

DOI: 10.7652/xjtuxb201709012

弧齿锥齿轮的向量式有限元静态啮合分析

侯祥颖, 方宗德

(西北工业大学机电学院, 710072, 西安)

摘要: 针对目前向量式有限元的类型和应用范围,根据向量式有限元的基本理论推导了八节点六面体实体单元的基本理论计算式,阐述了逆向运动和单元内力的求解过程,将向量式有限元的应用范围拓展到空间和工程应用领域。对于空间实体结构的接触行为,采用主从面算法和内外算法分别进行了全局搜索和局部搜索,以实现碰撞检测,并通过罚函数法来处理接触问题。以一对弧齿锥齿轮为例,建立了向量式有限元模型,利用该模型进行了分析和计算,并将计算结果与传统有限元计算结果进行了对比,结果表明:通过向量式有限元计算得到的接触力、接触应力以及齿面印痕等与传统有限元方法计算的结果吻合程度较高,并且可以在网格单元较少的情况下得到较为精确的结果。

关键词: 弧齿锥齿轮;向量式有限元;六面体单元;接触应力;啮合性能

中图分类号: O242.21;TH132.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)09-0085-07

Static Meshing Analysis of Spiral Bevel Gears Based on Vector Form Intrinsic Finite Element Method

HOU Xiangying, FANG Zongde

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: According to the basic theory of the vector form intrinsic finite element (VFIFE) and its element type and current applications, basic theoretic formulas of the hexahedral entity element are derived by calculating reverse movement and element inner forces, which extends VFIFE application to complex solid structures and engineering fields. For the collision-contact behavior of solid surfaces, the master-slave algorithm and inside-outside algorithm are used to perform global search and local search between the particle and hexahedral mesh surface of the outer entity surface, and a penalty method based on the central differential formula is presented for the analysis of collision response. Taking a pair of spiral bevel gears for example, its model is established and analyzed by VFIFE, and the results are compared with that of finite element method (FEM). Comparison shows that the stress, contact force and contact pattern agree well with the FEM results, and the VFIFE method is efficient for analyzing solid structures with a relatively sparse grid.

Keywords: spiral bevel gear; vector form intrinsic finite element; hexahedral entity element; contact stress; meshing performance

齿轮系统是机构中传递运动与动力的关键部件,对其传动性能的研究和分析越来越受到工程领域学者专家的关注。研究齿轮啮合性能的传统方法主要是有限元法和集中质量法。王三民等建立了直升机传动系统的动力学模型,并研究和讨论了其动载特性^[1];方宗德等以齿轮几何接触分析(TCA)和承载接触分析(LTCA)方法为基础,仿真分析了齿轮的静态啮合性能,为齿面设计提供了依据^[2-3];唐进元等采用有限元方法计算了齿轮啮合的应力、刚度、传动误差等性能参数^[4-5]。国外对齿面啮合性能的研究一般也都采用有限元方法^[6-8]。

采用系统动力学方法很难反映齿轮的啮合特性,目前考察齿面的啮合特性更多是依赖于有限元方法。但是,传统的有限元方法对网格划分要求较高,为了得到精确的计算结果,往往需要划分大量的网格,由此大大增加了计算代价,使得有限元法在复杂的动力学分析中变得不可行。

丁承先等首先针对复杂非线性固体力学问题提出了向量式有限元法(VFIFE)^[9],该方法可以在复杂的非线性结构力学分析中,以较小的计算代价得到精确的结果,编程和计算过程简单,并且该方法以质点的运动来描述体系行为,不需要组装单元刚度矩阵,亦无需求解复杂的非线性联立方程组。对于静力学问题,需要通过动态分析的过程,将收敛得到的稳态解近似作为静力解,而对于动力学问题,可直接跟踪质点运动获得分析结果。因此,向量式有限元法适合于大位移、大变形以及复杂非线性动力学分析^[10]。喻莹等以向量式结构力学为基础,模拟了桁架、钢架结构的几何性质变化、组合性质变化、倒塌等问题^[11];段元锋等将向量式有限元法应用于斜拉桥仿真分析^[12-13];吴东岳等在平面单元的基础上发展了三节点、四节点三维膜单元,并对膜结构的大变形进行了分析^[14-15];王震等在对膜单元进行推导和分析的基础上,推导了四面体单元的计算公式,进行了实体结构分析,并分析了薄壳结构的断裂、穿透等复杂非线性行为^[16-17]。

以上研究对向量式有限元的发展起到了很大的推动作用,尤其是对于复杂非线性及动态问题,因为该方法只要步长合适则必然收敛。当物体在高速运动或发生断裂、大变形等强非线性行为时,需要很小的物理步长才能描述物体的运动过程,此时隐式方法的优势不明显,而向量式有限元法易于编程和收敛的特性便具有了优势^[10]。但是,要将此方法广泛应用于工程领域,还有很多技术问题尚未解决,其中

主要的一点便是六面体单元的构建。因为六面体单元相对于四面体单元具有计算精度高、当单元尺寸相同时划分的网格数明显少(即计算代价小)的明显优势^[18],因此在实体结构分析中被广泛采用。

本文根据向量式有限元的基本原理,推导了八节点六面体单元的逆向运动、纯变形和单元内力表达式,在主从面算法和内外算法的基础上,根据罚函数法提出了相应的接触问题处理方法,并以一对弧齿锥齿轮为例进行了分析和讨论,验证了向量式有限元法的计算精度,以期为其在工程中的应用和推广奠定基础。

1 基本理论及公式推导

1.1 向量式有限元法的基本理论

向量式有限元方法将结构离散成为有质量的质点和质点间无质量的单元,通过以下的质点运动方程来描述结构的运动过程

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{P} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_d \quad (1)$$

式中: m 为质点的质量; $\mathbf{x}$ 为质点的加速度向量; $\mathbf{P}$ 为节点的外力(包括等效外力); $\mathbf{f}$ 为节点的内力; $\mathbf{f}_d$ 为虚拟阻尼力, $\mathbf{f}_d = -\zeta m\dot{\mathbf{x}}$,其中阻尼因子 $\zeta > 0$ 。

利用中心差分公式将式(1)转化为差分形式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{-1} &= \mathbf{x}^0 - h \left(1 + \frac{1}{2} \zeta h \right) \dot{\mathbf{x}} + \frac{h^2}{2m} \mathbf{F} \quad (n=0) \\ \mathbf{x}^1 &= \mathbf{x}^0 + h \left(1 + \frac{1}{2} \zeta h \right) \dot{\mathbf{x}} + \frac{h^2}{2m} \mathbf{F} \quad (n=0) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= C_1 \frac{h^2}{m} \mathbf{F} + 2C_1 \mathbf{x}^n - C_2 \mathbf{x}^{n-1} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为节点位置向量,其上角标表示计算迭代步数; $\mathbf{x}^{-1}$ 为初始位置 $\mathbf{x}^0$ 之前的虚拟位置;

$$C_1 = \left(1 + \frac{1}{2} \zeta h \right)^{-1}; \quad C_2 = C_1 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta h \right);$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{f} + \mathbf{f}_d$$

通过纯变形求解可以计算内力,然后利用式(2)获得下一时刻的质点新位置。如此循环往复,以实现位移和内力的逐步迭代计算。

1.2 六面体单元的逆向运动

在向量式有限元中,采用逆向运动的方法扣除刚体位移,以获得单元节点的纯变形。刚体位移分为刚体平动位移和刚体转动位移,而刚体转动又可再细分为平面内刚体转动和平面外刚体转动。

采用逆向运动的方法从单元节点全位移中扣除刚体位移部分,以得到节点的纯变形位移量。鉴于六面体单元的一个单元面形成一个四节点平面单

元,因此推导过程参考四节点平面单元。选取任一四边形平面单元为参考,计算其逆向运动的旋转矩阵 $\mathbf{R}_1(\theta_1)$ 和 $\mathbf{R}_2(\theta_2)$,并将旋转矩阵分别作用在六面体单元的每一个节点上,即可完成六面体单元逆向运动过程的求解。 $\mathbf{R}_1$ 、 $\mathbf{R}_2$ 分别表示平面外旋转矩阵和平面内旋转矩阵, θ_1 、 θ_2 分别表示 2 次旋转的角度。

平面四边形单元的详细推导过程可以参考文献[16],此处不再赘述。

1.3 六面体单元的内力求解

单元变形满足虚功方程

$$\sum_i \delta \mathbf{q}_i^T \mathbf{f}_i = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3)$$

式中: $\mathbf{q}_i$ 是由逆向运动求得的单元纯变形向量; $\mathbf{f}_i$ 为局部坐标系下单元节点 i 的内力向量; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为单元的应变向量和应力向量。

引入传统有限元中常应变六面体单元的形函数,得到单元上任意点的纯变形向量

$$\mathbf{q}^* = \sum_i N_i \mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 7, 8) \quad (4)$$

式中: $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ 为单元形函数,其表达形式与传统有限元的相同[19]。

单元应变向量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}^* \quad (5)$$

式中: $\mathbf{B}$ 为六面体单元的应力应变关系矩阵。

单元应力向量

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{D}$ 为本构关系矩阵。

由单元的应力、应变可计算单元变形虚功

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}) dV = \delta (\mathbf{q}^*)^T \left\{ \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV + \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{q}^* \right\} \quad (7)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}_0$ 为单元的初始应力。

对比式(7)和式(3),可以得出节点内力向量的表达式

$$\mathbf{f}^* = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV + \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{q}^* \quad (8)$$

式(8)为内力向量在单元进行刚体转动后的表达式,需要将其变换至单元初始位置,即进行逆旋转变换

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}_1(-\theta_1) \mathbf{R}_2(-\theta_2) \mathbf{f}^* \quad (9)$$

$\mathbf{f}$ 即为六面体单元发生纯变形时所对应每个节点上的内力,它反作用于各个质点即为单元变形传给质点的内力。

1.4 步长选择

采用中央差分的显式时间积分法进行求解,可以避免隐式解法带来的迭代和收敛问题,但是对时

间步长必须进行控制。中央差分是条件稳定的计算方法,步长 h 需要小于某个临界步长 h_c ,才能使计算累积误差保持在允许的范围之内,即收敛至准确结果。

临界步长 $h_c \approx 2l(\rho/E)^{1/2}$,其中 ρ 为材料的密度, l 为单元的长度, E 为材料的弹性模量。一般选择步长 $h \leq 2l(\rho/E)^{1/2}$ 才能使计算收敛[10]。

1.5 计算流程

根据公式推导过程,采用 C++ 语言在 Visual Studio 平台实现程序编写和运行。

在向量式有限元分析程序中,本构关系和碰撞接触的处理均可作为单独的计算模块接入。具体求解过程为:在求解质点的运动方程获得节点位移后,由逆向运动求解单元纯变形并获得单元和节点内力,然后进行接触判断并引入接触力,最后更新节点的运动状态和受力状态,重新代入运动方程,实现循环求解。

2 接触算法

接触问题是工程领域和数值计算领域中普遍遇到的问题,在齿轮啮合分析中更是影响齿轮啮合性能计算的关键,而接触问题的核心是接触搜索算法。随着数值计算的发展,各种接触算法大量涌现,常用的有主从面算法、单曲面算法、内外算法、位码算法、小球算法等;许多学者对接触算法进行了改进和完善[20]。接触搜索过程分为全局搜索和局部搜索,本文的全局搜索采用主从面算法,而局部搜索采用内外算法。

2.1 全局搜索

通过全局搜索,可以快速确定主从面最有可能接触的单元和节点信息,为局部搜索做准备。尽管主从面算法存在诸多不足,但目前仍然是应用最广泛的全局搜索算法之一,并被广泛应用于有限元软件和工程计算中。该算法最早由 Hallquist 等人提出[21],需要指定 2 个互相接触的面,分别称为主面和从面,主面上的节点(主节点)可以穿透从面,而从面上的节点则不可以穿透主面。主从面算法主要分为 3 个步骤:首先针对每一个从节点找出最近的主节点,然后找出离从节点最近的包含主节点的主单元面,最后判定该从节点与主单元面的关系。

在齿轮接触问题中,接触面之间能够传递的接触压力大小不受限制,当接触面的压力变为负值或零时,表示 2 个接触面发生分离,且齿面接触变形较小,接触行为单一重复,因而适合采用主从面算法。

2.2 局部搜索

局部搜索主要用来判定从节点与主单元面的关系,并通过贯入量的求解得到接触力分布。

内外算法最早由 Wang 等人提出^[22],首先需要计算从节点 I 的法向量

$$\mathbf{n} = \frac{\sum_a \mathbf{n}_a}{|\sum_a \mathbf{n}_a|}; \quad \mathbf{n}_a = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \quad (10)$$

式中:从节点 I 在单元面 E 上的法向量 $\mathbf{n}_a$ 通过从面单元的边向量 $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 求得,详细推导过程可参考文献[22]。

根据从节点 I 沿法向量 $\mathbf{n}$ 在单元面 E 上的投影点 p ,来判断 I 在 E 的内或外,如图 1 所示。

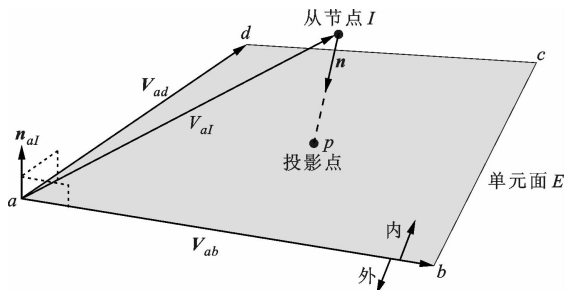


图1 从节点 I 在单元面 E 上的投影

对于每一条边,判定节点在单元内或外的方法如下:

以边 ab 为例,计算

$$\mathbf{n}_{aI} = \mathbf{V}_{ab} \times \mathbf{V}_{aI} \quad (11)$$

$$d_a = \mathbf{n}_{aI} \cdot \mathbf{n} \quad (12)$$

如果 $d_a \leq 0$,则节点 I 在边 ab 内部,反之则在外部。循环判断 4 条边,即可确定节点 I 是否在单元面 E 的内部。

投影点 p 的位置坐标可由形函数求得

$$\mathbf{p} = \sum_a \Phi_a \mathbf{x}_a \quad (\alpha = a, b, c, d) \quad (13)$$

式中: Φ_a 表示节点 α 处的形函数; $\mathbf{x}_a$ 为节点 α 的位置向量。形函数可以近似由下式求得

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= d_2 d_3 / d; & \Phi_2 &= d_3 d_4 / d \\ \Phi_3 &= d_1 d_4 / d; & \Phi_4 &= d_1 d_2 / d \\ d &= (d_1 + d_2)(d_3 + d_4) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 由式(12)计算得到。

贯入量可由下式求得

$$g = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{x}_I) \quad (15)$$

$g > 0$ 表示间隙, $g = 0$ 表示节点恰好在单元面上, $g < 0$ 发生贯入,此时节点 I 受到的法向接触力

$$\mathbf{F}_I = k g \mathbf{n} \quad (16)$$

式中: k 为接触刚度,可以使用 10~100 倍的杨氏模

量值^[23],具体数值需要通过实验测试得到。

然后,根据力平衡方程,可以反求主面单元上 4 个节点分配到的法向力。

3 弧齿锥齿轮模型的建立

由于许多研究,如文献[10,16-17]等,已对向量式有限元法在平面单元和四面体单元中进行了算例验证,证明了此方法和计算结果的正确性,而本文只是依其基本原理扩展至六面体单元,因此不再进行算例验证,直接进行齿轮模型的讨论和分析。

3.1 齿轮基本参数及点值描述

以一对弧齿锥齿轮为例进行仿真计算,齿轮的基本参数如下:小、大轮齿数分别为 27、74,模数为 3.85 mm,压力角为 20° ,轴交角为 90° ,螺旋角为 30° ,齿宽为 40 mm,小轮为左旋,大轮为右旋。

对模型进行静态啮合分析,取轻载工况条件。由于齿轮重合度较小,因此截取 3 对轮齿模型进行分析。根据文献[24]中的方法编写齿轮离散点及网格,取齿轮中间齿对啮合位置进行装配。

3.2 初始条件及边界条件设置

根据中央差分公式(式(2)),定义初始时刻 t^0 各节点的位置坐标,初始速度、初始接触法向力和单元内力均为 0,由此可以计算得到虚拟的 t^{-1} 时刻各节点的运动和受力状态,从而进行迭代计算。设定计算时长为 0.002 s,根据 1.4 节中对迭代步长的讨论,取迭代步长 $h = 2 \times 10^{-8}$ s。

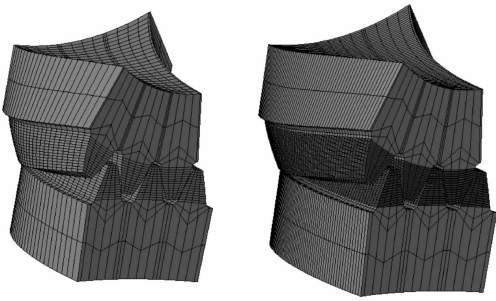
此外,设置材料属性(大、小轮相同):弹性模量为 206 GPa,泊松比为 0.3,密度为 7 800 kg/m³。施加大轮载荷 500 N·m。采用向量式有限元法分析静力问题,需要先经过动力学分析,收敛得到稳态解,因此为了提高计算效率,需要选择合适的阻尼因子,本文算例取阻尼因子 $\zeta = 12\ 000$ 。

4 算例结果及分析

针对图 2 所示的弧齿锥齿轮算例,分别采用向量式有限元法和传统有限元方法(ABAQUS 商业软件)进行分析,并将计算结果进行比对,以验证向量式有限元计算结果的准确性。

需要指出的是,在传统有限元计算中,计算结果对网格密度的敏感性较高,因此需要对网格进行加密,分析得到的结果才是可靠的。2 种计算方法采用的网格如图 2 所示,其网格单元数和节点数对比见表 1。

对于向量式有限元法来说,采用相对粗糙的网



(a)向量式有限元网格 (b)ABAQUS 加密网格
图 2 齿轮副的网格模型

格划分也可以得到较为精确的计算结果,这是与传统有限元法不同的。这在很大程度上是由于两者的本质不同:向量式有限元法直接采用牛顿力学定律(强约束),而传统有限元法则是根据能量守恒(弱约束);向量式有限元法的求解过程是采用系统运动方程,而传统有限元法则是采用平衡方程^[10,25-26]。

表 1 向量式有限元法和 ABAQUS 采用的
网格单元数和节点数对比

方法	单元数	节点数
向量式有限元	10 944	14 850
ABAQUS	62 304	80 640

对于本算例来说,有 2 对齿面发生了接触,ABAQUS 得到的应力云图如图 3 所示。

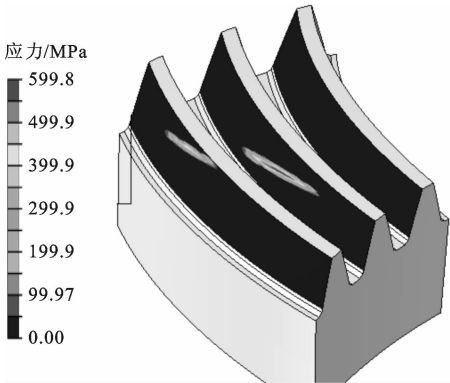


图 3 ABAQUS 得到的应力云图

4.1 接触力对比

后面均以大轮为例进行分析和讨论。通过向量式有限元法分别求得 2 对接触面上的接触力并求和,得到总接触力变化曲线,如图 4 所示。

当向量式有限元法计算收敛时,得到的接触力值为 4 682 N,而有限元法的计算结果为 4 938 N,两者仅相差 5.2%,可以证明向量式有限元法计算结果的准确性。两者之间的误差主要来源于网格划分和接触算法的不同,但误差在合理范围内。

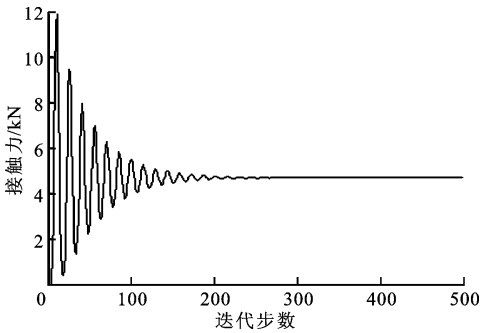


图 4 向量式有限元法求解的总接触力曲线

4.2 接触应力及印痕对比

在计算结果稳定收敛之后,对于最大应力值,向量式有限元法的为 622.7 MPa,有限元法的为 599.8 MPa,两者相差 22.9 MPa,以有限元法的计算结果为基准,则相对误差为 3.82%,在计算允许的合理范围之内。两者之间的误差主要来源于不同的网格划分和单元刚度,以及应力计算方法的差异。

为了方便对比,根据应力计算结果及坐标点位置,将 2 种方法的计算结果投影到旋转投影面上(具体方法参见文献[27]),分别绘制 2 对啮合齿面的应力云图,如图 5、图 6 所示。

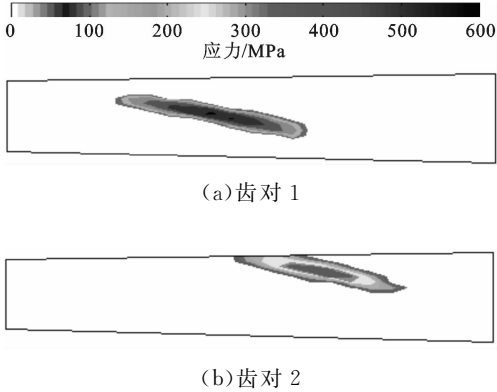


图 5 向量式有限元法的旋转投影面应力云图

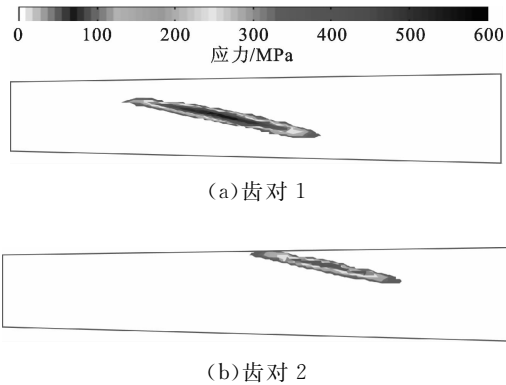


图 6 ABAQUS 的旋转投影面应力云图

由图 5 和图 6 可以看出,向量式有限元法和

ABAQUS 计算得到的齿面印痕形状相似,大小相近,应力分布情况基本一致,具有较高的一致性;由于2种方法采用的网格密度不同,ABAQUS 的印痕边界较为平滑,不同色带表示的应力区域之间过渡也较为平缓,而向量式有限元法得到的印痕图像则相对粗糙。

5 结 语

本文在已有研究的基础上推导了向量式有限元八节点六面体单元的表达式,并依据接触算法实现了一对齿轮副模型的分析 and 求解,拓展了向量式有限元法的单元库和应用范围。将向量式有限元法与传统有限元法的计算结果进行了对比,结果表明:两者计算得到的接触力、接触应力、齿面印痕都具有较高的一致性;向量式有限元法在网格密度较低的情况下也可以得到较为准确合理的计算结果。本文还验证了向量式有限元法在齿轮啮合分析中的计算精度。此项研究可望为将向量式有限元法应用于高速动态、轮齿断裂、胶合变形等复杂非线性问题的求解提供理论依据。

参考文献:

- [1] 林何,王三民,董金城.多激励下某直升机传动系统动载特性[J].航空动力学报,2015,30(1):219-227.
LIN He, WANG Sanmin, DONG Jincheng. Dynamic characteristics under various excitations for a helicopter transmission system [J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(1): 219-227.
- [2] 方宗德,刘涛,邓效忠.基于传动误差设计的弧齿锥齿轮啮合分析[J].航空学报,2002,23(3):226-230.
FANG Zongde, LIU Tao, DENG Xiaozhong. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on the design of transmission error [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2002, 23(3): 226-230.
- [3] JIANG Jinke, FANG Zongde. Design and analysis of modified cylindrical gears with a higher-order transmission error [J]. Mechanism & Machine Theory, 2015, 88: 141-152.
- [4] 唐进元,蒲太平.基于有限元法的螺旋锥齿轮啮合刚度计算[J].机械工程学报,2011,47(11):23-29.
TANG Jinyuan, PU Taiping. Spiral bevel gear meshing stiffness calculations based on the finite element method [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11): 23-29.
- [5] TANG Jinyuan, LIU Yanping. Loaded multi-tooth contact analysis and calculation for contact stress of face-gear drive with spur involute pinion [J]. Journal of Central South University, 2013, 20(2): 354-362.
- [6] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness [J]. European Journal of Mechanics: A Solids, 2009, 28(3): 461-468.
- [7] PANDYA Y, PAREY A. Failure path based modified gear mesh stiffness for spur gear pair with tooth root crack [J]. Engineering Failure Analysis, 2013, 27: 286-296.
- [8] FUENTES A, RUIZ-ORZAEZ R, GONZALEZ-PEREZ I. Computerized design, simulation of meshing, and finite element analysis of two types of geometry of curvilinear cylindrical gears [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2014, 272(2): 321-339.
- [9] TING E C, WANG Y K. Fundamentals of a vector form intrinsic finite element: part 1 Basic procedure and a plane frame element [J]. Journal of Mechanics, 2004, 20(2): 113-122.
- [10] 丁承先,段元锋,吴东岳.向量式结构力学[M].北京:科学出版社,2012:1-168.
- [11] 喻莹.基于有限质点法的空间钢结构连续倒塌破坏研究[D].杭州:浙江大学,2010:12-177.
- [12] DUAN Y F, HE K, ZHANG H M, et al. Entire-process simulation of earthquake-induced collapse of a mockup cable-stayed bridge by vector form intrinsic finite element (VFIFE) method [J]. Advances in Structural Engineering, 2014, 17(3): 347-360.
- [13] 倪秋斌,段元锋,高博青.采用向量式有限元的斜拉索振动控制仿真[J].振动工程学报,2014,27(2):238-245.
NI Qiubin, DUAN Yuanfeng, GAO Boqing. Vector form intrinsic finite element (VFIFE) based simulation on vibration control of stay cables [J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(2): 238-245.
- [14] WU T Y, WANG C Y, CHUANG C C, et al. Motion analysis of 3D membrane structures by a vector form intrinsic finite element [J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2007, 30(6): 961-976.
- [15] WU T Y, TING E C. Large deflection analysis of 3D membrane structures by a 4-node quadrilateral intrinsic element [J]. Thin-Walled Structures, 2008, 46(3): 261-275.
- [16] 王震,赵阳,杨学林.基于向量式有限元的实体结构非线性行为分析[J].建筑结构学报,2015,36(3):133-140.
WANG Zhen, ZHAO Yang, YANG Xuelin. Nonlin-

- ear behavior analysis of entity structure based on vector form intrinsic finite element [J]. Journal of Building Structures, 2015, 36(3): 133-140.
- [17] 王震, 赵阳, 杨学林. 薄壳结构碰撞、断裂和穿透行为的向量式有限元分析 [J]. 建筑结构学报, 2016, 37(6): 53-59.
- WANG Zhen, ZHAO Yang, YANG Xuelin. Collision-contact, crack-fracture and penetration behavior analysis of thin-shell structures based on vector form intrinsic finite element [J]. Journal of Building Structures, 2016, 37(6): 53-59.
- [18] BLACKER T. Automated conformal hexahedral meshing constraints, challenges and opportunities [J]. Engineering with Computers, 2001, 17(3): 201-210.
- [19] 江见鲸, 何放龙, 何益斌, 等. 有限元法及其应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006: 51-53.
- [20] 钟阳, 钟志华, 李光耀, 等. 机械系统接触碰撞界面显式计算的算法综述 [J]. 机械工程学报, 2011, 47(13): 44-58.
- ZHONG Yang, ZHONG Zhihua, LI Guangyao, et al. Review on contact algorithms calculating the contact-impact interface in mechanical system with explicit FEM [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(13): 44-58.
- [21] HALLQUIST J O, GOUDREAU G L, BENSON D J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1985, 51(1/2/3): 107-137.
- [22] WANG S P, NAKAMACHI E. The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(19): 3665-3685.
- [23] 申莹莹. 基于向量式分析的轮轨滚动接触模拟 [D]. 成都: 西南交通大学, 2012: 33-34.
- [24] 侯祥颖, 方宗德, 邓效忠, 等. 弧齿锥齿轮有限元建模与接触分析 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2015, 36(6): 826-830.
- HOU Xiangying, FANG Zongde, DENG Xiaozhong, et al. Contact analysis of spiral bevel gears based on finite element model [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2015, 36(6): 826-830.
- [25] LEE H H, CHANG P Y. Development on a new plate element of vector form intrinsic finite element [C]// AIP Conference Proceedings: Vol. 1233. New York, USA: AIP Publishing, 2010: 1512-1517.
- [26] WU T Y, LEE J J, TING E C. Motion analysis of structures (MAS) for flexible multibody systems: planar motion of solids [J]. Multibody System Dynamics, 2008, 20(3): 197-221.
- [27] 侯祥颖, 方宗德. 考虑边缘接触的弧齿锥齿轮有限元接触分析 [J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(11): 69-74.
- HOU Xiangying, FANG Zongde. Tooth contact analysis of spiral bevel gears considering edge contact with finite element method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(11): 69-74.
- (编辑 葛赵青)
-
- (上接第84页)
- [18] 林超, 魏沛堂, 朱才朝. 平行轴变齿厚斜齿轮传动接触分析 [J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2012, 35(12): 1-6.
- LIN Chao, WEI Peitang, ZHU Caichao. Tooth contact analysis of helical beveloid gear with parallel axis [J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2012, 35(12): 1-6.
- [19] 沈云波, 方宗德, 赵宁, 等. 斜齿面齿轮几何传动误差的设计 [J]. 航空动力学报, 2008, 23(11): 2147-2152.
- SHEN Yunbo, FANG Zongde, ZHAO Ning, et al. Design of geometry transmission errors of helical face-gear drive [J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(11): 2147-2152.
- [20] 吴序堂. 齿轮啮合原理 [M]. 2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2009: 1-11.
- [21] 吕辉, 于德介, 谢展, 等. 基于响应面法的汽车盘式制动器稳定性优化设计 [J]. 机械工程学报, 2013, 49(9): 55-60.
- LÜ Hui, YU Dejie, XIE Zhan, et al. Optimization of vehicle disc brakes stability based on response surface method [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(9): 55-60.
- [22] 刘文卿. 实验设计 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 59-61.
- (编辑 葛赵青)