}{N_\theta^i} \sum_{m=0}^{N_\theta^i} \frac{1}{c_k c_m} T_m(\eta_k^i) T_m(\eta), \quad k = 0, 1, \dots, N_\theta^i \quad (15b)$$

$$h_l^i(\tau) = \frac{2}{N_t^i} \sum_{m=0}^{N_t^i} \frac{1}{c_l c_m} T_m(\tau_l^i) T_m(\tau), \quad l = 0, 1, \dots, N_t^i \quad (15c)$$

式中: T_m 为 m 阶 Chebyshev 多项式; c_m 满足

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0, N_r^i \text{ 或 } N_\theta^i \text{ 或 } N_t^i \\ 1, & m \neq 0, N_r^i \text{ 或 } N_\theta^i \text{ 或 } N_t^i \end{cases} \quad (16)$$

容易证明,在单元内插值基函数满足 $h_j^i(\xi_p) = \delta_{jp}$, $h_k^i(\eta_q) = \delta_{kq}$, $h_l^i(\tau_r) = \delta_{lr}$, 而在单元外取值为 0, 此处 $p = 0 \sim N_r^i$, $q = 0 \sim N_\theta^i$, $r = 0 \sim N_t^i$ 。

对于 Least-Squares 变分问题(式(12)), 试探函数的 4 个变量、检验函数的 4 个变量以及右端项可采用式(15)进行离散,即

$$Y^i(\xi, \eta, \tau) = \sum_{j=0}^{N_r^i} \sum_{k=0}^{N_\theta^i} \sum_{l=0}^{N_t^i} Y_{jkl}^i h_j^i(\xi) h_k^i(\eta) h_l^i(\tau) \quad (17)$$

式中: Y^i 为离散量 p'^i 、 P^i 、 Q^i 、 R^i 、 $\hat{p}'^i$ 、 $\hat{P}^i$ 、 $\hat{Q}^i$ 、 $\hat{R}^i$

及 f^i 。

将式(17)代入式(12), 考虑到检验函数取值的任意性, 可得由 Least-Squares 谱元方法生成的第 i 个单元内的代数方程组, 再利用有限元合成总体矩阵的方法得到总体代数方程组, 解之可得所求波动方程的数值解。

3 数值算例及讨论

3.1 数值算例

考虑如下精确解

$$p' = r^2 \sin\theta \cos(c_0 t), \quad 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (18)$$

当 $c_0 = 1.0$ 时, 由式(18)、式(1)、式(2)易得右端源项为

$$f = -(r^2 + 3) \sin\theta \cos t \quad (19)$$

如式(7)和式(8)的形式, 此算例中给定第一类边界、第二类边界及相应的初始条件, 均可用如下的第一类边界条件进行处理

$$\left. \begin{aligned} p' \Big|_{r=1} &= \sin\theta \cos(c_0 t), 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ P \Big|_{r=3} &= 6 \sin\theta \cos(c_0 t), 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} p' \Big|_{t=0} &= r^2 \sin\theta \\ R \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由式(18)易知, 本算例仅仅当 $t = k\pi$ (k 为正整数)时, 末时刻时间方向满足自然边界条件, 故下文的计算均避开这一时间作为末时刻, 来验证本文采用的 Least-Squares 谱元方法对末时刻不满足自然边界条件且在不给定任何边界条件时也可正确求解。

本文采用误差 L_2 、绝对误差 e_r 以及无穷误差 L_∞ 来考察时空耦合 Least-Squares 谱元方法在极坐标系中对声传播方程的求解结果。3 种误差分别定义如下

$$L_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i^{\text{exa}} - u_i^{\text{num}})^2 \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$e_r = u_i^{\text{exa}} - u_i^{\text{num}} \quad (23)$$

$$L_\infty = \max_i |u_i^{\text{exa}} - u_i^{\text{num}}| \quad (24)$$

式中: 上角标“exa”表示精确解; “num”表示数值解。

3.2 计算结果及讨论

3.2.1 数值解与精确解 计算中给定计算末时刻为 1 s, 固定网格划分为 $E_r \times E_\theta \times E_t = 2 \times 8 \times 3$, 插值阶数为 $N_r = N_\theta = N_t = 5$, 则总单元数为 48, 总节点数为 7 040。

图3给出了在末时刻($t=1\text{ s}$)整个计算区域内的绝对误差分布云图,此时 $L_\infty=1.17\times 10^{-6}$ 。由图可知,应用本文所构建的时空耦合 Least-Squares 谱元方法求解波动方程,能够获得高精度的数值解。图4给出了3个不同节点(r, θ)在不同时刻的数值解。从图中可以看出,随着计算时间的推移,数值解与精确解始终吻合得很好,从而说明时空耦合谱元模型得到的解是稳定的。

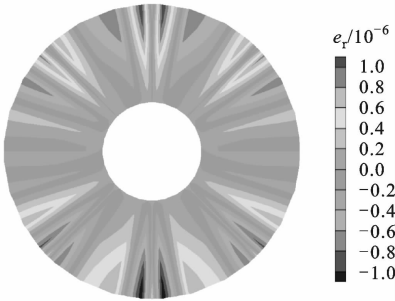


图3 末时刻计算区域内绝对误差分布云图

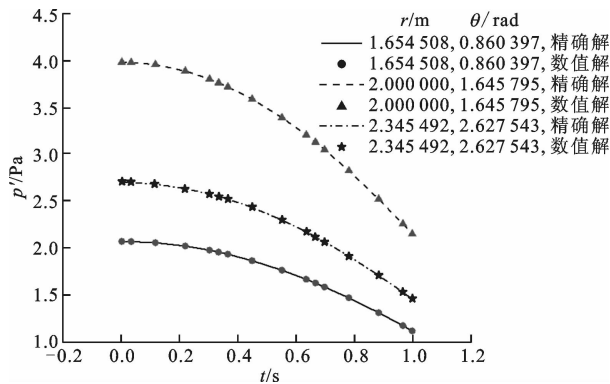


图4 不同节点在不同时刻的数值解与精确解比较

3.2.2 h - p 收敛特性 下面讨论时空耦合模型中 h 型方法和 p 型方法的收敛特性及时空耦合谱元方法的谱精度特点。在有限元中, h 型方法是通过增加单元数加密网格来提高计算精度的方法; p 型方法是通过提高单元内插值基函数的阶数来提高计算精度的方法。计算方案如下:

(1)固定单元划分为 $E_r \times E_\theta \times E_t = 2 \times 6 \times 2$,单元内插值阶数由 $N_r = N_\theta = N_t = 2$ 开始依次增加。时间区域长度为 1 s ,考察末时刻数值解的 L_2 随总节点数 N_{dof} 的变化情况;

(2)固定单元内插值阶数为 $N_r = N_\theta = N_t = 3$,网格划分由 $E_r \times E_\theta \times E_t = 2 \times 6 \times 2$ 开始逐渐增加,且 E_r 、 E_θ 、 E_t 同时增加。时间区域长度为 1 s ,考察末时刻数值解的 L_2 随总节点数 N_{dof} 的变化情况。

图5给出了采用2种提高精度的方法得到的误差特性曲线。从图中可以看出,在极坐标系中,本文

构建的时空耦合模型同时具有 h 型、 p 型的敛特性,即在时间和空间方向增加单元数及单元内的插值阶数,均能提高计算精度: p 型方法使得数值误差减小的速度更快,呈现出谱精度的特点; h 型方法的数值误差随总计算节点的增多而缓慢减小,呈现出代数精度的特点。

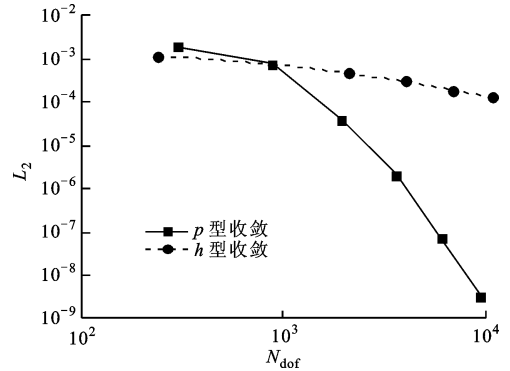


图5 时空耦合模型的 h 型和 p 型收敛特性

4 刚性圆柱体表面声传播计算

4.1 计算模型

采用时空耦合模型计算在刚性圆柱体上均匀分布若干单极子质量源的声辐射问题。圆柱半径 $r_a = 8\text{ m}$,计算区域外径 $r_b = 40\text{ m}$,圆心坐标为 $(0, 0)$ 。圆柱表面给定无穿透边界,即

$$P = \frac{\partial p'}{\partial r} \Big|_{r=r_a} = 0 \quad (25)$$

来考察声源向外辐射的情况。

计算区域外边界给定 C-E-M 吸收边界条件,当采用 Leas-Squares 变分时的具体表达式为

$$\frac{1}{c_0} R \Big|_{r_b} + P \Big|_{r_b} = 0 \quad (26)$$

式(25)和式(26)本质均为第二类边界条件,而在 Least-Squares 变分中,均转化为第一类边界条件进行处理。

在圆柱表面均匀布置 40 个相同的单极子源共同构成声源项,其中单极子声源的具体表达式为

$$f(r, \theta, t) = A \exp\{-\alpha[(r \cos \theta - r_a \cos \theta_s)^2 + (r \sin \theta - r_a \sin \theta_s)^2]\} \sin(\omega t) \quad (27)$$

式中: $A = -0.5\text{ Pa}$ 、 $\alpha = (\ln 2)/2$ 、 $\omega = 20\pi$ 分别代表声源的振幅、衰减系数、角频率。 (r_a, θ_s) 代表了声源的位置, θ_s 在区间 $[0, 2\pi]$ 上由 0 开始均匀取 40 个值, $c_0 = 340.29\text{ m/s}$ 。

初始条件

$$\left. \begin{aligned} p'(r, \theta, 0) &= 0 \\ R(r, \theta, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

计算时间为 $0 \sim 0.2\text{ s}$; 网格划分为 $E_r \times E_\theta \times E_t = 4 \times 10 \times 4$; 单元内插值阶数为 $N_r \times N_\theta \times N_t = 5 \times 5 \times 5$ 。图 6 给出了计算模型在 $r-\theta$ 平面上的计算网格。

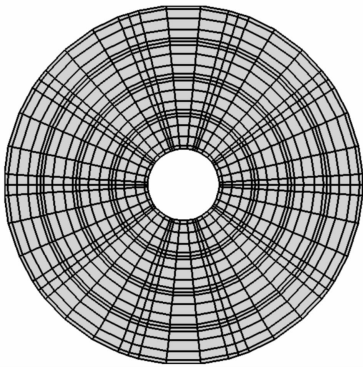


图 6 计算模型在 $r-\theta$ 平面上的计算网格

4.2 结果及讨论

图 7 给出了当 t 为 $0.05, 0.10, 0.15, 0.20\text{ s}$ 时的声压分布云图。从图中可以看出,对于本文选定的圆柱模型,当圆柱表面均匀分布 40 个单极子声源时,其声压以圆柱表面为中心呈对称辐射状向外传播。为更加清楚地观察声压的传播过程,图 8 给出了不同时刻在 $(r, 0^\circ)$ 及 $8\text{ m} \leq r \leq 40\text{ m}$ 范围内的声压分布情况。结合图 7、图 8 可以看出:当 $t = 0.1\text{ s}$ 时,声压已传播至计算外边界;当 $t > 0.1\text{ s}$ 时反映出 C-E-M 吸收边界条件的有效性。这说明将 C-E-M 吸收边界条件改写为第一类边界条件,并应用于 Least-Squares 时空耦合谱元方法求解中是正确且可靠的。

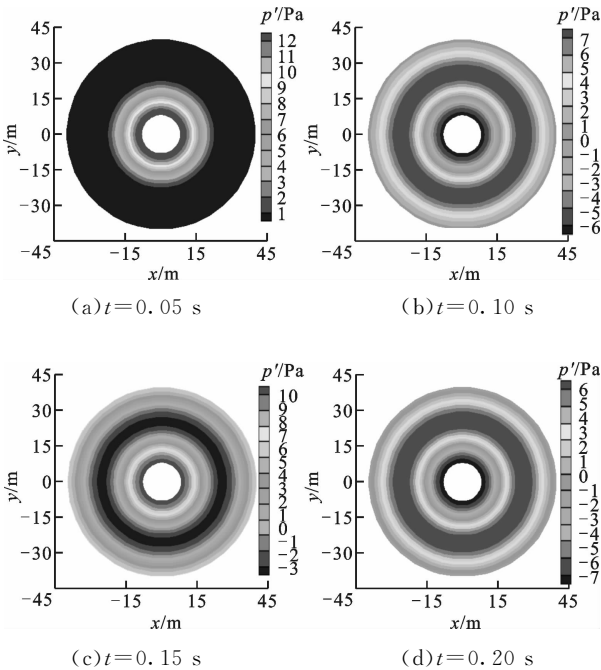
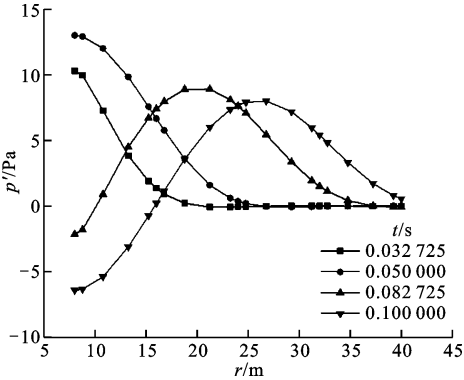
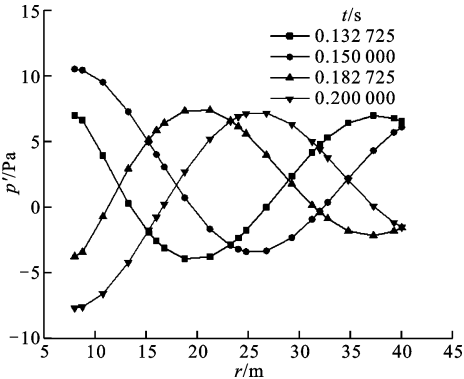


图 7 不同时刻计算区域内的声压分布云图



(a) 声压传播至计算边界前



(b) 声压传播至计算边界后

图 8 不同时刻沿 $(r, 0^\circ)$ 的声压分布

5 结 论

本文在极坐标系中建立了时空耦合模型,并采用 Least-Squares 谱元方法进行求解,通过数值实验证明了模型的正确性。进一步应用该方法求解了刚性圆柱体表面的声传播问题,得到的主要结论有:

- (1) 基于 Least-Squares 变分法构建的时空耦合模型,能够实现时间及空间方向计算精度的匹配,从而提高整体的数值计算精度;
- (2) 本文时空耦合模型同时具有 h 型、 p 型的收敛特性,即增加时间及空间方向的单元数或单元内的插值阶数,均能提高计算精度,且提高插值阶数的方法具有谱精度的特点,而增加单元数的方法只能获得代数精度;
- (3) 刚性圆柱体表面均匀附加若干单极子质量源时,声压呈对称辐射状向外传播,且在 Least-Squares 谱元方法中,经典的 C-E-M 吸收边界条件能够被改写成第一类边界条件,这样处理更为简单,且在本文时空耦合模型中对计算边界声压的吸收依然有效。

(下转第 97 页)