

DOI: 10.7652/xjtuxb201711015

接触力模型对含间隙铰接副多体系统分析的影响

杨芳¹, 陈渭¹, 李培²

(1. 西安交通大学现代设计及转子轴承系统教育部重点实验室, 710049, 西安;
2. 新加坡国立大学冲击力学实验室, 117575, 新加坡)

摘要: 为研究接触力模型对含间隙铰接副多体系统动力学分析结果的影响,分析了不同接触力模型中阻尼系数和耗散能的计算方法及其优缺点,并以单球碰撞为例对比分析了各模型耗散能的大小。在此基础上,以含间隙铰接副曲柄滑块机构为例,研究了不同接触力模型对多体系统动力学计算的效率、稳定性及结果的影响。计算结果表明:接触力模型中耗散能的增加可以使多体系统动力学计算结果更快趋于稳定;选取适当的接触力模型可改善动力学方程的求解效率及结果稳定性。针对不同恢复系数,从稳定性、计算效率及适用范围三方面考虑,得出了相应的更具优势的接触力模型。

关键词: 多体系统;间隙铰接副;能量耗散;接触力

中图分类号: TH117.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)11-0106-12

Influences of Contact Force Models on Analysis of
Multibody Systems Involving Joints with Clearance

YANG Fang¹, CHEN Wei¹, LI Pei²

(1. Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Impact Mechanics Lab, National University of Singapore, Singapore 117575, Singapore)

Abstract: The features and methods of calculating damping coefficients and dissipation energy in different contact force models are analyzed to study the influences of the existing contact force models for dynamic analysis of multibody systems involving joints with clearance. The dissipation energies of different models are compared based on a single ball collision system. On the basis of this analysis, a slider crank mechanism is used to study influences of different contact force models on efficiency, stability and result of computation for multibody system dynamics. Results show that the increase of dissipation energy in a contact force model accelerates the stability of dynamic results of multibody system, and an appropriately selected contact force model can improve the computation efficiency and stability of the dynamic system. More dominant contact force models for different restitution coefficients are obtained by considering stability, efficiency of computation, and applicability.

Keywords: multibody system; joint with clearance; energy dissipation; contact force

在多体系统中,铰接副作为必要的连接部件,用于传递各构件之间的力和力矩,其性能的好坏对系

统的动力学响应会产生直接影响。在实际工况中,由于加工和安装误差、材料变形等问题,铰接副大多存在一定的间隙^[1-2],例如采煤机截割头与截割臂连接处、工业机器人大小臂连接处、现代航天器的太阳板等大型结构之间的连接处以及人工关节处等部位的铰接副。间隙的存在使机构连接处的销轴与轴套不再做同心运动,而销轴轴心的偏离使轴套内侧容易产生碰撞,从而引起振动,并导致系统的稳定性及可靠性降低。因此,有必要对含间隙铰接副的多体系统进行动力学分析,尤其是对接触碰撞过程的研究。由于间隙的存在,铰接副的几何和运动约束减少,会导致系统动力学方程求解困难,对此,研究者多采用接触力约束来代替几何约束,从而将接触力模型引入到动力学方程中进行计算。近年来,接触力模型在不断地发展和完善,由线性到非线性,由纯弹性接触到弹-塑性接触,以及由单一弹簧模型到弹簧阻尼模型,这使动力学计算中对接触力模型的选择性越来越广。了解各模型之间的区别,有利于选择适合的接触力模型,对提高动力学计算的效率和稳定性具有重要意义。

目前,已有一些学者针对接触力模型的对比分析做了一些研究,但十分有限。Bai 等以销轴-轴套系统为研究对象,利用赫兹模型、Hunt-Crossley 模型及 Lankarani-Nikravesh 模型对接触力进行了计算,并绘制了相应的接触力图^[3],但并未涉及更多的接触力模型。Flores 及其团队基于赫兹模型对常见的接触力模型进行了总结及对比分析^[4-5],但未研究各模型耗散能的不同及对含间隙铰接副多体系统的影响。阎绍泽等对目前常用的接触力模型及其适用工况进行了分析和总结^[6],但并未对接触力模型进行实例计算。王庚祥等基于多体系统动力学中的关节效应,对各接触力模型的适用范围进行了说明^[7],但主要针对的是间隙铰接副的摩擦磨损。上述对接触力模型的总结及对比研究,并未过多涉及不同接触力模型的阻尼力及耗散能的区别,以及对含间隙铰接副多体系统的影响。

近年来,随着多体系统动力学的发展,研究者们针对不同的材料属性和工况参数,对接触力模型进行了新的发展,但对多体系统中接触力模型的选择及对比研究尚缺乏系统性的总结。为此,本文在前人研究成果的基础上,总结了主要的接触力模型,重点分析了各个模型阻尼力的改进方法及能量耗散途径的计算过程,同时采用单球碰撞模型,对各模型耗散能的大小进行了对比研究;针对不同接触力模型

对动力学系统的影响,以含间隙的曲柄滑块机构为研究对象,得出了不同模型下系统的动力学结果,并从稳定性、计算效率及适用范围三方面对接触力模型进行了评价,以期对多体系统动力学计算中接触力模型的选取提供参考。

1 间隙铰接副约束模型

在多体系统中,由于间隙铰接副的存在,各构件之间理想的几何关系和运动关系将不再满足,此时可以利用接触力约束来代替,因此,寻找销轴与轴套准确的接触位置及接触深度至关重要,这同时也是应用接触力模型的基础。目前,常用销轴轴心与轴套中心的相对关系来确定碰撞接触点的位置^[8]。

图 1 所示为间隙铰接副模型^[9],图中 O_J 、 O_B 为销轴和轴套的中心, C_J 、 C_B 为销轴和轴套接触点的位置, R 、 r 为销轴和轴套的半径, e 、 α 为间隙的尺寸和方位角, ω_J 、 ω_B 为销轴和轴套的旋转角速度。

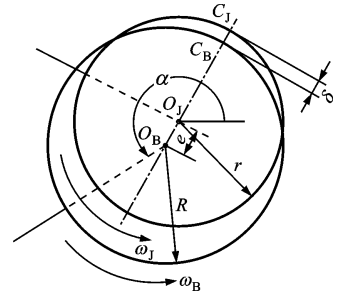


图 1 间隙铰接副模型

由向量关系可知,接触点的切向和法向向量表达式为

$$\mathbf{n} = i \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -i \sin \alpha + j \cos \alpha \quad (2)$$

2 个接触点的位置向量

$$\mathbf{r}_{C_J} = \mathbf{r}_{O_J} + \mathbf{r}_{C_J}^J \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_{C_B} = \mathbf{r}_{O_B} + \mathbf{r}_{C_B}^B \quad (4)$$

式中: $\mathbf{r}_{O_J}$ 、 $\mathbf{r}_{O_B}$ 为销轴和轴套中心在整体坐标系中的位置向量; $\mathbf{r}_{C_J}^J$ 、 $\mathbf{r}_{C_B}^B$ 为接触点在 2 个局部坐标系中的位置向量。

C_J 相对于 C_B 的位置(即侵入深度)可表示为

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{r}_{O_J} - \mathbf{r}_{O_B} + \mathbf{r}_{C_J}^J - \mathbf{r}_{C_B}^B = \mathbf{e} + \mathbf{r}_{C_J}^J - \mathbf{r}_{C_B}^B \quad (5)$$

对式(5)求导,可以得到接触点的速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{C_J}^J}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_{C_B}^B}{dt} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_J - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}_B \quad (6)$$

用接触点的法向和切向速度表示为

$$\mathbf{v} = \dot{e} \mathbf{n} + (e\dot{\alpha} + r\omega_J - R\omega_B) \boldsymbol{\tau} \quad (7)$$

通过比较半径差和中心距大小,可以判断间隙铰接副内部是否发生接触。销轴与轴套的半径差 $c = R - r$, 可通过差值 $\delta = |e| - |c|$ 的正负来判断是否发生接触: 当 $\delta \geq 0$ 时, 发生接触; 当 $\delta < 0$ 时, 不发生接触。

当接触发生时, 销轴和轴套受到的力和力矩可表示如下

$$\mathbf{F}_j = F_N \mathbf{n} + F_T \boldsymbol{\tau} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_j = F_N \mathbf{n} \times \mathbf{r}_{C_j}^I + F_T \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}_{C_j}^I \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_B = -(F_N \mathbf{n} + F_T \boldsymbol{\tau}) \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_B = F_N \mathbf{n} \times \mathbf{r}_{C_B}^B + F_T \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}_{C_B}^B \quad (11)$$

式中: F_N 为法向接触力, 可利用接触力模型求解; F_T 为摩擦力。

利用间隙铰接副的约束模型, 可以得到销轴与轴套的接触位置及碰撞速度, 这是准确求解接触力的关键。

2 接触力模型及耗散能的计算

由于间隙的存在, 几何约束被破坏, 在运行过程中销轴和轴套的中心不再重合, 在这种情况下, 间隙铰接副的运动状态可分为接触状态和分离状态 2 种, 如图 2 所示。当销轴与轴套内侧分离时, 无接触力产生; 当两者接触时, 产生接触力。

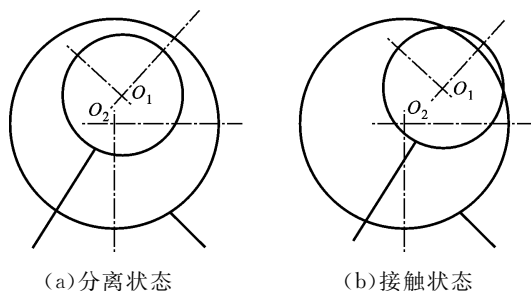


图2 间隙铰接副的运动状态模型

由于接触碰撞是一个复杂过程, 接触力的大小与接触副的材料、碰撞速度及侵入深度等有关, 所以合适的模型对系统动力学结果的预测具有重要意义。许多研究者以赫兹模型为基础进行了研究, 尤其是对阻尼力的计算, 提出了不少新的公式。

2.1 赫兹接触模型

1882 年, 赫兹基于弹性力学和连续体力学的理论, 对弹性体的接触力进行了推算, 在碰撞过程中, 假设材料只发生可恢复的弹性变形, 没有能量损失。赫兹点接触和线接触模型中接触力与侵入深度的关系可分别表示如下。

$$\text{点接触} \quad F_N = K \delta^n \quad (12)$$

$$\text{式中: } K \text{ 为刚度系数, } K = \frac{4}{3\pi(h_i + h_j)} \left[\frac{R_i R_j}{R_i \pm R_j} \right]^{1/2}$$

(当两球体为外接触时 $\pm$ 取 $+$ 号, 为内接触时 $\pm$ 取 $-$ 号; 当球与平面接触时, R_j 趋于无穷大; h_i, h_j 为 2 个接触体的材料参数, 与材料的弹性模量 E 和泊松比 μ 有关, $h_k = (1 - \mu_k^2) / (\pi E_k)$, $k = i, j$; R_i, R_j 为两个接触体的半径); δ 是接触点的侵入深度; n 为幂指数, 其大小取决于碰撞材料的种类, 一般金属材料取 1.5 (其余接触力模型中 n 的意义与赫兹模型相同)。

线接触^[10]

$$\left. \begin{aligned} a &= \left(\frac{4F_N R_i R_j}{\pi E^* (R_i \pm R_j)} \right)^{1/2} \\ F_N &= \frac{\pi E^* \delta}{2 \left(\ln \left(\frac{4R_i R_j}{a^2} \right) - 1 \right)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: a 为接触区宽度的一半; E^* 为接触系统的弹性模量, $E^* = \left(\frac{1 - \mu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \mu_j^2}{E_j} \right)^{-1}$; 其余参数与式 (12) 中的相同。

在赫兹模型中, 点接触模型的 F_N 与接触点处的侵入深度 δ 呈非线性关系, 而线接触模型的呈线性关系。2 种模型侵入深度的系数与材料的几何和物理参数有关。赫兹模型作为研究接触碰撞的基础模型^[11], 已被研究者广为接受。

以经典单球碰撞模型为研究对象, 如图 3 所示, 将一质量为 4.5 kg、半径为 0.2 m 的小球从 1 m 的高度以零初速度落下, 其中小球和平面的弹性模量 E 分别为 10 和 100 GPa, 泊松比 μ 分别为 0.3 和 0.29。以赫兹点接触模型 (即式 (12)) 作为接触力的计算公式, n 取 1.5, 计算结果如图 4 所示。由图 4 可知, 在赫兹模型中, 接触力连续变化, 同时小球在接触与分离过程中对应位置的接触力大小相同, 这与实际情况不符, 主要原因是未考虑能量的耗散。Liu 等已经证实, 在间隙较小时, 赫兹模型的计算结果与真实情况的偏差很大^[11]。因此, 赫兹模型的应用有一定的局限性, 所以之后发展的模型均在此模型的基础上进行了改进。

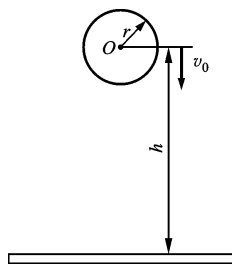


图3 单球碰撞模型

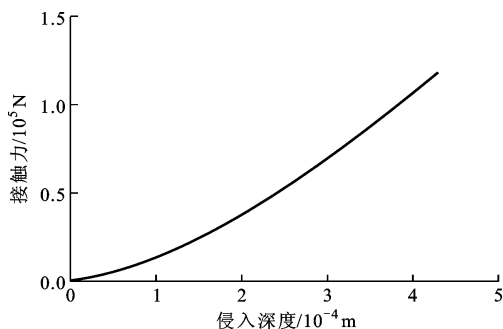


图 4 赫兹模型的接触力-侵入深度关系

2.2 Kelvin-Voigt 模型

针对赫兹模型缺少能量耗散项的缺点,Zukas 等根据侵入速度 $\dot{\delta}$ 的正负,将接触过程分为靠近过程和分离过程,并在分离过程中引入恢复系数 C_r [12]。 C_r 小于 1,代表能量的耗散,一般为碰撞前后的速度比,表达式如下

$$C_r = \frac{v_2}{v_1} \quad (14)$$

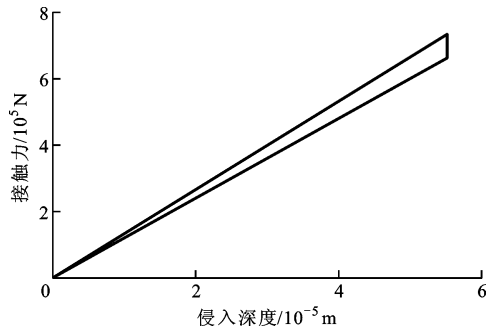
式中: v_2 为碰撞后的速度; v_1 为碰撞前的速度。

Kelvin-Voigt 模型的接触力表达式如下

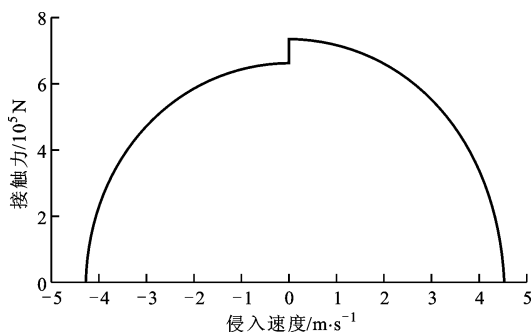
$$F_N = \begin{cases} K\delta(\text{加载}), & v_N > 0(\text{靠近}) \\ K\delta C_r(\text{卸载}), & v_N < 0(\text{分离}) \end{cases} \quad (15)$$

在 Kelvin-Voigt 模型中,接触力与侵入深度为线性关系,计算简单,同时考虑了能量的耗散,但是阻尼系数在整个碰撞过程中却保持不变,这又不符合能量损失会随着碰撞速度的变化而变化的规律,且只考虑了分离过程,未考虑接近过程,不符合实际情况,所以计算精度不高。

以 Kelvin-Voigt 模型为接触力计算公式的单球碰撞结果如图 5 所示,分别为接触力与侵入深度、侵入速度的关系,计算中恢复系数取 0.9。由图 5a 可知,接触与分离过程中同一位置的接触力不再重合,这主要是由于考虑了能量耗散;由图 5b 可知,在法向速度为零,即最大侵入深度时,接触力发生了跳跃,这主要是由于加载与卸载过程的接触力函数不



(a) 接触力与侵入深度的关系



(b) 接触力与侵入速度的关系

图 5 Kelvin-Voigt 模型的单球碰撞计算结果

连续所致,会造成动力学结果的不稳定。

2.3 Hunt-Crossley 模型

针对 Kelvin-Voigt 模型缺少能量耗散项的缺陷,Hunt 和 Crossley 对 Kelvin-Voigt 模型中的阻尼项进行了改进,将间隙铰接副等效为非线性弹簧阻尼单元(如图 6 所示),同时假设在整个碰撞过程中能量以热能的形式散失,计算得到了新的阻尼系数 [13],表达式为

$$D = \frac{3K(1 - C_r)\dot{\delta}^n}{2\dot{\delta}^-} \quad (16)$$

式中: K 为刚度系数; $\dot{\delta}^-$ 为初始侵入速度。

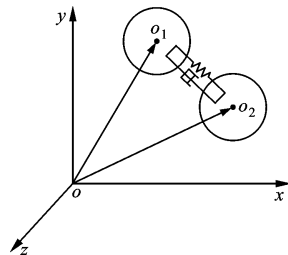


图 6 Hunt-Crossley 等效模型

由 $F_N = K\delta^n + D\dot{\delta}$, 可得接触力的表达式

$$F_N = K\delta^n \left(1 + \frac{3(1 - C_r)\dot{\delta}}{2\dot{\delta}^-} \right) \quad (17)$$

与 Kelvin-Voigt 模型相比,Hunt-Crossley 模型在整个碰撞过程中都引入了阻尼系数,接触力会随着碰撞参数的变化而变化,更符合实际情况。但是,由于模型中考虑的能量耗散主要是热能形式,未考虑材料变形、动能等的损失,因此耗散能的计算并不全面。不过,因为此模型形式简单,可以用于一些简单工况的计算。

随后出现的接触力模型多以 Hunt-Crossley 模型的计算公式为参照,对阻尼系数的计算进行了不断的改进。

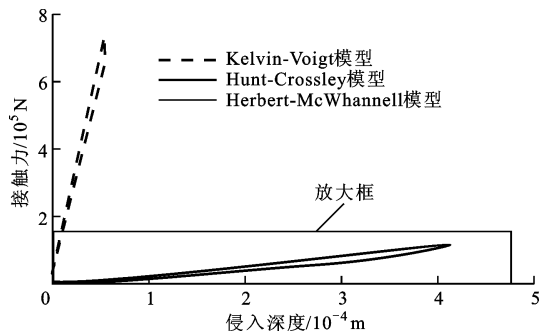
2.4 Herbert-McWhannell 模型

Herbert-McWhannell 模型 [14] 与 Hunt-Cross-

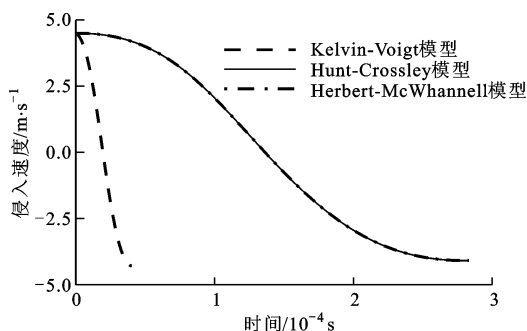
ley 模型类似,同样对 Kelvin-Voigt 模型的能量耗散项进行了改进,并且将间隙铰接副简化为弹簧阻尼模型,但阻尼系数是通过求解运动方程得到的,其表达式为

$$D = \frac{6K(1-C_r)\delta^n}{[(2C_r-1)^2+3]\delta^n} \quad (18)$$

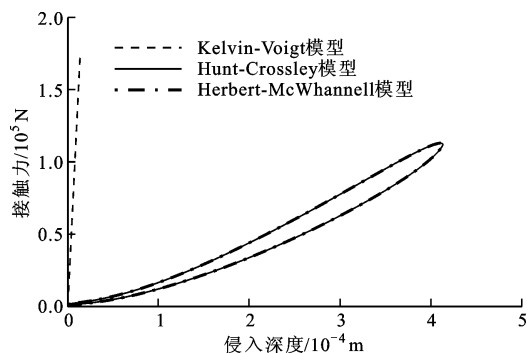
由于 Hunt-Crossley 模型和 Herbert-McWhannell 模型是针对 Kelvin-Voigt 模型的阻尼项进行的改进,为了对比三者的区别,分别用这 3 种模型计算了单球碰撞时接触力的变化情况,结果如图 7 所示,其中 Kelvin-Voigt 模型的刚度系数取另 2 种模型的刚度系数计算值, C_r 取 0.9, n 取 1.5。从图 7a、7b 可知,改进后的 2 种模型与 Kelvin-Voigt 模型相比,



(a) 接触力与侵入深度的关系



(b) 侵入速度随时间的变化



(c) (a) 图的局部放大图

图 7 Kelvin-Voigt、Herbert-McWhannell 和 Hunt-Crossley 模型的单球碰撞计算结果

接触力连续变化,但幅值及侵入深度变小,这主要是因为同样的参数下, Kelvin-Voigt 模型计算得到的接触力值较大,导致碰撞加速度大,从而使初速度在很短的时间内减为零,所以侵入深度变小。从图 7c 可知,改进后的 2 种模型对耗散能的计算结果相差不大,由迟滞曲线包围的面积可以看出, Herbert-McWhannell 模型略微增加了阻尼项在整个接触力中所占的比例,这一点从两者的阻尼力表达式中也可看出。

2.5 Lee-Wang 接触力模型

Lee-Wang 接触力模型以 Hunt-Crossley 模型为基础,将间隙铰接副等效为双弹簧阻尼模型,如图 8 所示。针对阻尼系数的计算, Lee 和 Wang 从系统的运动学方程入手,同时考虑了阻尼力的 2 个边界条件——当 $\delta=0$ 和 $\delta=\delta_{\max}$ 时,阻尼力为 0,经过一系列计算,推导出如下阻尼系数表达式^[15]

$$D = \frac{3K(1-C_r)\delta^n}{4\delta^n} \quad (19)$$

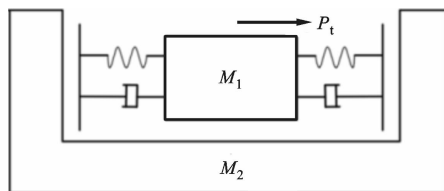
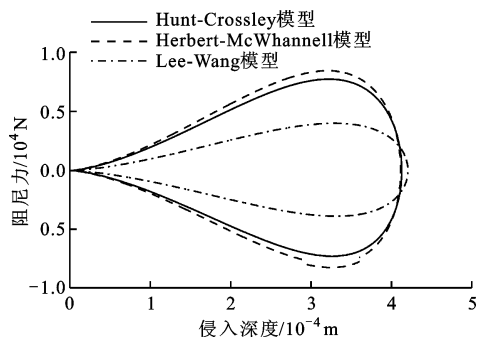


图 8 Lee-Wang 接触力等效模型

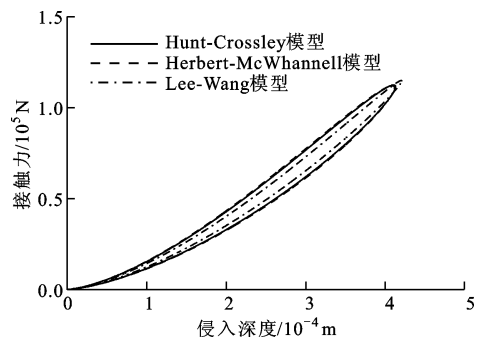
为了更清楚地了解 Lee-Wang 模型的改进部分,结合 Hunt-Crossley 模型和 Herbert-McWhannell 模型,以单球碰撞模型为研究对象,恢复系数取 0.9, n 取 1.5,分别计算阻尼力、接触力与侵入深度的关系,结果如图 9 所示。由图 9a 可知,对于改进后的 Lee-Wang 模型,阻尼力曲线在侵入深度最大时曲率变小,保证了 2 个边界条件处阻尼力相等,但其余 2 种模型由于在侵入深度最大点处曲率最大,会导致阻尼力相等关系在最大值周围的一个区域中都成立,即相等关系不唯一。由图 9b 可知, Lee-Wang 模型的能量耗散偏小,结合阻尼力表达式可以看出,其阻尼力约为 Hunt-Crossley 模型的 1/2。

2.6 Lankarani-Nikravesh 接触力模型

Lankarani-Nikravesh 模型(简称 L-N 模型)以 Hunt-Crossley 模型为基础,对能量耗散项做了进一步改进。二人详细分析了碰撞过程中能量耗散的途径,分别由动量守恒定律和能量守恒定律推导出损失能量的 2 种表达式^[16-17],并通过对比这 2 种表达式,得到如下阻尼系数表达式



(a) 阻尼力与侵入深度的关系



(b) 接触力与侵入深度的关系

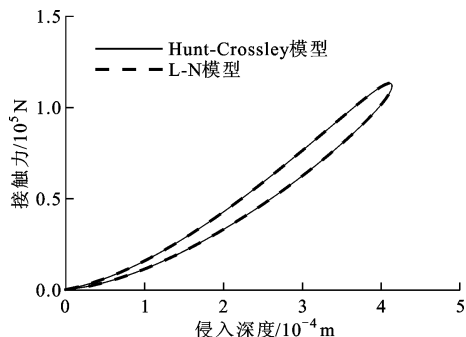
图 9 Hunt-Crossley、Herbert-McWhannell 和 Lee-Wang 模型的单球碰撞计算结果

$$D = \frac{3K(1 - C_r^2)\delta^n}{4\delta^n} \quad (20)$$

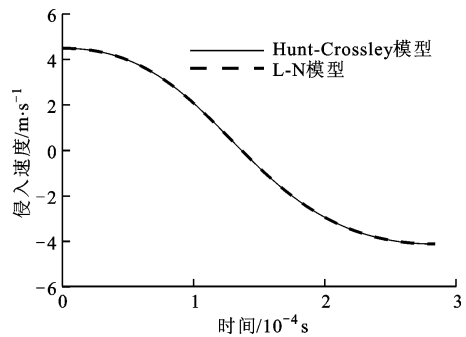
这 2 种模型的主要不同点在于, L-N 模型的阻尼系数是 C_r^2 的函数, 而 Hunt-Crossley 模型的则是 C_r 的函数。由于接触碰撞会造成动能的损失, 动能与速度的平方成正比, 同时 C_r 为碰撞前后的速度比, 因此阻尼系数表达为 C_r^2 的函数更为合理, 更符合实际的能量耗散。文献[3]的研究发现, L-N 模型对大间隙铰接副有很好的计算效果, 但对小间隙铰接副则容易出现数值病态的问题, 因此应用有一定的局限性。

用 Hunt-Crossley 模型和 L-N 模型对单球碰撞的接触力进行计算, C_r 取 0.9, n 取 1.5, 结果如图 10 所示。由图 10a 中滞回曲线包围的面积可以看出, L-N 模型计算出的耗散能略微偏小, 这主要是由于当恢复系数为 0.9 时, 两者阻尼系数表达式中的 $3(1 - C_r)/2$ 与 $3(1 - C_r^2)/4$ 的值相差很小, 且阻尼系数越接近 1, 两者的差值就越小, 从而导致阻尼力相差不大。由图 10b 可知, 2 种模型计算的碰撞速度也相差不大。

上述 Kelvin-Voigt 模型、Hunt-Crossley 模型、Herbert-McWhannell 模型、Lee-Wang 模型和 L-N 模型在考虑能量耗散时, 都存在一个共同的缺点: 由



(a) 接触力与侵入深度的关系



(b) 侵入速度随时间的变化

图 10 Hunt-Crossley 和 L-N 模型的单球碰撞计算结果

理论分析可知, 在理想情况下, 当接触副为纯弹性接触时能量不损失, 此时 C_r 为 1, 而当接触副为纯塑性接触时, C_r 为 0, 能量损失应为无限大, 但是, 各模型的阻尼力并不趋于无限大, 而是仍为一定大小的值, 并不满足边界条件, 所以当恢复系数越来越低时, 计算值的偏差会越来越大。因此, 上述模型适合恢复系数较高的材料 (恢复系数的高低以 0.5 为界限^[5])。

随着软材料的逐渐应用, 接触力模型的发展从刚性材料逐渐扩展到了软材料, 适合低恢复系数的接触力模型不断出现, 如 Flores 模型^[4]、Gonthier 模型^[18]等, 此外还有不局限于恢复系数高低的模型, 如混合接触力模型^[3]、ZhiYing-QiShao 模型^[19]等。

2.7 ZhiYing-QiShao 模型

秦志英和陆启韶从恢复系数的实质入手, 将古典碰撞模型与动态接触理论相结合, 利用能量守恒定律, 得出了接触力做的功等于碰撞前后的动能变化的结论; 为了简化接触力的积分运算, 假设碰撞过程为弹性变形, 得出了阻尼系数的表达式。为了弥补只考虑材料弹性变形的简化计算, 在表达式中增加了恢复系数的指数函数, 得到如下新的阻尼系数表达式

$$D = \frac{3K(1 - C_r^2)e^{2(1-C_r)}\delta^n}{4\delta^n} \quad (21)$$

由式(21)可以看出:当 C_r 等于 1 时,阻尼系数的表达式与 L-N 模型的相同,因此随着恢复系数的逐渐增大,ZhiYing-QiShao 模型越来越接近 L-N 模型,适合高恢复系数材料的计算;当 C_r 逐渐变小时,由于指数函数的性质,接触力增加的速度会越来越快,虽然在纯塑性条件下(即 $C_r=0$ 时)阻尼系数值并不是无限大,但在实际工况中,纯塑性变形的材料较少,与上述模型相比,此模型提高了低恢复系数下的计算精度,扩大了模型的应用范围。

2.8 混合接触力模型

Bai 等以 L-N 模型和改进的 Winkler 弹性基础模型为基础,对阻尼系数及刚度系数进行了改进,提出了混合接触力模型^[3],此模型适合旋转铰接副接触力的计算。他们利用改进的 Winkler 弹性基础模型,针对 Liu 等推导出的间隙圆柱铰负载与变形之间的函数关系^[10],同时根据刚度系数的物理意义,推导出了非线性刚度系数的表达式

$$K_n = \frac{1}{8} \pi E^* \left(\frac{2\delta(3(R_i - R_j) + 2\delta)^2}{(R_i - R_j + \delta)^3} \right)^{1/2} \quad (22)$$

此模型的阻尼系数则借鉴了 ZhiYing-QiShao 模型中阻尼系数的计算,同时代入非线性刚度系数,得到了新的阻尼系数表达式

$$D_{\text{mod}} = \frac{3K_n(1 - C_r^2)e^{2(1-C_r)}\delta^n}{4\dot{\delta}^-} \quad (23)$$

混合接触力模型中的非线性刚度系数为间隙的函数,将间隙纳入接触力的计算公式中,可使计算更全面,其阻尼系数的表达式与 ZhiYing-QiShao 模型中的相同,因此具有同样的优点,应用不受恢复系数高低的限制。但是,混合接触力模型的刚度系数是变刚度系数,当碰撞体半径为无穷大时,其刚度系数也为无穷大,无法进行计算,因此此模型只适合计算两球体的碰撞,无法用于单球碰撞的计算。

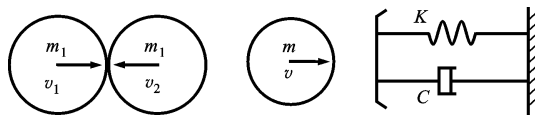
2.9 Flores 接触力模型

Flores 接触力模型主要适用于软材料或恢复系数较低的材料。它基于 Hunt-Crossley 模型,从材料存储的弹性应变能和机构内部阻尼的消耗能两方面计算碰撞过程中的能量耗散,通过能量守恒和动量守恒定律,得到方程 $T^{(-)} = T^{(\max)} + U^{(\max)} + \Delta E_c$,即碰撞前的动能等于碰撞后的动能、弹性应变能和内部阻尼消耗能之和^[4]。

Flores 模型通过对接触力 F 的积分运算,得到碰撞过程中材料储存的弹性应变能。对于内部阻尼造成的能量损失,将碰撞过程简化为单自由度的弹簧阻尼模型,如图 11 所示,通过求解其自由振动方

程得到内部阻尼消耗的能量,最终通过系统的能量守恒方程,得到阻尼系数的表达式

$$D = \frac{8K(1 - C_r)\delta^n}{5C_r\dot{\delta}^-} \quad (24)$$



(a) 实际模型

(b) 等效模型

图 11 Flores 接触力模型的内部阻尼计算模型

此模型适合恢复系数较小的材料,当材料为纯塑性材料,即 $C_r=0$ 时,阻尼系数趋于无穷大,能量损失也趋于无穷大,满足边界条件。

2.10 Gonthier 接触力模型

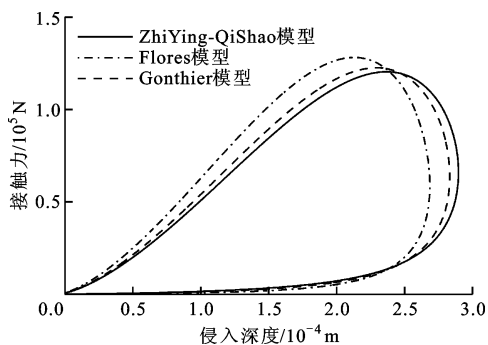
Gonthier 接触力模型同样适用于软材料或恢复系数较低的材料。它也是基于 Hunt-Crossley 模型,但阻尼系数的计算思路与 Flores 模型不同,是从有阻尼的碰撞运动学方程入手,以碰撞前、后的 2 个状态为临界值,对运动方程进行积分,引入恢复系数,通过归一化及简化处理,得到新的阻尼系数

$$D = \frac{K(1 - C_r^2)\delta^n}{C_r\dot{\delta}^-} \quad (25)$$

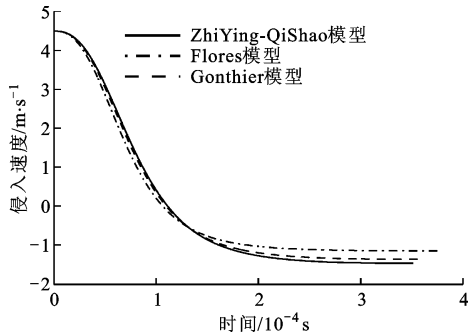
Gonthier 模型与 Flores 模型一样,都满足纯弹性与纯塑性的边界条件。不同点在于:Gonthier 模型的阻尼系数为 C_r^2 的函数,这与动能损失量为碰撞速度的平方相一致,同时随着恢复系数的减小,阻尼系数增加的幅度会变大,能量耗散也会变大,符合实际情况。

综上所述,ZhiYing-QiShao 模型、Flores 模型、Gonthier 模型及混合模型都可以用于计算低恢复系数材料的碰撞过程,但由于混合模型不适合计算单球碰撞,因此选择前 3 种模型,恢复系数取 0.3, n 取 1.5,计算单球碰撞的接触力和侵入深度,结果如图 12 所示。由图 12a 可知,当恢复系数较小时,滞回曲线包围的面积明显增大,能量损耗变大;由图 12b 可知,Flores 模型计算的碰撞后速度最大,Gonthier 模型的次之,ZhiYing-QiShao 模型的最小。由滞回曲线包围的面积及碰撞后的速度,可以判断 3 种模型的能量损耗大小,据此由大到小排序为:ZhiYing-QiShao 模型,Gonthier 模型,Flores 模型。

前面对各种接触力模型的发展进行了总结和对比,可以看出,模型的改进主要集中于阻尼力的计算,各模型分别从运动方程、动能守恒、能量守恒、热能耗散、内部阻尼消耗、弹性材料存储能等不同的方

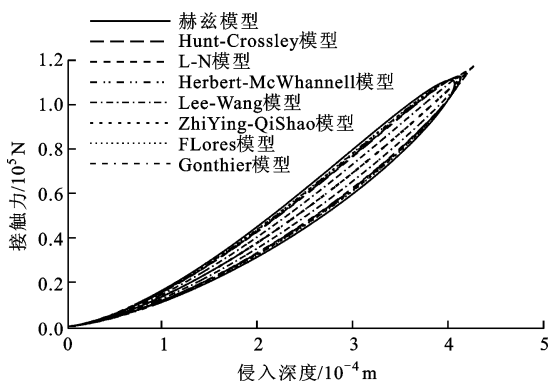


(a)接触力与侵入深度的关系

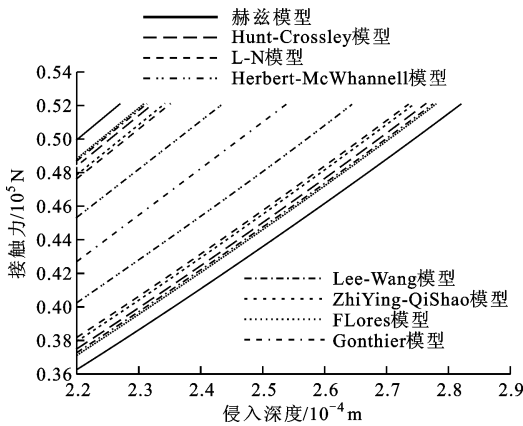


(b)侵入速度随时间的变化

图 12 ZhiYing-QiShao、Flores 及 Gonthier 模型的单球碰撞计算结果



(a)接触力与侵入深度的关系



(b)图(a)的局部放大图

图 13 8 种接触力模型的单球碰撞计算结果对比

面来计算碰撞过程中的能量损失,得到了不同的阻尼力表达式,从而导致各模型计算的能耗散量有所不同。

为了更好地对比各种模型所计算的能耗散的大小,以单球碰撞模型为研究对象,恢复系数取 0.9 (为了统一对比,Flores 模型及 Gonthier 模型的恢复系数也取为 0.9), n 取 1.5,用各接触力模型(除 Kelvin-Voigt 模型和混合模型外)对接触力进行计算,结果如图 13 所示。滞回曲线包围的面积代表耗散能的大小,由图 13a 可见,各模型获得的滞回曲线所包围的面积存在差别,说明它们计算出的耗散能大小不同。由图 13b 可以清楚地看出,各接触力模型按其系统耗散能由大到小排序,依次为:赫兹模型, Lee-Wang 模型, L-N 模型, Hunt-Crossley 模型, Herbert-McWhannell 模型, ZhiYing-QiShao 模型, Flores 模型, Gonthier 模型。

3 多体系统的动力学计算

耗散能对多体系统的动力学计算结果存在一定的影响,采用不同的接触力模型也会影响动力学计算的效率。本文采用单间隙曲柄滑块机构作为计算模型,如图 14 所示,连杆与滑块连接处为间隙铰接

副。为了表示清楚,图中放大了间隙,小圆为销轴,大圆为轴套^[8],两者之间为无润滑接触,运动过程中的切向摩擦力利用库仑修正模型来计算,其余铰接副均为理想铰接副。机构的相关参数如下:曲柄长度 $L_1 = 120$ mm,质量 $m_1 = 0.05$ kg;杆长度 $L_2 = 210$ mm,质量 $m_2 = 0.3$ kg;滑块质量 $m_3 = 0.14$ kg;销轴半径为 9.9 mm,销轴材料的弹性模量为 207 GPa,泊松比为 0.3;轴套半径为 10 mm,轴套材料的弹性模量为 207 GPa,泊松比为 0.28;曲柄为原动件,以 500 rad/s 的角速度匀速转动。

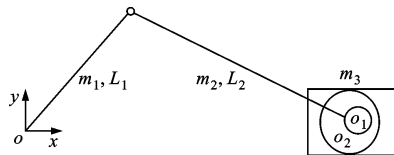


图 14 单间隙曲柄滑块机构示意图

基于欧拉-拉格朗日法,对单间隙曲柄滑块机构进行动力学建模,其欧拉-拉格朗日方程如下

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_q^T \\ \mathbf{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为系统的广义质量矩阵; $\mathbf{\Phi}_q$ 为机构的约束

矩阵; $\ddot{\mathbf{q}}$ 为系统的加速度矩阵; $\mathbf{g}$ 为广义外力矩阵(包括力和力矩); λ 为拉格朗日乘子矩阵, 元素数量与约束方程相对应; $\mathbf{r}$ 为系统的加速度约束方程右边的矩阵。

利用 Runge-Kutta-Fehlberg 法和 Baumgarte 稳定法, 对上述欧拉-拉格朗日方程进行求解, 得到系统的加速度、速度和位移, 从而便可得到间隙铰接副处的轴心轨迹及接触力。

当单间隙曲柄滑块机构材料的恢复系数较高时, 取 $C_r = 0.95$, $n = 1.5$, 使机构运行 1 个周期, 利用前述 8 个适合高恢复系数的接触力模型(其中赫兹模型的接触力利用线接触模型式(13)计算), 对接触力进行计算, 输出连杆与滑块连接处间隙铰接副的轴心轨迹和接触力, 如图 15、图 16 所示。下面, 按照模型能量耗散大小的排序, 对各模型进行分析。赫兹模型的轴心轨迹混乱(如图 15a 所示), 主要是由于其接触力计算中未考虑能量的耗散; Kelvin-Voigt 模型的轴心轨迹也是混乱的(如图 15b 所示), 主要是由于它部分引入了阻尼力, 导致接触力幅值不连续变化。这 2 种模型的接触力在 1 周的运动中没有出现稳定的状态, 且一直处于跳动状态, 如图 16a、16b 所示。对于能量耗散较小的 Lee-Wang 模型, 其耗散的能量约为 Hunt-Crossley 模型的 1/2(如图 15f 所示), 部分轴心轨迹呈锯齿状变化, 且接触力从初始时刻到稳定的时间最长(如图 16d 所示)。Hunt-Crossley 模型和 L-N 模型的耗散能较大且相近, 两者的轴心轨迹相似, 部分轨迹呈折线变化, 比较稳定(如图 15c、15d 所示), 与 Lee-Wang 模型相比, 接触力趋于稳定的时间明显变短。混合模型的接触力只在初始时刻振动幅值较大, 导致轴心轨迹在初始时刻比较混乱(如图 15h 所示), 这主要是由于其非线性刚度系数与侵入深度成反比, 初始时刻侵入深度小, 导致非线性刚度系数和接触力增大。Herbert-McWhannell 模型和 ZhiYing-QiShao 模型的耗散能最大, 所以两者的轴心轨迹最稳定, 且轨迹曲线光滑(如图 15e、15g 所示), 同时接触力趋于稳定的速度最快。由此可以得出结论: 在高恢复系数下, 接触力模型的耗散能越大, 则单间隙曲柄滑块机构的轴心轨迹曲线越光滑, 动力学性能越稳定, 接触力趋于稳定的速度越快。

当曲柄滑块机构材料的恢复系数较低时, 取 $C_r = 0.3$, $n = 1.5$, 使机构运行 1 个周期, 利用适合计算软材料的 ZhiYing-QiShao 模型、混合接触力模型、Flores 模型和 Gonthier 模型计算间隙铰接副处

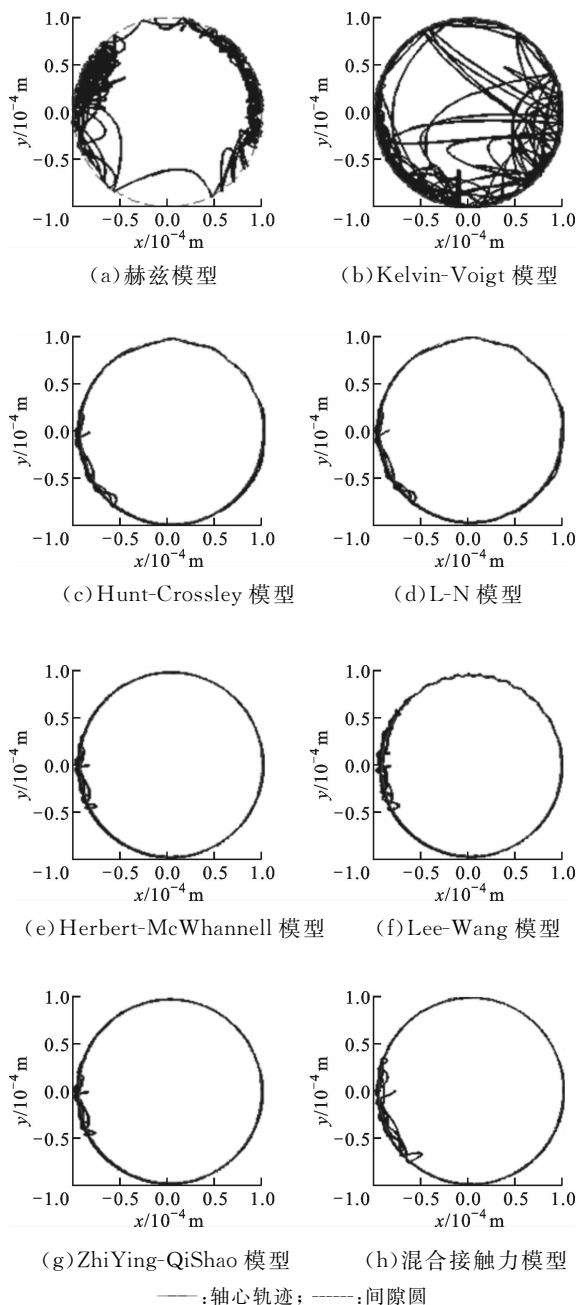


图 15 8 种接触力模型的轴心轨迹(恢复系数较高)

的接触力, 结果如图 17、图 18 所示。由图可以看出: 四者的轴心轨迹相差不大, 轨迹线比较光滑且稳定; 接触力振荡时间都较短, 几乎同时趋于稳定。结合前面的相关分析可知: 在低恢复系数下, 耗散能的大小对动力学结果的影响较小, 这主要是由于随材料恢复系数降低, 耗散能变大, 系统会更快地趋于稳定, 使得不同模型计算的系统动力学结果差别不大。与高恢复系数下系统的动力学计算结果(如图 15、图 16 所示)相比, 低恢复系数下系统的轴心轨迹明显更光滑, 且接触力在初始时刻的振荡时间明显缩短。由此可以得出结论: 恢复系数降低导致耗散能

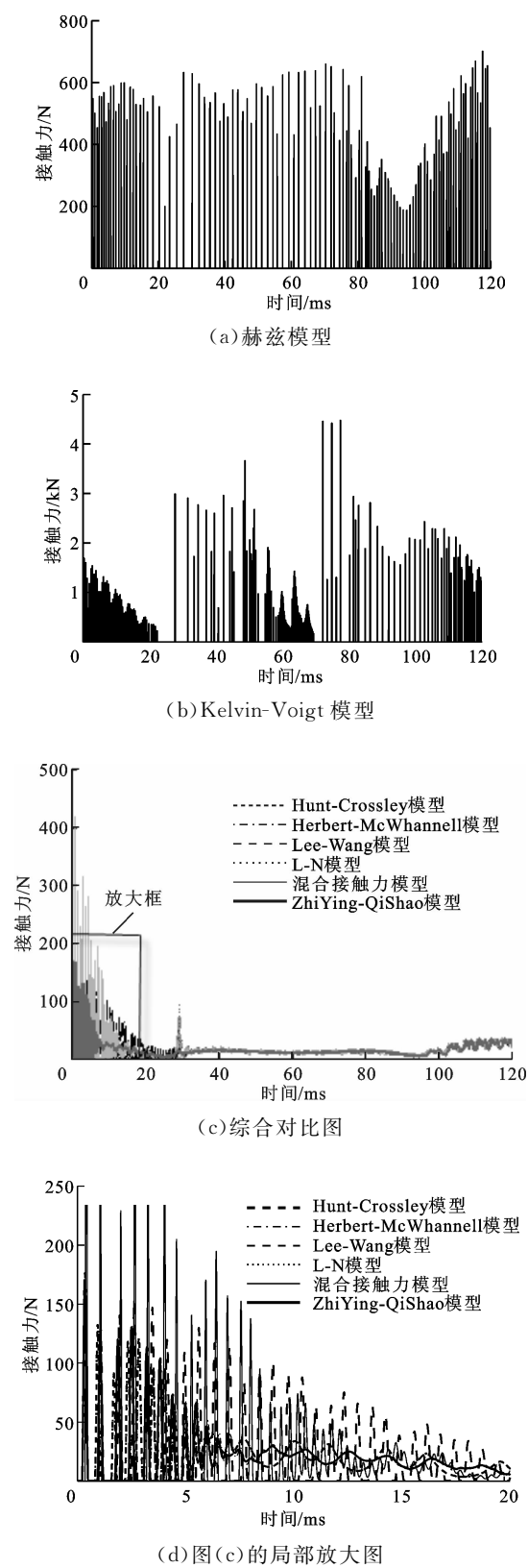


图 16 6 种接触力模型的接触力变化(恢复系数较高)

变大,从而使系统的动力学结果更稳定,且趋于稳定的速度加快。

因此,从动力学稳定性角度考虑,对于高恢复系

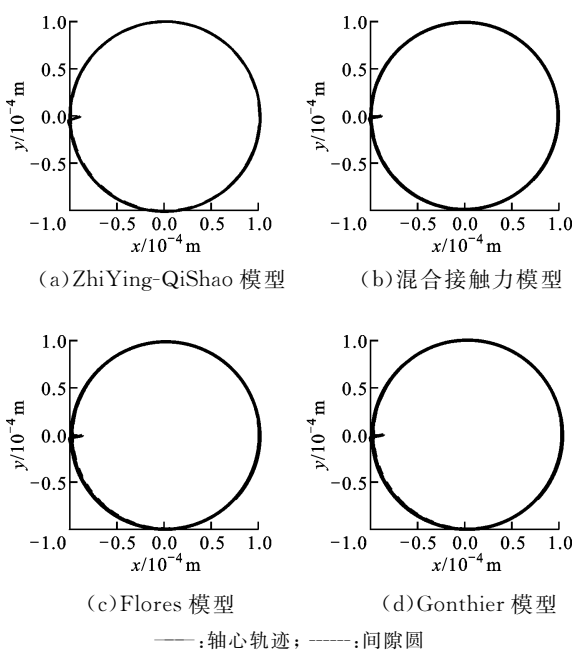


图 17 4 种接触力模型的轴心轨迹图(恢复系数较低)

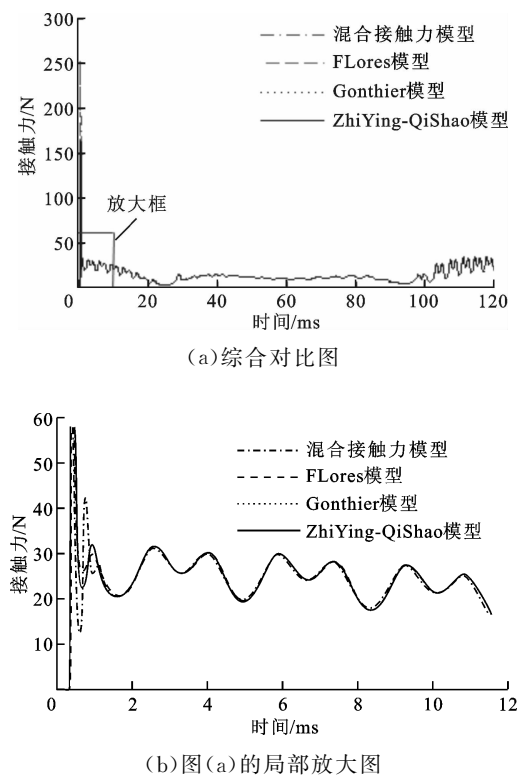


图 18 4 种接触力模型的接触力变化(恢复系数较低)

数材料的含间隙曲柄滑块机构,可以采用 Herbert-McWhannell 模型、混合模型和 ZhiYing-QiShao 模型,而对于恢复系数较低材料的含间隙曲柄滑块机构,因为上述 4 种模型得到的系统动力学结果都较稳定,所以均可采用。

在实际工程中,对含间隙铰接副的多体系统动

力学行为的预测需要大量的数据,因此计算的效率也是主要考虑的因素之一,选择高效率的模型,可以节省工程中的计算成本。以单间隙曲柄滑块机构为例,模型材料的高恢复系数取 0.95,低恢复系数取 0.3,采用同样的迭代方法及相同的迭代精度,比较不同接触力模型的计算时间。为简单起见,只比较曲柄运行 1 个周期所需的动力学计算时间(工程中为多周期运算,时间差别会更大),结果如表 1 所示。由表 1 可见,对适合高恢复系数的接触力模型,除 Kelvin-Voigt 模型和混合接触力模型外,其余模型的计算时间均在 20 s 之内,其中:未考虑能量耗散的赫兹模型用时最少,为 16.48 s, Lee-Wang 模型次之,为 17.69 s, Lankarani-Nikravesh 模型、Herbert-McWhannell 模型及 Hunt-Crossley 模型的计算时间相差不大,集中于 18.5 s 左右; Kelvin-Voigt 模型用时最长,主要是由于在计算过程中除了要判断销轴与轴套是否接触外,还增加了碰撞速度的正负判断,所以用时明显增加。对于适合低恢复系数的接触力模型, Gonthier 模型、Flores 模型和 ZhiYing-QiShao 模型的计算时间相差不大,集中于 17.5 s 左右,而混合接触力模型的计算时间最长,为 28.11 s。对于高、低恢复系数均适用的接触力模型,在不同的恢复系数下,混合接触力模型的计算时间明显多于 ZhiYing-QiShao 模型,大约为其 1.6 倍,主要是由于混合模型的非线性刚度系数和阻尼系数在迭代的每一步都需要重新计算,这会占用较多的计算时间。

表 1 不同模型对曲柄运动 1 周的计算时间

接触力模型	计算时间/s	
	$C_r=0.95$	$C_r=0.3$
赫兹模型	16.48	
Kelvin-Voigt 模型	186.0	
Hunt-Crossley 模型	18.77	
Lee-Wang 模型	17.69	
Herbert-McWhannell 模型	18.53	
L-N 模型	18.65	
ZhiYing-QiShao 模型	19.53	17.82
混合接触力模型	30.09	28.11
Flores 模型		17.54
Gonthier 模型		17.41

综上所述,从动力学结果的稳定性方面考虑,对高恢复系数的材料而言,混合模型、Herbert-McWhannell 模型和 ZhiYing-QiShao 模型更为适用,其中 Herbert-McWhannell 模型的计算效率最

高;对低恢复系数的材料而言,除混合接触力模型在初始时刻振动较大外,另外 3 种模型差别不大,而 ZhiYing-QiShao 模型、Flores 模型和 Gonthier 模型的计算效率明显优于混合接触力模型。对于不局限于恢复系数的 2 个模型, ZhiYing-QiShao 模型的计算效率更高,尤其对工程中大数据量的计算而言,其优势更加明显。

4 结 论

本文总结了不同接触力模型的重要研究进展,对比分析了各模型中阻尼系数的特点及对接触力和耗散能的影响,并以单球碰撞及含间隙曲柄滑块机构为例进行了具体分析,得出以下结论。

(1)各种接触力模型的发展主要集中于阻尼系数及耗散能的不同计算方法上,但对刚度系数计算的改进较少,而刚度系数在接触碰撞过程中多为定值,使其与接触碰撞参数相联系可以进一步完善接触力模型。

(2)对于含间隙铰接副多体系统的动力学计算,在接触力模型中增加耗散能可以使动力学结果更稳定,接触力趋于稳定的速度更快;选择合适的接触力模型可以改善多体系统动力学方程的求解效率和结果稳定性。

(3)在间隙铰接副接触力的计算中,赫兹模型和 Kelvin-Voigt 模型的计算结果一直处于振荡状态,导致动力学结果紊乱,因此不建议使用。

(4)在选取含间隙铰接副多体系统接触力模型时,对于不同的恢复系数,从适用范围、稳定性及计算效率三方面考虑的结果是:当接触副材料的恢复系数较高时,采用 Herbert-McWhannell 模型较好;当接触副材料的恢复系数较低时,选择 ZhiYing-QiShao 模型、Flores 模型或 Gonthier 模型均可;当接触副材料的恢复系数未定时,选择 ZhiYing-QiShao 模型更为适合。

参考文献:

[1] YAO Xiaoguang, GUO Xiaosong, FENG Yongbao, et al. Dynamic analysis for planar beam with clearance joint [J]. Journal of Sound & Vibration, 2015, 339: 324-341.

[2] 朱爱斌,何胜利,邹超,等. 考虑接触刚度的含间隙铰接副动态磨损分析 [J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(5): 12-18.

ZHU Aibin, HE Shengli, ZOU Chao, et al. Dynamic wear analysis of clearance joint considering contact

- stiffness [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(5): 12-18.
- [3] BAI Zhengfeng, ZHAO Yang. A hybrid contact force model of revolute joint with clearance for planar mechanical systems [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013, 48: 15-36.
- [4] FLORES P, MACHADO M, SILVA M T, et al. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics [J]. Multibody System Dynamics, 2011, 25: 357-375.
- [5] MACHADO M, MOREIRA P, FLORES P, et al. Compliant contact force models in multibody dynamics: evolution of the Hertz contact theory [J]. Mechanism & Machine Theory, 2012, 53(7): 99-121.
- [6] 阎绍泽, 向吴维凯, 黄铁球. 计及间隙的运动副和机械系统动力学研究进展 [J]. 北京大学学报(自然科学版), 2016, 52(4): 741-755.
- YAN Shaoze, XIANG Wuweikai, HUANG Tieqiu. Advances in modeling of clearance joints and dynamics of mechanical systems with clearances [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, 2016, 52(4): 741-755.
- [7] 王庚祥, 刘宏昭. 多体系统动力学中关节效应模型的研究进展 [J]. 力学学报, 2015, 47(1): 31-50.
- WANG Gengxiang, LIU Hongzhao. Research progress of joint effects model in multibody system dynamics [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015, 47(1): 31-50.
- [8] 王国庆, 刘宏昭. 含间隙内燃机曲柄滑块机构动力学研究 [J]. 农业机械学报, 2001, 32(6): 5-7.
- WANG Guoqing, LIU Hongzhao. Dynamic response of crank-rod of an IC engine with clearance [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2001, 32(6): 5-7.
- [9] 李培. 基于动力学与摩擦学耦合的含间隙铰接副多体系统研究 [D]. 西安: 西安交通大学, 2014: 45-46.
- [10] LIU Caishan, ZHANG Ke, YANG Rei. The FEM analysis and approximate model for cylindrical joints with clearances [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(2): 183-197.
- [11] JOHNSON K L. Contact mechanics [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987: 20-23.
- [12] ZUKAS J A, NICHOLAS T, SWIFT H F, et al. Impact dynamics [M]. New York, USA: John Wiley and Sons, 1982: 382-384.
- [13] HUNT K H, CROSSLEY F R E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact [J]. Journal of Applied Mechanics, 1975, 42(2): 440-445.
- [14] HERBERT R G, MCWHANNELL D C. Shape and frequency composition of pulses from an impact pair [J]. Journal of Engineering for Industry, 1977, 99(3): 663-671.
- [15] LEE T W, WANG A C. On the dynamics of intermittent-motion mechanisms: part 1 Dynamic model and response [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, 105(3): 534-540.
- [16] LANKARANI H M, NIKRAVESH P E. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems [J]. Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 369-376.
- [17] LANKARANI H M, NIKRAVESH P E. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems [J]. Nonlinear Dynamics, 1994, 5(2): 193-207.
- [18] GONTHIER Y, MCPHEE J, LANGE C, et al. A regularized contact model with asymmetric damping and dwell-time dependent friction [J]. Multibody System Dynamics, 2004, 11(3): 209-233.
- [19] 秦志英, 陆启韶. 基于恢复系数的碰撞过程模型分析 [J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(4): 294-298.
- QIN Zhiying, LU Qishao. Analysis of impact process based on restitution coefficient [J]. Journal of Dynamics and Control, 2006, 4(4): 294-298.

[本刊相关文献链接]

- 黄康, 徐锐, 陈奇. 小位移旋量和响应面法相结合的齿轮公差分析模型构建方法. 2017, 51(9): 77-84. [doi:10.7652/jxtxb201709011]
- 侯祥颖, 方宗德. 弧齿锥齿轮的向量式有限元静态啮合分析. 2017, 51(9): 85-91. [doi:10.7652/jxtxb201709012]
- 方斌, 张进华, 洪军, 等. 联合载荷作用下高速角接触球轴承快速计算方法及接触角分析. 2017, 51(6): 115-121. [doi:10.7652/jxtxb201706019]
- 温淑花, 张学良, 陈永会, 等. 结合面切向接触等效黏性阻尼分形模型. 2017, 51(1): 1-8. [doi:10.7652/jxtxb201701001]
- 侯祥颖, 方宗德. 考虑边缘接触的弧齿锥齿轮有限元接触分析. 2016, 50(11): 69-74. [doi:10.7652/jxtxb201611011]
- 王庆朋, 张力, 杜宝程, 等. 粗糙表面确定性接触模型中峰的再定义. 2016, 50(11): 115-120. [doi:10.7652/jxtxb201611018]
- 韩振华, 石万凯, 肖洋轶, 等. 新型复合摆线外啮合圆柱齿轮副的传动特性分析. 2016, 50(9): 10-19. [doi:10.7652/jxtxb201609002]

(编辑 葛赵青)