

DOI: 10.7652/xjtuxb201712020

改进型加权本质无振荡格式及其对 典型激波问题的高精度数值模拟

柴得林, 孙中国, 黄柱, 席光

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为了提高加权本质无振荡(WENO)格式对流场结构的分辨率,提出了性能更优的 WENO-EX 格式。在经典 WENO 格式的基础上,考虑各子模板光滑因子和整体模板光滑性之间的相互影响,引入表征整体模板光滑度的相关项,构造了新的光滑因子,优化了权分配。理论分析表明,WENO-EX 格式保持了原有的设计精度,对间断模板的非线性权配置更大,具有更低的耗散,更高的分辨率。为验证改进格式的计算性能,采用不同的 WENO 格式来求解线性迁移方程控制的平滑和间断问题,并且求解了欧拉方程控制的双马赫反射和激波旋涡相互作用等几种典型激波问题。计算结果表明:WENO-EX 格式在计算光滑问题时,在相同网格下可以取得更小的计算误差;在计算间断问题时,对流场结构有更高的分辨率。

关键词: 加权本质无振荡格式;光滑因子;高精度;高分辨率

中图分类号: O241;O354.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)12-0136-07

High-Accuracy Numerical Simulations on Typical Shock Problems with Improved WENO Scheme

CHAI Delin, SUN Zhongguo, HUANG Zhu, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to improve the resolution of flowing structures simulated with the weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme, an improved WENO scheme (WENO-EX) is constructed. By considering the interaction among the smoothness indicators of sub-stencils and whole stencil, which is based on the classic WENO scheme (WENO-JS) proposed by Jiang and Shu, a term characterizing the smoothness of the whole stencil is introduced to constitute the new smoothness indicator which changes the assignment of the nonlinear weights. The theoretical analysis shows that the improved WENO scheme can keep the original design accuracy, and obtain smaller dissipation and higher resolution with larger nonlinear weight assignment to the discontinuous stencil. Subsequently, numerical simulations for the linear transport equation with different initial conditions and typical shock problems such as the double Mach reflection and shock-vortex interaction governed by the Euler equations are conducted with different WENO schemes, and the WENO-EX scheme achieves better numerical results. The results show that WENO-EX scheme has smaller error with the same grid in smooth regions, and higher resolution

收稿日期: 2017-03-10。 作者简介: 柴得林(1991—),男,博士生;孙中国(通信作者),男,副教授。 基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2016YFB0200901);国家自然科学基金资助项目(51236006,51576154);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目。

网络出版时间: 2017-11-06 网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20171106.1409.002.html>

of flowing structures in dealing with problems containing discontinuities.

Keywords: weighted essentially non-oscillatory scheme; smoothness indicator; high accuracy; high resolution

高精度格式对网格规模要求低,对复杂流动分辨率高,是实现合理、高效、精确模拟非定常、含间断、多尺度复杂流场的有效手段,研究高精度格式对含激波流场的数值模拟具有重要意义。加权本质无振荡格式(WENO)作为一种捕捉激波性能优越的高精度格式,经过不断发展与改进,已被广泛应用于包含激波等复杂流场的计算。Liu 等在本质无振荡格式(ENO)构造思想的基础上提出了 WENO 格式^[1-3]。Jiang 等对 WENO 格式作了巨大的改进^[4],给出了构造任意阶有限差分 WENO 格式的一般公式 WENO-JS。

Henrick 等指出,WENO 格式在一阶导数为 0 的极值点处精度会降低^[5],并通过引入一个映射函数,构造了 WENO-M 格式,提高了极值点处的收敛精度。Borges 等在满足 5 阶 WENO 格式精度的充分条件下,引入光滑因子差值^[6],构造出 5 阶 WENO-Z 格式,并且指出,适当增大 WENO 格式在间断附近间断模板对应的非线性权,可以减小耗散,增加精度,提高格式分辨率。通过对 5 阶 WENO 格式光滑因子和非线性权的分析,Shen 等指出,即使在光滑区域,原始的非线性权也会产生振荡,建议增加原光滑因子中的参数从而改善格式的收敛性和精度;提出一种改进的光滑因子,使得 WENO 格式精度有所改善;为了克服 5 阶 WENO 格式由光滑区至间断区或者相反情况下过渡区域的精度损失,在 WENO 格式中引入 4 阶的通量和高阶光滑因子,提高了格式在间断附近的精度^[7-10]。Arshed 等分析了 WENO 格式中线性权和非线性权分别产生的误差,对两种权进行改进从而准确求解含激波的宽频带波^[11]。武从海等提出一个新的 WENO 格式达到相应精度的充分条件,改变原始光滑因子内部系数并对 WENO 格式进行了优化^[12]。柴得林等通过引入间接光滑指数,优化了非线性权的构造,改进 WENO 格式计算性能,但其改进格式 WENO-E 的性能仍低于 WENO-Z 等优化格式^[13]。

本文在文献[13]所提 WENO-E 格式的基础上,考虑到整体模板光滑性对非线性权分配的影响,在光滑因子上增加表征整体模板光滑度对应项,从而改善格式的计算性能,获得 WENO-EX 格式。采用多种 WENO 格式对含激波典型基准问题进行数

值实验,并对结果进行对比分析。

1 WENO 格式介绍

WENO 格式是对多个备选模板上数值通量函数根据其光滑度取一定的权,作加权平均,得到所求通量。为方便分析比较,以下均对 5 阶 WENO 格式进行分析。

1.1 WENO 格式基本原理

以一维双曲守恒律方程为研究对象,即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

式中: u 为守恒变量; f 为通量函数。进行均匀网格划分 $a = x_{1/2} < x_{x/2} < \dots < x_{N+1/2} = b$, 给定单元 $\{x_i\} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, 对应单元尺度 $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ 和单元中心 $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$ 。

式(1)半离散型守恒差分形式为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) \quad (2)$$

式中: $f_{i-1/2}$ 、 $f_{i+1/2}$ 分别为单元 $\{x_i\}$ 左右界面通量值。根据文献[3],定义数值通量函数 $h(x)$, 满足 $f(u(x)) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi) d\xi$, 替代实际通量 $f(u(x))$, 可得界面通量导数值 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2} - h_{i-1/2})$, 代入式(2)得

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{x=x_i} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2} - h_{i-1/2}) \quad (3)$$

数值通量函数 $h_{i\pm 1/2}$ 可以基于节点通量值 f_i 以一定精度逼近,记为 $\hat{f}_{i\pm 1/2}$ 。在 5 阶 WENO 格式逼近 $\hat{f}_{i\pm 1/2}$ 过程中,整体模板选为 $\{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$, 记为 S^5 , 将其分成 3 个 3 点子模板,记为 S_0 、 S_1 、 S_2 , 模板示意图如图 1 所示。在 S_0 、 S_1 、 S_2 上使用多项式逼近数值通量,并在界面 $x_{i+1/2}$ 处取值可得相应界面通量值 $\hat{f}_{i+1/2}^0$ 、 $\hat{f}_{i+1/2}^1$ 、 $\hat{f}_{i+1/2}^2$ 。选取一定的非线性权 ω_m 进行加权平均,可得 S^5 上 $\hat{f}_{i+1/2}$ 逼近值

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{m=0}^2 \omega_m \hat{f}_{i+1/2}^m, \quad m = 0, 1, 2 \quad (4)$$

同理可得 $\hat{f}_{i-1/2}$ 的逼近值。

1.2 WENO 格式加权方法

Jiang 等构造 WENO 格式时引入表征模板光

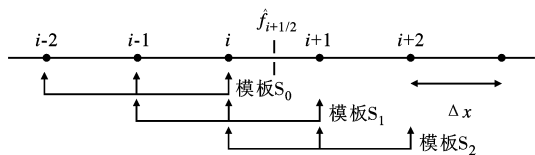


图1 5阶WENO格式模板示意图

滑程度的参数,即光滑因子^[2]

$$\beta_m = \sum_{l=1}^k \Delta x^{2l-1} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left(\frac{d^l}{dx^l} \hat{f}^m(x) \right)^2 dx \quad (5)$$

构造非线性权

$$\omega_m^{\text{JS}} = \frac{\tilde{\omega}_m}{\sum_{l=0}^2 \tilde{\omega}_l}, \quad \tilde{\omega}_m = \frac{d_m}{(\epsilon + \beta_m)^2} \quad (6)$$

式中: d_m 为理想权; ϵ 为极小量,一般取值为 10^{-6} 。

Borges等在WENO-JS格式光滑因子的基础上引入高阶小量参数 τ_5 构造光滑因子^[6],相应的格式记为WENO-Z。对应的光滑因子和非线性权构造为

$$\beta_m^Z = \frac{\beta_m + \epsilon}{\beta_m + \tau_5} \quad (7)$$

$$\omega_m^Z = \frac{\tilde{\omega}_m^Z}{\sum_{l=0}^2 \tilde{\omega}_l^Z}, \quad \tilde{\omega}_m^Z = \frac{d_m}{\beta_m^Z} \quad (8)$$

式中: $\tau_5 = \max(|\beta_0 - \beta_2|, \epsilon)$ 。

柴得林等在WENO-JS格式光滑因子的基础上引入间接光滑指数 $\bar{\beta}_m$,构造光滑因子和非线性权^[13],相应格式记为WENO-E。对应的光滑因子和非线性权构造为

$$\beta_m^E = \frac{\bar{\beta}_m + \epsilon}{\beta_m + \epsilon}, \quad \bar{\beta}_m = \sum_{l=0}^2 \beta_l, \quad l \neq m, \quad m = 0, 1, 2 \quad (9)$$

$$\omega_m^E = \frac{\tilde{\omega}_m^E}{\sum_{l=0}^2 \tilde{\omega}_l^E}, \quad \tilde{\omega}_m^E = d_m \beta_m^E \quad (10)$$

2 WENO格式加权方法改进

WENO-JS格式构造非线性权时,以理性权 d_m 、 β_m 的二次方作商得到,放大了不同模板光滑程度对相应权的影响,使得非线性权 ω_m 较大偏离了理想权 d_m ,对光滑区的计算误差较大^[7];而在间断附近间断模板权接近0,转变为单侧迎风格式,耗散过大,降低了格式分辨率^[11]。WENO-E格式考虑了各子模板光滑因子之间的相互影响,格式计算性能有所提高,但仍比WENO-Z格式差。本文在WENO-E格式的基础上,在光滑因子中引入表征整体模板光滑度的对应项,以求进一步改进格式性能,改进格

式记为WENO-EX。

2.1 WENO-EX格式的加权处理

为了防止分母为0,在光滑因子上分别加上正数小量 ϵ ,即

$$\beta'_m = \beta_m + \epsilon, \quad m = 0, 1, 2 \quad (11)$$

构造光滑因子

$$\beta_m^{\text{EX}} = \left(\sum_{l=0}^2 \beta'_l \right) / \beta'_m + K, \quad l \neq m, \quad m = 0, 1, 2 \quad (12)$$

式中: $K = A / (1/3 - \beta'_{\min} / \alpha' + \epsilon)^2$, A 为一常数, $\alpha' = \sum_{l=0}^2 \beta'_l$, $\beta'_{\min} = \min(\beta'_0, \beta'_1, \beta'_2)$ 。

式(12)中右端第1项与WENO-E格式中光滑因子基本相同,说明了子模板光滑因子之间的相互影响;第2项分母为子模板光滑因子中最小值在子模板光滑因子之和中所占比例 $\frac{\beta'_{\min}}{\alpha'}$ 与平均值 $\frac{1}{3}$ 之间

的差值, $\frac{\beta'_{\min}}{\alpha'}$ 越接近 $\frac{1}{3}$,各个子模板光滑程度越接近,而当网格足够小时各个子模板不可能同时含有间断,也就是说各个子模板只能同时光滑,因而第2项表征整体模板 S^5 的光滑程度。对于确定的 S^5 ,第2项为一定值,对于不同的 S^5 ,第2项各不相同, WENO-EX格式实现了在不同的整体模板上对格式耗散进行不同的控制,较之WENO-Z格式具有更灵活的耗散控制。新的光滑因子由两项组成,表征了子模板光滑因子与整体模板光滑性的相互影响。

非线性权 ω_m^{EX} 构造为

$$\omega_m^{\text{EX}} = \frac{\tilde{\omega}_m^{\text{EX}}}{\sum_{l=0}^2 \tilde{\omega}_l^{\text{EX}}}, \quad \tilde{\omega}_m^{\text{EX}} = d_m \beta_m^{\text{EX}} \quad (13)$$

新的光滑因子 β_m^{EX} 和非线性权 ω_m^{EX} 具有如下性质:当 S^5 整体光滑时,由于每个模板对应的 β'_m 比较接近,式(12)右端第1项接近2,第2项分母接近0,第2项为一个极大值,则子模板新的光滑因子 β_m^{EX} 主要由第2项决定,各 β_m^{EX} 差异不大,子模板光滑度的差异对权分布影响减小,非线性权 ω_m^{EX} 接近理想权;反之,当 S^5 中包含间断时,每个模板对应的 β'_m 相差较大,式(12)右端第1项差异较大,第2项为一有限值,则 β_m^{EX} 反映各个模板光滑度的差异,进而影响权分布。

常数 A 的取值决定了整体模板光滑性对子模板光滑因子的影响程度,随着 A 的增大,原始光滑因子 β'_m 的差异对非线性权分布的影响减小。在光滑区, A 值越大,非线性权越接近理想权,格式越接

近迎风中心格式,计算更为准确;在含间断区域,随着 A 的适当增大,间断模板对应的非线性权增大,格式耗散减小,格式分辨率有所提高,但如果 A 取值过大,则会引起振荡,格式失去本质无振荡的性质。大量计算结果表明,对于不同流场结构, A 的较优取值范围并不完全一致,综合考虑多种流场结构的计算效果, A 的取值范围为 $[0.1, 0.3]$,格式整体计算性能在该区间内对 A 取值并不敏感,对不同流场结构均可取得较好结果。

2.2 WENO-EX 精度分析

根据文献[5],非线性权 ω_m 使 5 阶 WENO 格式满足 5 阶精度的一个充分条件

$$\omega_m - d_m = O(\Delta x^3) \tag{14}$$

不考虑极值点,5 阶 WENO 格式中通过泰勒展开式可得 $\beta_m = \tilde{f}' \Delta x^2 (1 + O(\Delta x^2))$,考虑一般性,假设 $\beta_l \neq 0$,则

$$\frac{\beta_m - \beta_n}{\beta_l} = \frac{\tilde{f}' \Delta x^2 O(\Delta x^2)}{\tilde{f}' \Delta x^2 (1 + O(\Delta x^2))} = O(\Delta x^2)$$
$$m, n, l = 0, 1, 2, \quad m \neq n \tag{15}$$

特别地,若令 $\beta_l = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 \beta_l$,式(15)仍然成立。

令 $\epsilon = 0$ 则 $\beta'_m = \beta_m$,对于 WENO-EX 则有

$$\frac{\beta_n^{\text{EX}} - \beta_m^{\text{EX}}}{\beta_m^{\text{EX}}} = \left(\sum_{l=0}^2 \frac{\beta_l}{\beta_m} \right) \left(\frac{\beta_m - \beta_n}{\beta_n} \right) \left(\frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 \frac{\beta_l - \beta_{\min}}{3\beta_{\text{ave}}} \right)^2.$$
$$\left[\left(\sum_{l=0, l \neq m}^2 \frac{\beta_l}{\beta_m} \right) \left(\frac{1}{3} \sum_{l=0}^2 \frac{\beta_l - \beta_{\min}}{3\beta_{\text{ave}}} \right)^2 + A \right]^{-1} =$$
$$\frac{O(1)O(\Delta x^2)O(\Delta x^2)O(\Delta x^2)}{O(1)O(\Delta x^2)O(\Delta x^2) + O(1)} = O(\Delta x^6),$$
$$m, n = 0, 1, 2, \quad m \neq n$$
$$\omega_m^{\text{EX}} = \frac{d_m \beta_m^{\text{EX}}}{\sum_{l=0}^2 d_l \beta_l^{\text{EX}}} = d_m \left[1 + \sum_{l=0}^2 d_l \frac{\beta_l^{\text{EX}} - \beta_m^{\text{EX}}}{\beta_m^{\text{EX}}} \right]^{-1} =$$
$$d_m + O(\Delta x^6) \tag{16}$$

可知 WENO-EX 格式具有 5 阶精度。

当模板包含间断时,假设子模板 S_0 含有间断,而 S_1, S_2 光滑,则 β_0 远大于 β_1, β_2 ,对于权 ω_m^{EX} 有

$$\frac{\omega_0^{\text{EX}}}{\omega_1^{\text{EX}}} = \frac{d_0}{d_1} \left[\frac{\sum_{l=0, l \neq 0}^2 \beta_l / \beta_0 + K}{\sum_{l=0, l \neq 1}^2 \beta_l / \beta_1 + K} \right] \geq$$
$$\frac{d_0}{d_1} \left[\frac{\sum_{l=0, l \neq 0}^2 \beta_l / \beta_0}{\sum_{l=0, l \neq 1}^2 \beta_l / \beta_1} \right] = \frac{\omega_0^{\text{E}}}{\omega_1^{\text{E}}} \tag{17}$$

由于 $K = A / (1/3 - \beta'_{\min} / \alpha' + \epsilon)^2$,所以间断模板对应的非线性权随着 A 的增大而增大。

3 数值实验与分析

为了验证 WENO-EX 格式的计算效果,使用该格式分别求解线性迁移方程,模拟欧拉方程下的典型激波问题,并将结果与 WENO-JS、WENO-E、WENO-Z 格式的对应结果进行对比分析。算例中时间离散均采用 3 阶 Runge-Kutta 格式,采用 Lax-Friedrichs 通量分裂^[3],相关物理量均为无量纲量。

3.1 线性迁移方程

对线性迁移方程 $u_t + u_x = 0$,采用各种 WENO 格式分别取光滑与间断初始条件进行数值模拟,边界条件取周期性边界条件。

3.1.1 光滑问题 对线性迁移方程 $u_t + u_x = 0$,初始条件为 $u(x, 0) = \sin(\pi x) (-1 \leq x \leq 1)$,对 $t = 1$ 时的计算结果进行分析对比,计算结果误差及收敛精度如表 1 所示,结果表明各格式均有 5 阶精度。

3.1.2 间断问题 根据文献[4],对 $u_t + u_x = 0$ 取初始条件为如下间断问题,波形依次由高斯分布曲线、矩形波、三角形波、半椭圆组成,即

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6} [G(x, \beta, z - \delta) + 4G(x, \beta, z) + G(x, \beta, z + \delta)], \\ \quad x \in [-0.8, -0.6] \\ 1, \quad x \in [-0.4, -0.2] \\ 1 - |10(x - 0.1)|, \quad x \in [0, 0.2] \\ \frac{1}{6} [F(x, \alpha, a - \delta) + 4F(x, \alpha, a) + F(x, \alpha, a + \delta)], \\ \quad x \in [0.4, 0.6] \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases} \tag{18}$$

式中: $z = -0.7; \delta = 0.005; \beta = \frac{\lg 2}{36\delta^2}; a = 0.5; \alpha = 10;$
 $G(x, \beta, z) = e^{-\beta(x-z)^2}; F(x, \alpha, a) = (\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0))^{1/2}。$

取网格数为 200、 $t = 8$ 时,各种格式的计算结果如图 2 所示。由图 2 可知,各格式均较好保持了本质无振荡的特性,WENO-EX 格式计算结果接近 WENO-Z 格式,取得了与其相当的计算结果,而二者整体均优于 WENO-E 和 WENO-JS 格式。这是由于 WENO-EX 格式在间断附近对含间断模板配置的非线性权更大,具有更小的耗散,对转角和劈间等结构的分辨率更高。此外,由于 WENO-EX 格式构造过程中没有考虑极值点的影响,因而其对半椭圆波顶点的捕捉略差。

表 1 线性迁移方程计算误差与收敛精度

格式	网格数	1 范数误差	1 范数精度阶	∞ 范数误差	∞ 范数精度阶
WENO-JS	20	$7.390\ 6\times 10^{-4}$		$1.455\ 6\times 10^{-3}$	
	40	$2.220\ 1\times 10^{-5}$	5.06	$4.588\ 1\times 10^{-5}$	4.99
	80	$6.893\ 2\times 10^{-7}$	5.01	$1.455\ 5\times 10^{-6}$	4.98
	160	$2.155\ 0\times 10^{-8}$	5.00	$4.159\ 0\times 10^{-8}$	5.13
WENO-E	20	$5.673\ 3\times 10^{-4}$		$1.116\ 2\times 10^{-3}$	
	40	$1.728\ 7\times 10^{-5}$	5.04	$3.546\ 0\times 10^{-5}$	4.98
	80	$5.416\ 4\times 10^{-7}$	5.00	$1.132\ 0\times 10^{-6}$	4.97
	160	$1.695\ 0\times 10^{-8}$	5.00	$3.268\ 0\times 10^{-8}$	5.11
WENO-EX	20	$1.000\ 5\times 10^{-4}$		$1.555\ 4\times 10^{-4}$	
	40	$3.121\ 9\times 10^{-6}$	5.00	$4.987\ 0\times 10^{-6}$	4.96
	80	$9.852\ 0\times 10^{-8}$	4.99	$1.564\ 4\times 10^{-7}$	4.99
	160	$3.110\ 0\times 10^{-9}$	4.99	$4.970\ 0\times 10^{-9}$	4.98
WENO-Z	20	$1.016\ 7\times 10^{-4}$		$1.797\ 5\times 10^{-4}$	4.96
	40	$3.121\ 8\times 10^{-6}$	5.03	$5.124\ 4\times 10^{-6}$	5.13
	80	$9.851\ 0\times 10^{-8}$	4.99	$1.564\ 5\times 10^{-7}$	5.03
	160	$3.110\ 0\times 10^{-9}$	4.99	$4.970\ 0\times 10^{-9}$	4.98

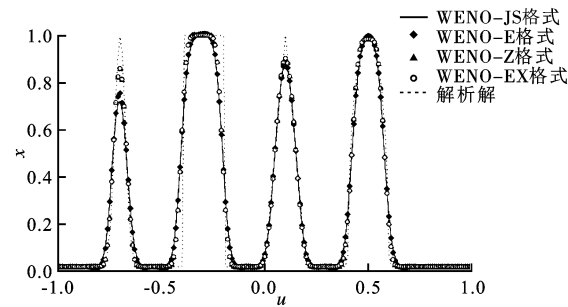


图 2 $t=8$ 时网格数为 200 的线性迁移方程计算结果

3.2 欧拉方程

为考察 WENO-EX 格式的计算性能,对二维欧拉方程含激波的典型相关问题进行计算。二维欧拉方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

式中: $\boldsymbol{U}=(\rho,\rho u,\rho v,E)^{\text{T}}$; $\boldsymbol{F}=(\rho u,\rho u^2+p,\rho uv,u(E+p))^{\text{T}}$; $\boldsymbol{G}=(\rho v,\rho uv,\rho v^2+p,v(E+p))^{\text{T}}$; ρ,u,p,E 为密度、速度、压力、能量,且 $p=(\gamma-1)(E-\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2))$,取 $\gamma=1.4$ 。

3.2.1 双马赫反射问题 以二维欧拉方程为控制方程,采用不同 WENO 格式分别计算双马赫反射问题^[4]。该问题表征了一个向右运动、马赫数为 10 的强激波与顶角为 60°的楔形体作用发生的壁面反射问题。激波与楔形体上下壁面夹角均为 60°,选

取楔形体上壁面为计算区域下表面,壁面起始位置 $x=\frac{1}{6}$,计算区域取为 $[0,4]\times[0,1]$ 。激波前参数 $(\rho,u,v,p)=(1.4,0,0,1.0)$ 。库朗数取为 0.5,计算区域上表面条件由激波实际位置决定,下表面 1/6 左侧取波后条件,右侧取反射边界条件,计算网格数为 600×150 。

当 $t=0.2$ 时,相同网格下 WENO-JS、WENO-E、WENO-Z、WENO-EX 格式对应计算结果密度分布局部放大图如图 3 所示,图中等值线取 30 条,从 1.731 至 20.92 均匀分布。由图 3 可知,各格式均可较好地捕捉激波的双马赫反射,但比较流场的细小结构,WENO-EX、WENO-Z 计算结果接近,能捕捉到壁面附近的卷曲结构,说明 WENO-EX、WENO-Z 格式对流场的分辨率高于 WENO-E、WENO-JS 格式。

3.2.2 激波旋涡相互作用问题 以二维欧拉方程为控制方程,采用不同 WENO 格式分别计算激波旋涡相互作用问题。该问题表征了马赫数为 1.1 的驻激波与通过其旋涡的相互作用^[7]。取计算区域为 $[0,2]\times[0,1]$,激波垂直于 x 轴位于 0.5 处,激波左侧参数 $(\rho,u,v,p)=(1.0,1.1,\gamma^{1/2},0,1.0)$,旋涡以 $(0.25,0.5)$ 为中心位于激波左侧,并以速度 (u,v) 、温度 $T=p/\rho$ 、熵 $S=\ln(p/\rho^\gamma)$ 的扰动量形式附加到主流参数上,即

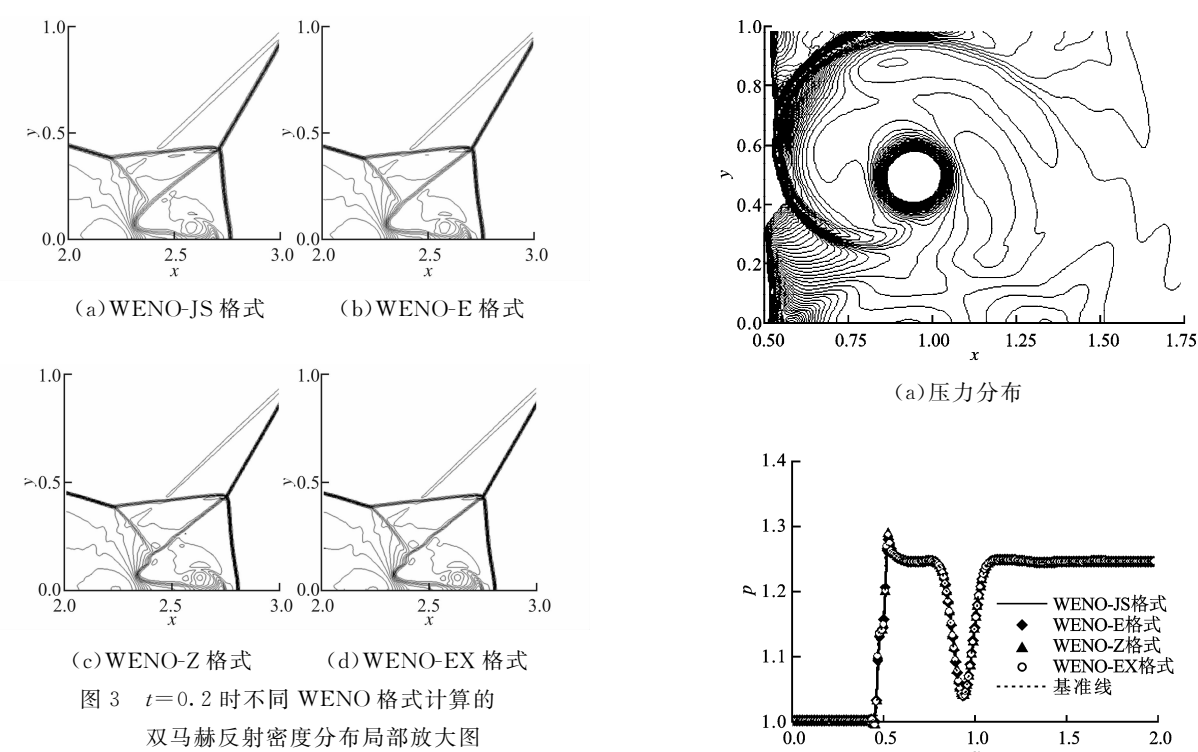


图 3 $t=0.2$ 时不同 WENO 格式计算的双马赫反射密度分布局部放大图

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \varepsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \sin\theta, & \tilde{v} &= -\varepsilon \tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \cos\theta \\ \tilde{T} &= -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2 e^{2\alpha(1-\tau^2)}}{4\alpha\gamma}, & \tilde{S} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中: $\tau=r/r_c$ 为对应最大旋涡强度的半径, $r_c=((x-x_c)^2+(y-y_c)^2)^{1/2}$; ε 为旋涡的强度; α 为控制旋涡的衰减速度的量。

计算中取 $\varepsilon=0.3, \alpha=0.204, r_c=0.05, \gamma=1.4$, 库朗数为 0.5, 计算区域上下表面采用反射边界条件, 各格式计算网格数为 250×100 。同时, 采用 WENO-JS 格式以 $1\,000 \times 400$ 网格进行计算, 将其作为基准解。

当 $t=0.6$ 时采用 WENO-EX 格式所得计算结果压力分布如图 4a 所示。图中等值线取 90 条, 从 1.19 至 1.37 均匀分布, 计算结果与文献[7]计算结果吻合的很好。图 4b 给出了网格数为 250×100 下 WENO-JS、WENO-E、WENO-Z、WENO-EX 格式所得结果在水平中心线上压力分布, 各格式压力分布接近。水平中心线压力分布局部放大图如图 5 所示。由图 5 可知: 在激波附近, 较之 WENO-JS、WENO-E 格式, WENO-EX 对激波的捕捉更为陡峭, 结果接近 WENO-Z 格式计算结果; 在涡核附近, WENO-JS 计算所得压力偏大; 而 WENO-E 计算结果在涡核左侧偏小, 右侧偏大; 整体而言, WENO-EX 格式与 WENO-Z 计算结果基本相同, 对涡核附近压力的计算最为准确。

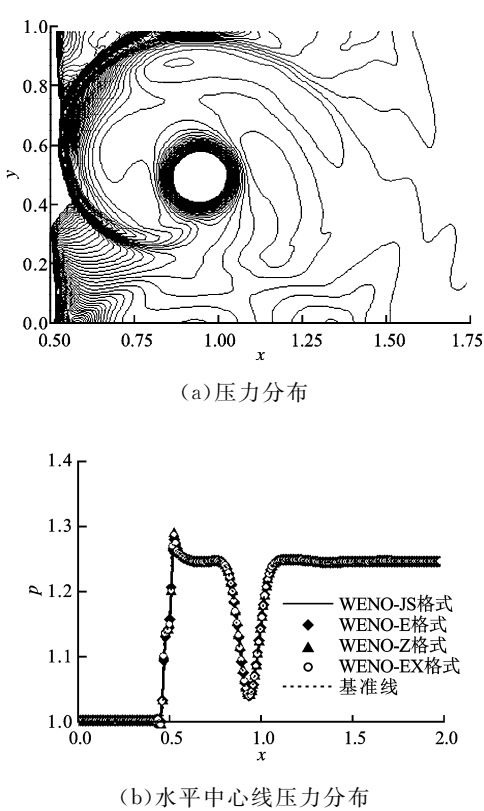


图 4 $t=0.6$ 时不同 WENO 格式计算的激波旋涡相互作用压力分布

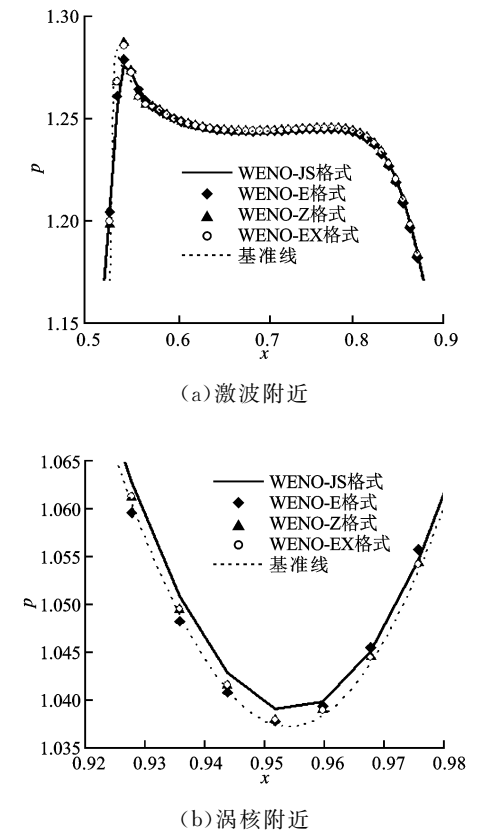


图 5 水平中心线压力分布局部放大图

4 结 论

本文在经典 WENO 格式的基础上,提出了 WENO-EX 格式,该格式在光滑因子中构造了表征整体模板光滑度的相关项,引入了评价参数 A ,阐述了整体模板光滑性对各子模板光滑因子的影响。结合大量数值实验和分析,给定了 A 的建议取值范围为 $[0.1, 0.3]$ 。较之 WENO-Z 格式, WENO-EX 从模板光滑度之间相互作用的全新角度进行分析,实现了更灵活的耗散控制。

数值实验表明, WENO-EX 格式对于光滑问题的计算可达到设计精度,但相同网格下,其计算误差与 WENO-Z 格式基本相同,远小于 WENO-JS、WENO-E 格式。对于间断和流场细节的分辨率, WENO-EX 格式与 WENO-Z 格式接近,明显高于 WENO-JS、WENO-E 格式。

参考文献:

- [1] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(1): 200-212.
- [2] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439-471.
- [3] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes: II [J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 83(1): 32-78.
- [4] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202-228.
- [5] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 542-567.
- [6] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3191-3211.
- [7] SHEN Y Q, ZHA G C. Improvement of the WENO scheme smoothness estimator [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 64(6): 653-675.
- [8] SHEN Y Q, ZHA G C. Improvement of weighted es-

entially non-oscillatory schemes near discontinuities [J]. *Computers & Fluids*, 2014, 96(12): 1-9.

- [9] SHEN Y Q, ZHA G, WANG B. Improvement of stability and accuracy for weighted essentially nonoscillatory scheme [J]. *AIAA Journal*, 2009, 47(2): 331-344.
- [10] SHEN Y Q, WANG R Q, LIAO H Z. A fifth-order accurate weighted ENN difference scheme and its applications [J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2001, 19(5): 531-538.
- [11] ARSHED G M, HOFFMANN K A. Minimizing errors from linear and nonlinear weights of WENO scheme for broadband applications with shock waves [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 246: 58-77.
- [12] 武从海, 赵宁. 基于新光滑因子的 WENO5 格式 [J]. *计算数学*, 2011, 33(3): 257-268.
WU Conghai, ZHAO Ning. WENO5 scheme based on a new smoothness indicator [J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2011, 33(3): 257-268.
- [13] 柴得林, 李雨润, 孙中国, 等. WENO 格式权重分析与改进 [J]. *国防科技大学学报*, 2016, 38(4): 39-45.
CHAI Delin, LI Yurun, SUN Zhongguo. Analysis and improvement of weights in WENO schemes [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2016, 38(4): 39-45.

[本刊相关文献链接]

- 赵家毅, 王志恒, 席光, 等. 大预旋下离心压缩机进口结构与导叶掠角的改进研究. 2017, 51(11): 1-6. [doi: 10.7652/xjtuxb201711001]
- 张鹏飞, 王志恒, 席光. 用于柔性转子主动控制的等几何 Timoshenko 梁模型及其数值验证. 2016, 50(10): 139-146. [doi: 10.7652/xjtuxb201610021]
- 兰艾青, 王志恒, 于洪石, 等. 合成射流激励位置对控制翼型大攻角分离流动影响的数值研究. 2016, 50(7): 110-117. [doi: 10.7652/xjtuxb201607017]
- 姚尔人, 王焕然, 席光. 一种压缩空气储能与内燃机技术耦合的冷热电联产系统. 2016, 50(1): 22-27. [doi: 10.7652/xjtuxb201601004]
- 孙晔晨, 田玉宝, 席光, 等. 三元叶片型面造型对离心压缩机叶轮气动性能影响的数值研究. 2015, 49(11): 135-141. [doi: 10.7652/xjtuxb201511022]
- 赵会晶, 王志恒, 唐永洪, 等. 叶片前缘倾掠对离心叶轮气动性能的影响. 2015, 49(11): 1-7. [doi: 10.7652/xjtuxb201511001]

(编辑 赵炜)