

DOI: 10.7652/xjtuxb201705017

Least-Squares 及 Galerkin 谱元方法求解 环形区域内的泊松方程

王亚洲, 秦国良

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为研究基于 Least-Squares 变分及 Galerkin 变分两种形式的谱元方法的求解特性, 推导了极坐标系中采用两种变分方法求解环形区域内 Poisson 方程时对应的弱解形式, 采用 Chebyshev 多项式构造插值基函数进行空间离散, 得到两种谱元方法对应的代数方程组, 由此分析了系数矩阵结构的特点。数值计算结果显示: Least-Squares 谱元方法为实现方程的降阶而引入新的求解变量, 使得代数方程组形式更为复杂, 但边界条件的处理比 Galerkin 谱元方法更为简单; 两种谱元方法均能求解极坐标系中的 Poisson 方程且能获得高精度的数值解, 二者绝对误差分布基本一致; 固定单元内的插值阶数时, 增加单元数可减小数值误差, 且表现出代数精度的特点, 误差降低速度较慢, 而固定单元数时, 在一定范围内数值误差随插值阶数的增加而减小的速度更快, 表现出谱精度的特点; 单元内插值阶数较高时, 代数方程组系数矩阵的条件数急剧增多, 方程组呈现病态, 数值误差增大, 这一特点限制了单元内插值阶数的取值。研究内容对深入了解两种谱元方法在极坐标系中求解 Poisson 方程时的特点、进一步采用相关分裂算法求解实际流动问题具有参考价值。

关键词: Least-Squares 变分; Galerkin 变分; 谱元方法; Poisson 方程; 极坐标系

中图分类号: O35 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)05-0121-07

Least-Squares and Galerkin Spectral Element Methods for Poisson Equation in Annular Regions

WANG Yazhou, QIN Guoliang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To investigate the characteristics of spectral element methods based on Least-Squares and Galerkin variation, two different kinds of weak formulation for Poisson equation in the polar coordinate are presented. After discretization by the Chebyshev basis function, the corresponding algebraic equations are obtained, and the structures of the coefficient matrixes are analyzed. It is clear that the algebraic equations of Least-Squares spectral element method are more complex than Galerkin spectral element method due to the introduced auxiliary variables for modifying second-order partial differential equations into first-order system. However, the boundary conditions can be more easily dealt with via Least-Squares spectral element method. Numerical results show that both spectral element methods can get high-order numerical accuracy and the numerical errors keep almost consistent. When the interpolation order in each element is fixed, the numerical errors slowly decrease by refining the elements, and the algebraic accuracy can be

收稿日期: 2016-09-18。 作者简介: 王亚洲(1993—),男,博士生;秦国良(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB026004)。

网络出版时间: 2017-02-23

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20170223.1103.002.html>

obtained. A faster decay of the numerical errors can be observed by heightening the interpolation order to demonstrate the spectral accuracy property when the total elements are fixed. However, if the interpolation order gets a larger value, the numerical errors increase unexpectedly for the fast increasing condition number of the algebraic equations. This research may facilitate understanding these two different spectral element methods for the Poisson equation in polar coordinate, and further solving flow problems with splitting algorithm.

Keywords: Least-Squares variation; Galerkin variation; spectral element method; Poisson equation; polar coordinate

泊松方程为二阶偏微分方程,广泛应用于电学、磁学、流体力学等领域。在计算流体力学中,时间分裂法^[1]及方向分裂法^[2-3]普遍应用于求解 Navier-Stokes 方程,而这些方法的中间步骤均需要求解泊松方程,因而研究目前常用的不同高精度数值方法在求解泊松方程时的求解特性,对进一步采用相关分裂算法求解 Navier-Stokes 方程具有重要意义。

目前,关于求解泊松方程的数值方法主要包括有差分法、有限元法、谱方法^[4]及谱元方法^[5]等。谱方法及谱元方法为高精度的数值方法,其在计算流体力学中的应用越来越受到国内外学者的关注。Boyd 等比较了谱方法中采用 7 种不同插值方法在极坐标系下求解泊松方程时各自的优缺点^[6]。1984 年,Paterna 首次提出并应用谱元方法求解流动问题时^[7]也涉及到采用谱元方法求解压力泊松方程。

应用谱元方法求解偏微分方程时需要通过变分方法得到原问题的弱解形式,应用较为广泛的方法有 Galerkin 变分法和 Least-Squares 变分法。Galerkin 方法在求解高速流动或对流项占优流动问题时会出现数值振荡^[8],算法稳定性较差。为解决这一问题,众多学者通过引入迎风格式、人工黏性等一系列稳定化谱元方法来消除数值震荡,虽然取得了一定的效果,但同时也使变分形式复杂化。Least-Squares 变分法具有更好的稳定性,无需采用人工黏性等方法,且能够捕捉计算中的数值间断。此外,在应用 Least-Squares 变分方法时第二类边界条件可以改写为第一类边界条件,这使得边界条件的处理更加简便,但该变分法在求解一阶偏微分方程时才能保证解的唯一性,对于类似泊松方程的二阶偏微分方程,需要引入额外的变量将二阶偏微分方程化为一阶,这样做会增加计算量,也是该方法的缺点之一。文献[9]在 Navier-Stokes 方程中引入涡量这一额外变量,将 Navier-Stokes 方程化为一阶偏微分方程并成功采用 Least-Squares 变分方法进行

求解。

文献[5]研究结果证明,Galerkin 谱元方法求解极坐标系下的泊松方程能够获得高精度的数值解,并获得谱精度。文献[10]不同于文献[5]的是,在周向选择了 Fourier 插值基函数,同样获得了高精度的数值解,且具有指数收敛特性。但是,从文献[5]和[10]给出的收敛特性曲线中可以看出,当单元内插值阶数较高时,由于计算机累积误差的原因导致无法再通过提高单元内的插值阶数来获得更高的求解精度。这一结论是否与所选择的插值基函数有关,除计算机累积误差的因素外,是否仍存在其他的影响计算精度进一步提高的原因,这些问题均少有研究。

本文分别采用 Least-Squares 谱元方法及 Galerkin 谱元方法,在极坐标系中求解环形区域内的泊松方程,推导了极坐标系下采用 Chebyshev 插值多项式实现这两种谱元方法的求解过程,并从求解精度、数值误差收敛性及代数方程组的条件数变化等方面比较了求解特性。该研究工作有助于进一步了解这两种谱元方法在极坐标系中求解 Poisson 方程时的求解特性,对采用时间分裂或方向分裂算法求解实际流动问题具有指导意义。

1 极坐标系下的泊松方程

极坐标系中环形区域内的泊松方程及相应边界条件可写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) &= f(r, \theta), \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma_1} &= g_1(\theta) \\ \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{\Gamma_2} &= g_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r_a \leq r \leq r_b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ 。若 $r_a = 0$,则圆心为奇点。关于奇点的处理可参考文献[5],本文仅考虑环形区域。

2 数值方法

2.1 变分形式

(1)Least-Squares 变分。由于泊松方程为二阶偏微分方程,若采用 Least-Squares 变分,则应先将原方程转变为一阶偏微分方程。引入辅助变量 $P = \partial u / \partial r$, $Q = \partial u / (r \partial \theta)$, 并代入式(1)可得如下偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}P + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= -f \\ \frac{\partial u}{\partial r} - P &= 0 \\ \frac{\partial u}{r \partial \theta} - Q &= 0 \\ u|_{r_1} &= g_1(\theta) \\ P|_{r_2} &= g_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

需要说明的是,式(1)中的第二类边界条件由于辅助变量的引入变为了第一类边界条件,更加容易处理。

式(2)的 Least-Squares 函数可写成如下形式

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}; \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{L}(\mathbf{U}) - \mathbf{F})^2 d\Omega \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{\partial}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{r \partial \theta} & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ P \\ Q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则式(2)的 Least-Squares 变分问题为:求 $\mathbf{U} \in X = \{(u, P, Q) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\}$ 使得下式恒成立

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}; \mathbf{F}) \leq \mathcal{R}(\mathbf{V}; \mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{V} = [\hat{u} \ \hat{P} \ \hat{Q}]^T \in X \quad (4)$$

式中: $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 分别为试探函数和检验函数; X 为容许空间。为求解变分问题(4),采用 Euler-Lagrange 方法,即

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{R}(\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{V}; \mathbf{F}) = \int_{\Omega} \mathbf{L}^T(\mathbf{V})(\mathbf{L}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}) d\Omega = 0 \quad (5)$$

则满足式(5)的解即为变分问题(4)的解。该变分问题可写成求 $\mathbf{U} \in X$, 使得下式恒成立

$$\int_{\Omega} \mathbf{L}^T(\mathbf{V})\mathbf{L}(\mathbf{U}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{L}^T(\mathbf{V})\mathbf{F} d\Omega \quad (6)$$

式中: $\forall \mathbf{V} = [\hat{u} \ \hat{P} \ \hat{Q}]^T \in X$ 。

(2)Galerkin 变分。由 Galerkin 变分法则可

知,式(1)的变分问题为:求 $u \in M = \{u \in H^1, u|_{r_1} = g_1\}$, 使得下式恒成立

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} r dr d\theta + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} dr d\theta = \int_{\Omega} f v r dr d\theta + \int_{r_2} g_2 v dS \quad (7)$$

式中: v 为式(7)的检验函数, $v \in N = \{w \in H_0^1, u|_{r_1} = 0\}$ 。本文称空间 M 和 N 分别为试探函数空间和检验函数空间。

相比于 Least-Squares 变分方法, Galerkin 变分法求解泊松方程时无需进行方程降阶,没有引入新的变量,故而形式更为简洁,且变量数仅为 Least-Squares 变量数的 1/3。Galerkin 变分在处理第二类边界条件时需要额外计算边界的线积分; Least-Squares 变分则将第二类边界条件转化为第一类边界条件,这样处理起来更为简单。

2.2 谱元离散

将环形计算区域 Ω 划分为 $E = E_r \times E_{\theta}$ 个互不重叠的单元(E_r 表示沿 r 方向的单元数, E_{θ} 表示沿 θ 方向的单元数), 即 $\Omega = \bigcup_{i=1}^E \Omega_i$, 且 $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ($i \neq j$)。采用如下映射关系

$$\xi = 2 \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i} - 1 \quad (8a)$$

$$\eta = 2 \frac{r(\theta - \theta_i)}{r(\theta_{i+1} - \theta_i)} - 1 \quad (8b)$$

将第 i 个扇环形单元转化到标准正方形单元内。在标准单元内分别采用 N_r^i 和 N_{θ}^i 阶 Chebyshev 多项式的极值点和端点, 即

$$\xi_j^i = -\cos \frac{j\pi}{N_r^i}, \quad j = 0, 1, \dots, N_r^i \quad (9a)$$

$$\eta_j^i = -\cos \frac{j\pi}{N_{\theta}^i}, \quad j = 0, 1, \dots, N_{\theta}^i \quad (9b)$$

作为插值点, 形成谱元方法的张量内积网格。图 1 给出了环形区域的网格划分结果及从总体坐标到标准坐标的映射关系示意图。图中取 E_r 为 2, E_{θ} 为 15, 总单元数为 30。插值阶数取为 $N_r^i = N_{\theta}^i = 4$, 总节点数为 540。为方便下文表述, 总节点数用 N_{nod} 表示。

单元内插值基函数可写成如下形式

$$h_j^i(\xi) = \frac{2}{N_r^i} \sum_{m=0}^{N_r^i} \frac{1}{c_j c_m} T_m(\xi_j^i) T_m(\xi), \quad j = 0, 1, \dots, N_r^i \quad (10a)$$

$$h_k^i(\eta) = \frac{2}{N_{\theta}^i} \sum_{m=0}^{N_{\theta}^i} \frac{1}{c_k c_m} T_m(\eta_k^i) T_m(\eta), \quad k = 0, 1, \dots, N_{\theta}^i \quad (10b)$$

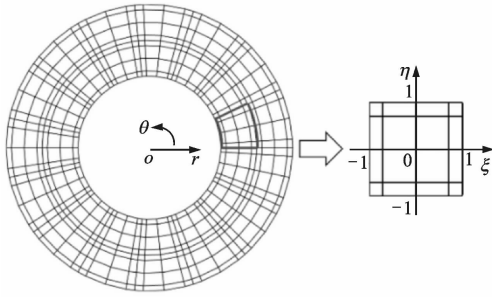


图 1 环形区域内网格划分结果及映射关系

式中: T_m 为 m 阶 Chebyshev 多项式; c_m 满足

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0, N_r^i (\text{或 } N_\theta^i) \\ 1, & m \neq 0, N_r^i (\text{或 } N_\theta^i) \end{cases} \quad (11)$$

容易证明,在单元内插值基函数满足 $h_j^i(\xi_p) = \delta_{jp}$, $h_k^i(\eta_q) = \delta_{kq}$,而在单元外取值为 0。

对于 Least-Squares 变分问题(6),试探函数的 3 个变量和检验函数的 3 个变量以及右端项可采用式(10)进行离散,统一表示为

$$Y^i(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N_r^i} \sum_{k=0}^{N_\theta^i} Y_{jk}^i h_j^i(\xi) h_k^i(\eta) \quad (12)$$

式中: Y^i 代表离散量 u^i 、 P^i 、 Q^i 、 $\hat{u}^i$ 、 $\hat{P}^i$ 、 $\hat{Q}^i$ 及 f^i 。

将式(12)代入式(6),考虑到检验函数取值的任意性,可得由 Least-Squares 谱元方法生成的第 i 个单元内的代数方程组的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{i11} & \mathbf{K}^{i12} & \mathbf{K}^{i13} \\ \mathbf{K}^{i21} & \mathbf{K}^{i22} & \mathbf{K}^{i23} \\ \mathbf{K}^{i31} & \mathbf{K}^{i32} & \mathbf{K}^{i33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^i \\ \mathbf{P}^i \\ \mathbf{Q}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{i11} & \mathbf{C}^{i12} & \mathbf{C}^{i13} \\ \mathbf{C}^{i21} & \mathbf{C}^{i22} & \mathbf{C}^{i23} \\ \mathbf{C}^{i31} & \mathbf{C}^{i32} & \mathbf{C}^{i33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{f}^i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{C}$ 均为 $N_d \times N_d$ (N_d 表示单元内的插值节点数)分块矩阵; $\mathbf{U}^i$ 、 $\mathbf{P}^i$ 、 $\mathbf{Q}^i$ 、 $\mathbf{f}^i$ 和 $\mathbf{0}$ 的大小均为 $N_d \times 1$ 的分块矩阵。具体元素表示如下

$$\begin{aligned} K_{jpkq}^{i11} &= R_{111} S_a + R_{00_1} S_c \\ K_{jpkq}^{i12} &= -R_{011} S_a \\ K_{jpkq}^{i13} &= -R_a S_{b2} \\ K_{jpkq}^{i21} &= -R_{101} S_a \\ K_{jpkq}^{i22} &= (R_{111} + R_{b1} + R_{b2} + R_{00_1} + R_{001}) S_a \\ K_{jpkq}^{i23} &= (R_{b2} + R_{00_1}) S_{b1} \\ K_{jpkq}^{i31} &= -R_a S_{b1} \\ K_{jpkq}^{i32} &= (R_{b1} + R_{00_1}) S_{b2} \\ K_{jpkq}^{i33} &= R_{00_1} S_c + R_{001} S_a \\ C_{jpkq}^{i11} &= C_{jpkq}^{i23} = C_{jpkq}^{i32} = 0 \\ C_{jpkq}^{i12} &= -K_{jpkq}^{i12} \\ C_{jpkq}^{i13} &= C_{jpkq}^{i31} = -K_{jpkq}^{i13} \\ C_{jpkq}^{i21} &= (R_{011} + R_a) S_a \end{aligned}$$

$$C_{jpkq}^{i22} = C_{jpkq}^{i33} = -R_{001} S_a$$

分块矩阵各元素的表达式见表 1。每个分块矩阵的元素下标 $jpkq$ 的变化原则为:按行 pq 保持不变, jk 与对应的待求量下标保持一致;按列 jk 保持不变, pq 与待求量下标保持一致。待求量 $\mathbf{U}^i$ 、 $\mathbf{P}^i$ 和 $\mathbf{Q}^i$ 及右端项 $\mathbf{f}^i$ 下标统一用 mn 表示,且先保持 m 不变, n 在其取值范围内优先增加,其中:涉及到的 $j, p, m = 0, \dots, N_r^i; k, q, n = 0, \dots, N_\theta^i$ 。表中积分均可由 Chebyshev 多项式的性质精确求出,具体求解方法可参考文献[11]。

对于 Galerkin 变分问题(7),同样采用式(12)对检验函数、试探函数及右端项进行离散,即将式(12)代入式(7)整理可得第 i 个单元内的代数方程组

$$\sum_{j=0}^{N_r^i} \sum_{k=0}^{N_\theta^i} u_{jk}^i (R_{111} S_a + R_{00_1} S_c) = \sum_{j=0}^{N_r^i} \sum_{k=0}^{N_\theta^i} f_{jk}^i R_{001} S_a \quad (14)$$

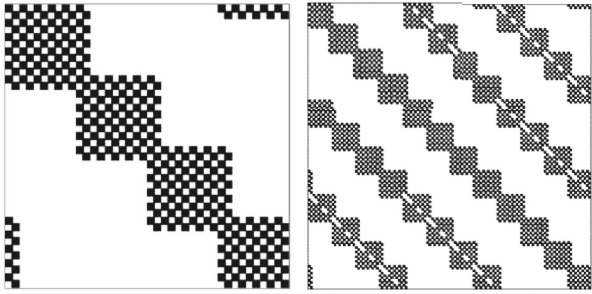
表 1 分块矩阵各元素的符号表达式

矩阵元素	表达式
R_a	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} h_j^i(\xi) h_p^i(\xi) dr$
R_{b1}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial h_j^i(\xi)}{\partial r} h_p^i(\xi) dr$
R_{b2}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} h_j^i(\xi) \frac{\partial h_p^i(\xi)}{\partial r} dr$
S_a	$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} h_k^i(\eta) h_q^i(\eta) d\theta$
S_{b1}	$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\partial h_k^i(\eta)}{\partial \theta} h_q^i(\eta) d\theta$
S_{b2}	$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} h_k^i(\eta) \frac{\partial h_q^i(\eta)}{\partial \theta} d\theta$
S_c	$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\partial h_k^i(\eta)}{\partial \theta} \frac{\partial h_q^i(\eta)}{\partial \theta} d\theta$
R_{111}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial h_j^i(\xi)}{\partial r} \frac{\partial h_p^i(\xi)}{\partial r} r dr$
R_{00_1}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} h_j^i(\xi) h_p^i(\xi) \frac{1}{r} dr$
R_{011}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} h_j^i(\xi) \frac{\partial h_p^i(\xi)}{\partial r} r dr$
R_{101}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\partial h_j^i(\xi)}{\partial r} h_p^i(\xi) r dr$
R_{001}	$\int_{r_i}^{r_{i+1}} h_j^i(\xi) h_p^i(\xi) r dr$

需要说明的是,式(14)中未考虑第二类边界条件,关于第二类边界条件的处理可参考文献[12]。

至此,得到了两种谱元方法在离散单元内的代

数方程组,通过有限元中组装单元矩阵的方法可得到总体矩阵,最终求得节点上的变量值。取 $E_r=2$, $E_\theta=4$,插值阶数 $N_r^i=N_\theta^i=5$,图 2 给出了两种谱元方法得到的总体代数方程组中系数矩阵结构示意图,图中色点代表矩阵中的非零元素,空白处表示零元素。



(a)Galerkin 谱元方法 (b)Least-Squares 谱元方法

图 2 代数方程组系数矩阵结构示意图

由图 2 可知,Galerkin 谱元方法在形式上更为简便,且并未引入新的求解变量。对于 Least-Squares 谱元方法,为使方程降阶而引入的变量无疑增加了计算量,但若引入的变量也是我们所关心的求解量,则该量的引入便有意义。例如,文献[9]中引入涡量实现 Navier-Stokes 方程降阶,在求解速度场的同时可求得涡量场这一反应流场特性的信息,这是 Galerkin 变分方法所不具有的特点。

3 数值算例及讨论

3.1 数值算例

算例 1 考虑如下解析解

$$u = \frac{\sin\theta}{r}, \quad 2 \leq r \leq 4; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (15)$$

边界条件仅给定第一类边界条件,即

$$\left. \begin{aligned} u|_{r=2} &= \frac{\sin\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u|_{r=4} &= \frac{\sin\theta}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

则式(1)中 $f=0$ 。

算例 2 考虑如下解析解

$$u = (1-r^2)rsin\theta, \quad 2 \leq r \leq 4; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (17)$$

边界 $r=2$ 时为第一类边界条件, $r=4$ 时为第二类边界条件,即

$$\left. \begin{aligned} u|_{r=2} &= -6\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=4} &= -47\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

在此解析解条件下,式(1)中 $f=8rsin\theta$ 。

本文采用均方根误差 L_2 和绝对误差 e_r 来考察两种谱元方法的求解结果。两种误差分别定义如下

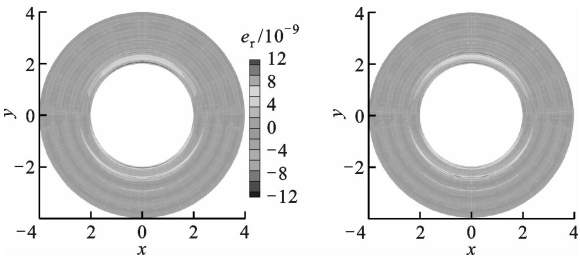
$$L_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i^{\text{exa}} - u_i^{\text{num}})^2 \right)^{1/2} \quad (19)$$

$$e_r = u_i^{\text{exa}} - u_i^{\text{num}} \quad (20)$$

式中:上角标“exa”表示精确解;“num”表示数值解。

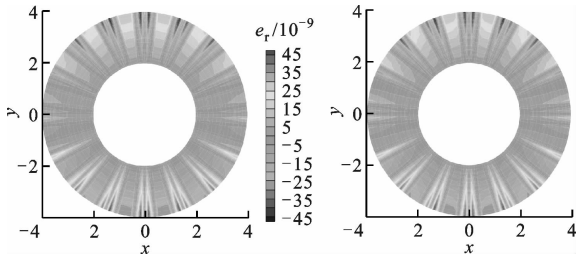
3.2 计算结果及讨论

3.2.1 计算精度比较 2 个算例中网格划分均取为 $E_r \times E_\theta = 4 \times 16$,插值阶数取为 $N_r = N_\theta = 5$,则总单元数为 64,总节点数 $N_{\text{nod}} = 1\,680$ 。图 3 和图 4 分别给出了算例 1 和算例 2 当采用 Galerkin 谱元方法及 Least-Squares 谱元方法求解时,在整个计算区域内所得绝对误差分布云图。为方便表达,云图在直角坐标系中给出;为方便比较,图 3a 和图 3b 云图采用相同的图例。图 4 亦如此。



(a)Galerkin 谱元方法 (b)Least-Squares 谱元方法

图 3 算例 1 计算区域内绝对误差分布



(a)Galerkin 谱元方法 (b)Least-Squares 谱元方法

图 4 算例 2 计算区域内绝对误差分布

从误差分布云图可知,本文求解的算例 1 和算例 2 的 Poisson 方程,在采用 Least-Squares 谱元方法及 Galerkin 谱元方法时均能获得高精度的数值解,且当网格划分相同时两种方法获得的绝对误差分布基本一致。

3.2.2 收敛性比较 谱方法精度的提高主要是通过提高插值阶数(称为 p -type 方法)实现的,而有限元方法精度的提高则主要是通过细化网格、增加单元数量(称为 h -type 方法)实现的。谱元方法结合了谱方法及有限元方法,在收敛性方面也同时具有谱方法及有限元方法的特点。下面比较 Least-

Squares 谱元方法及 Galerkin 谱元方法的收敛特性, 计算方案如下。

(1) 固定单元划分为 $E_r \times E_\theta = 2 \times 10$, 单元内的插值阶数由 2 开始逐渐增加, 考察误差 L_2 的变化情况, 研究 p -type 方法收敛的特性。

(2) 固定单元内插值阶数 $N_r = N_\theta = 2$, 单元划分由 $E_r \times E_\theta = 2 \times 10$ 开始逐渐增加, 考察误差 L_2 的变化情况, 研究 h -type 方法收敛的特性。

图 5 和图 6 分别给出了算例 1 和算例 2 的误差 L_2 特性曲线。

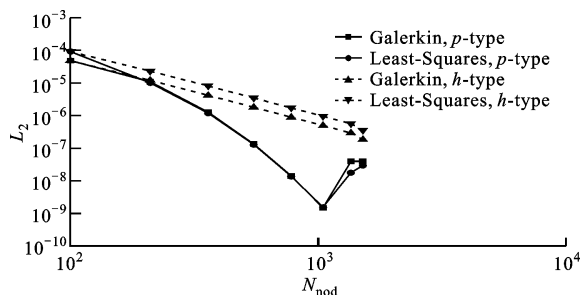


图 5 算例 1 的误差 L_2 特性曲线

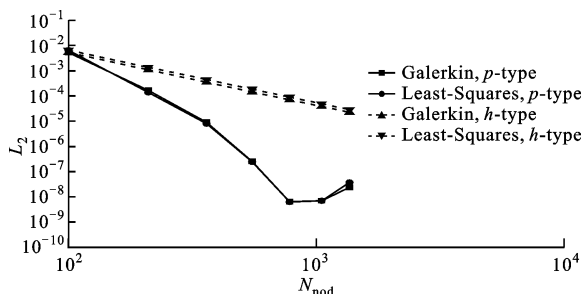


图 6 算例 2 的误差 L_2 特性曲线

由图中结果可知: 随计算节点数的增加, 两种谱元方法得到的 L_2 不断下降, 计算精度不断提高, 且两种谱元方法由 p -type 和 h -type 方法得到的误差曲线变化趋势一致; 在对数坐标系中, 当计算区域内网格节点数相同时, 一定的插值阶数范围内 h -type 方法误差随节点总数的增加近似线性下降, 表现出代数精度的特点。 p -type 方法相比 h -type 方法的误差下降速度更快, 表现出谱精度的特点, 当插值阶数较大时, h -type 方法的 L_2 持续下降, 而 p -type 方法的 L_2 计算结果反而有所增加, 具体原因在下面进行分析。

3.2.3 条件数比较 代数方程组系数矩阵的条件数反映了代数方程组求解的稳定性, 若系数矩阵条件数过大, 则称该方程组为病态方程组。病态方程组在求解过程中对解的敏感性较大, 求解结果的准确性仍存在问题。通过比较两种谱元方法在求解代

数方程组系数矩阵时的条件数, 来分析代数方程组的求解对数值计算产生的影响。计算方案与 3.2.2 节保持一致, 图 7 和图 8 分别给出了算例 1 和算例 2 的代数方程组系数矩阵条件数的计算结果。

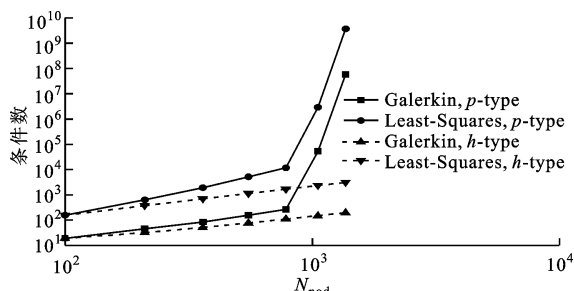


图 7 算例 1 条件数变化曲线

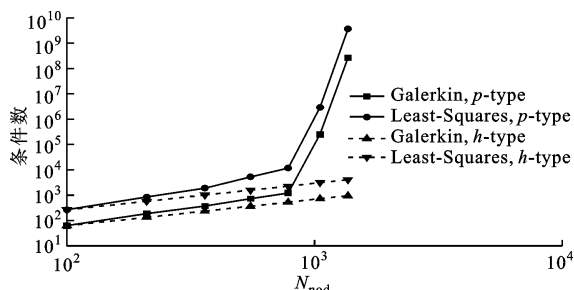


图 8 算例 2 条件数变化曲线

分析图中曲线可知: 在相同的单元数及插值阶数下, Least-Squares 谱元方法得到的代数方程组系数矩阵条件数大于 Galerkin 谱元方法; 在对数坐标系中, h -type 方法条件数增长与插值节点数成近似线性关系, 且增长较为缓慢; p -type 方法条件数仅在插值阶数较低时的增长与插值节点数成近似线性关系, 且增长率较 h -type 方法大; 当插值阶数较高时, p -type 方法条件数急剧增大, 方程组呈现严重的病态, 这就导致更高阶的插值多项式计算误差反而增大, 从而限制了插值阶数的选择。

文献[5, 10]中采用 Legendre 多项式和傅里叶多项式构造插值基函数, 当插值阶数过高时, 无法再通过提高单元内的插值阶数来获得更高的数值精度, 但并未出现当插值阶数进一步提高反而使得数值误差明显增大的现象, 而是随着插值阶数的提高, 误差变化趋于平缓。故而, 插值基函数的选择也是影响系数矩阵条件数变化的一个重要原因。采用 Legendre 多项式构造插值基函数可以改善矩阵条件数对 p -type 方法的限制。

4 结 论

本文通过求解环形区域内的 Poisson 方程, 分

析、比较了 Galerkin 谱元方法及 Least-Squares 谱元方法在极坐标系中应用时的求解精度、收敛性、代数方程组系数矩阵条件数等方面的不同特点,得到的主要结论如下:

(1)Least-Squares 谱元方法及 Galerkin 谱元方法均为高精度的数值方法,能够精确求解极坐标系下的 Poisson 方程,且当单元数及单元内的插值阶数相同时,两种方法得到的绝对误差非常接近;

(2)通过提高单元内的插值阶数或增加单元数均能提高两种谱元方法的计算精度,且增加单元数的方法能够获得代数精度,误差减小速度较慢,而提高插值阶数的方法能够获得谱精度,误差减小速度较快;

(3)当采用 Chebyshev 插值基函数时,若使用 p -type 方法提高计算精度,单元内插值阶数的提高受到代数方程组系数矩阵条件数的限制,系数矩阵条件数过大时高阶插值的数值误差反而有所增大,而采用 h -type 方法时,条件数随计算单元的增加近似线性增长,且增长缓慢,故计算误差持续减小。

本文研究有助于进一步了解采用 Galerkin 及 Least-Squares 这两种变分形式的谱元方法在极坐标系中的求解特性,同时能够为在极坐标系中采用时间分裂法或方向分裂法求解 Navier-Stokes 方程提供参考。

参考文献:

- [1] 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解二维不可压缩 Navier-Stokes 方程 [J]. 应用力学学报, 2000, 17(4): 20-25.
QIN Guoliang, XU Zhong. A spectral element method for incompressible Navier-Stokes equations [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(4): 20-25.
- [2] CHEN L, SHEN J, XU C. Spectral direction splitting schemes for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. East Asian Journal on Applied Mathematics, 2011, 1(3): 215-234.
- [3] GUERMOND J L, MINEV P D. A new class of massively parallel direction splitting for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2011, 200 (23/24): 2083-2093.
- [4] 麻剑锋, 沈新荣, 章本照, 等. 极坐标系下泊松方程的拟谱方法 [J]. 空气动力学学报, 2006, 24(2): 243-245.

MA Jianfeng, SHEN Xinrong, ZHANG Benzhaoh, et al. A new pseudo-spectral method for solving Poisson equation in polar coordinate system [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2006, 24(2): 243-245.

- [5] 梅欢, 曾忠, 邱周华, 等. 极坐标系下的 Legendre 谱元方法求解 Poisson-型方程 [J]. 计算力学学报, 2012, 29(5): 641-645.
MEI Huan, ZENG Zhong, QIU Zhouhua, et al. A Legendre spectral element method for solving Poisson-type equation in polar coordinates [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012, 29(5): 641-645.
- [6] BOYD J P, YU F. Comparing seven spectral methods for interpolation and for solving the Poisson equation in a disk: Zernike polynomials, Logan-Shepp ridge polynomials, Chebyshev-Fourier series, cylindrical Robert functions, Bessel-Fourier expansions, square-to-disk conformal mapping and radial basis functions [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230 (4): 1408-1438.
- [7] PATERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(3): 468-488.
- [8] JIANG B N. The Least-Squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics [M]. Berlin, Germany: Springer, 1998: 4-10.
- [9] PONTAZA J P, REDDY J N. Spectral/hp Least-Squares finite element formulation for the Navier-Stokes equations [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 190(2): 523-549.
- [10] QIU Z, ZENG Z, MEI H, et al. A Fourier-Legendre spectral element method in polar coordinates [J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(2): 666-675.
- [11] 秦国良. 谱元法求解不可压缩流动与自然对流换热问题 [D]. 西安: 西安交通大学, 1999: 90-95.
- [12] 秦国良, 陈雪江, 武珑, 等. 极坐标系下谱元方法求解不可压缩 Navier-Stokes 方程 [J]. 空气动力学学报, 2004, 22(2): 216-219.
QIN Guoliang, CHEN Xuejiang, WU Long, et al. Spectral element method in polar coordinate for incompressible Navier-Stokes equations [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2004, 22(2): 216-219.

(编辑 苗凌)