

DOI: 10.7652/xjtub201808020

流体拓扑优化的参数选择与分析

董馨, 刘小民

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对低雷诺数条件下翼型拓扑优化问题, 基于改进的水平集方法研究了流体拓扑优化过程中参数选择对计算速度和结果准确性的影响。引入新参数 m 描述每次迭代时水平集函数进化的次数, 用以控制进化的准确性与计算速度; 通过数值推导选取适当的时间步长系数 k , 获得了影响数值计算收敛性及速度的参数选取规律。模拟计算研究结果表明: 较大的 m 和 k 会导致计算收敛不稳定, 无法获得精确的收敛数据; 较小的 m 和 k 值会降低计算速度。分别建立 m 和 k 与迭代步数的函数, 在满足优化准确性的前提下, 可将收敛速度分别提高 85% 和 80%, 同时改进 m 和 k 的选取方式, 可将收敛速度提高 96%, 采用改进的水平集拓扑优化方法有效地提高了计算收敛速度和收敛精度。

关键词: 拓扑优化; 水平集方法; 时间步长; 翼型拓扑优化

中图分类号: O351.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2018)08-0132-07

Selection and Analysis of Parameters for Fluid Topology Optimization

DONG Xin, LIU Xiaomin

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Influences of parameter selection on the calculation speed and the accuracy of the results in the process of fluid topology optimization are studied for the airfoil topology optimization problem with low Reynolds number on the basis of the improved level set method. A new parameter m is introduced to describe the evolution times of the level set function in every iterative step and to control the accuracy and speed of evolution. An appropriate time step coefficient k is selected by numerical derivation, and the parameter selection rules that affect the convergence and speed of the numerical calculation are obtained. Results show that larger values of m and k will lead to unstable convergence and inaccurate convergence data, while smaller values of m and k will reduce the calculation speed. Functions of the parameters m and k and iterative steps are established, respectively, and the convergence speed increases by 85% and 80%, respectively on the premise of satisfying the accuracy of optimization. When selection ways of m and k are improved at the same time, the convergence speed will increase by 96%.

Keywords: topology optimization; level set method; time step; airfoil topology optimization

水平集方法具有优秀的运动界面捕捉能力^[1]。任晓辉和封建湖提出了一种不用求解复杂 Hamilton-Jacobi 方程的水平集方法, 在对 Heaviside 函数

正则化处理中, 基于获得的形状导数和拓扑导数的相关信息加快收敛速度^[2]; 段献葆和秦新强结合了传统的形状灵敏度分析与改进的水平集方法, 发展

收稿日期: 2018-01-08。 作者简介: 董馨(1995—), 女, 博士生; 刘小民(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51676152)。

网络出版时间: 2018-06-22 网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20180622.1721.008.html>

了一种无需网格重新剖分的水平集方法,减少了运算工作量^[3];张彬和刘小民提出了一种可以保持界面位置不动的新型隐式重新初始化的水平集方法,这种新型的水平集方法只需使时间步长满足原始的 CFL 条件,保证了界面附近水平集函数节点值符号不变,从而实现高效的优化^[4];Dunning 等基于水平集拓扑优化方法发展了适用于非结构化三维网格的快速行进法和迎风格式,增加水平集方法的鲁棒性和高效性^[5];Duan 等提出了一种自适应网格方法来求解不可压缩 Navier-Stokes 的拓扑优化问题,将隐式表示的材料分布信息作为设计变量,并将计算量集中在界面附近,从而显著降低了计算代价^[6]。Shintaro 等提出了一种基于水平集方法的自由灰度拓扑优化方法,在结构边界处运用可适应网格,它通过移动欧拉网格的节点来保持水平集函数,从而改善网格质量^[7]。但是他们没有对水平集函数演化中的参数和时间步长参数进行选择分析和研究,在保证优化精度的前提下,合理的参数可使改进的水平集方法实现高效计算,充分发挥该方法的优点。

通过对改进的水平集方法^[8]中的参数进行选择和分析,研究优化过程中迭代和收敛参数选择对优化进程的影响,使计算能够快速、稳定收敛,达到最优,同时保证优化结果的精度。改进的水平集方法采用了保持界面位置不动的新型隐式重新初始化水平集方法,结合无需样条参数化网格重新划分的水平集优化方法。

1 数学模型

Ω 代表流体域,它是一个具有连续边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的开区域,建立二维不可压缩 Stokes 方程如下

$$\left. \begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \forall x \in \Omega \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \forall x \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, & \forall x \in \Gamma_D \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \forall x \in \Gamma_S \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为流体的流动速度; p 为流体压强; $\mathbf{f}$ 为体积力; ν 为动力黏性系数。 Γ_S 是流体与固体间的交界面; Γ_D 是除 Γ_S 外的 Dirichlet 边界,有 $\Gamma = \Gamma_S \cup \Gamma_D$, $\mathbf{u}_0$ 是边界 Γ_D 上已知的速度分布。

本文研究的优化问题可描述为

$$\min_{\Omega \in D} J(\mathbf{u}, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \quad (2)$$

式中: $\mathbf{u}$ 满足状态式(1), D 是优化问题的工作区域。

水平集函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 满足

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &> 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}, t) &< 0, & \forall \mathbf{x} \notin \Omega \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

水平集函数对运动界面进行追踪的基本思想如下:用高一维空间中的水平集函数去描述低一维空间中的运动边界,那么水平集函数的零等值线即为所追踪的运动边界。

水平集函数演化过程中区域界面始终表达为

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4)$$

对上式两端同时对 t 求物质导数,可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \mathbf{x}'(t) = 0 \quad (5)$$

取 $V_n = \mathbf{x}'(t)$ 为界面处的水平集法向速度,水平集演化方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n |\nabla \phi| = 0 \quad (6)$$

2 数值方法

2.1 优化步骤

基于改进水平集方法的流体拓扑优化执行过程如下,其中 n 代表第 n 次优化迭代。

步骤 1 初始化原始流体区域,在设计区域内将水平集函数初始化为符号距离函数;

步骤 2 对流体区域进行网格重新划分;

步骤 3 求解流动控制方程和优化共轭方程;

步骤 4 求解水平集法向速度 V_n ;

步骤 5 将 V_n 由界面扩展到整个设计区域;

步骤 6 执行面积约束;

步骤 7 求解水平集方程,实现水平集函数演化;

步骤 8 将水平集函数重新初始化为符号距离函数。

2.2 时间步长

在水平集函数求解过程中,为了防止数值振荡,本文方程的离散采用一阶 Essentially Non-Oscillatory(ENO)格式^[9-10]。下面给出上述二维问题的离散形式

$$\left. \begin{aligned} a &= D_x^- \phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x} \\ b &= D_x^+ \phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n}{\Delta x} \\ c &= D_y^- \phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y} \\ d &= D_y^+ \phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: x 和 y 分别代表网格的横向和纵向坐标。下标 i 代表 x 方向第 i 个网格节点,下标 j 代表 y 方向

第 j 个网格节点。

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \Delta t [\max(S_{i,j}, 0) \nabla^+ + \min(S_{i,j}, 0) \nabla^-] \quad (8)$$

其中 ∇^+ 和 ∇^- 的离散形式为

$$\nabla^+ = \frac{\sqrt{\max[(a^+)^2, (b^-)^2] + \max[(c^+)^2, (d^-)^2]} - 1}{\Delta x} \quad (9)$$

$$\nabla^- = \frac{\sqrt{\max[(a^-)^2, (b^+)^2] + \max[(c^-)^2, (d^+)^2]} - 1}{\Delta x} \quad (10)$$

其中 $x^+ = \max(x, 0)$

$$S_{i,j} = \frac{\phi_{i,j}^0}{\sqrt{(\phi_{i,j}^0)^2 + (\epsilon_{i,j})^2}} \quad (11)$$

式中: $S(\phi)$ 是符号函数; ϵ 是光滑参数, $(\epsilon_{i,j})^2$ 采用中心差分进行数值离散, 离散形式为

$$(\epsilon_{i,j})^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right)^2} - \frac{1}{\Delta x} |\phi_{i,j}^0| \right)^2 (\Delta x)^2 \quad (12)$$

其中时间步长满足下式

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|S_{i,j}|) \leq \frac{1}{2} \quad (13)$$

2.3 水平集函数重新初始化

隐式重新初始化方法是通过迭代求解下式的偏微分方程来实现的^[11-12]。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = S(\phi_0) \left(1 - \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2} \right) \quad (14)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (15)$$

为了数值求解的需要, 对 $S(\phi_0)$ 光滑化

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \epsilon^2}} \quad (16)$$

ϵ 的取值为

$$(\epsilon_{i,j})^2 = \min \left[\left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|_{i,j} - \frac{1}{\Delta x} |\phi_{i,j}| \right)^2, \left(|\nabla \phi|_{i,j} \right)^2 \right] (\Delta x)^2 \quad (17)$$

3 数值算例

本算例研究了最小能量耗散问题的拓扑优化, 相似的问题在文献[13-14]中研究过。特征尺度 L 为入口宽度, 特征速度 U 为入口处平均速度。如图1, 拓扑优化的工作区域是一个 1×1 的正方形区域, 4条边上都是具有 Dirichlet 边界条件的边界 Γ_D 。以 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 表示速度, 无量纲变量 $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U = (u_1^*, u_2^*) = (u_1/U, u_2/U)$, 在4条边上都有 $u_1^* = 1$,

$u_2^* = 0$, 固液界面是具有无滑移边界条件的边界 Γ_s 。此优化问题的初始形状为一个位于工作区域中间的 0.8×0.6 带圆角的矩形结构, 四角的圆角半径为 0.23。这里将针对 $Re = 0.2$ 的优化问题进行研究, 计算采用的计算机型号为 DELL Precision T7910 服务器, 内存 256 GB, CPU 型号 E5-2699v3。

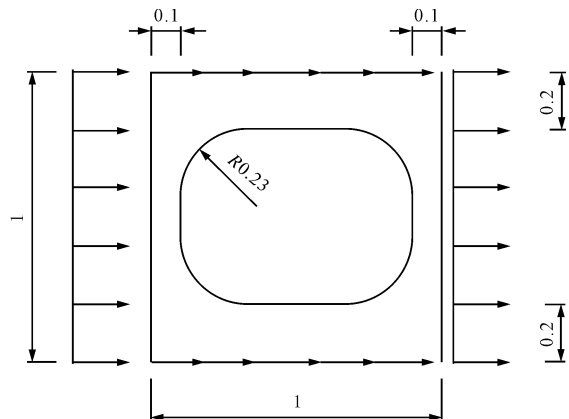


图1 拓扑优化的工作区域与边界条件

图2给出了翼型优化达到最优时的流线分布情况, 从图2中可以看出本文结果与文献[15]结果吻合良好。

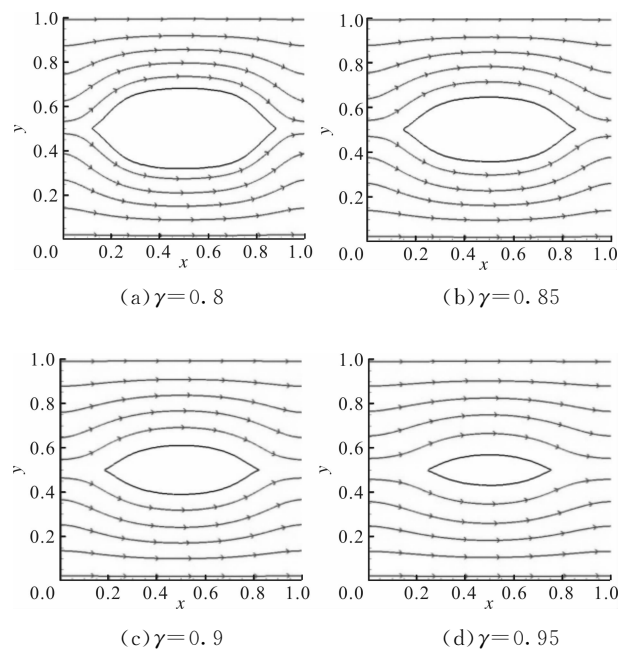


图2 最优形状及其流线分布

3.1 水平集函数进化次数的分析

在水平集函数演化过程中, 每次优化迭代时进行多次水平集函数进化会带来一定的偏差, 因此进行水平集函数重新初始化, 以消除水平集函数在演化过程中偏离符号距离函数的现象。

引入参数 m 定义为每次迭代时水平集函数的

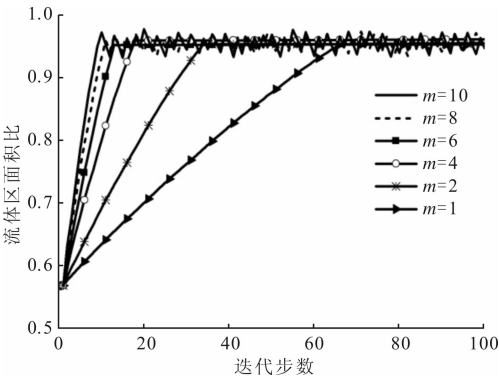
进化次数。分别选取 m 值为 10、8、6、4、2 和 1 这 6 组数据进行研究,如图 3、图 4 所示,分别为流体区面积比和其波动值随着迭代步数 n 的变化。为了实现在优化前期加速计算,在优化需要精确结果的地方提高准确度,使计算程序能够达到自动选择合理参数的目的,将水平集函数进化次数 m 与迭代步数 n 的关系分别采用分段线性函数(式(18))、三次函数(式(19))和幂函数(式(20))描述如下

$$m = \begin{cases} -\frac{1}{6}n + 12, & n \leq 71 \\ 1, & n > 71 \end{cases} \quad (18)$$

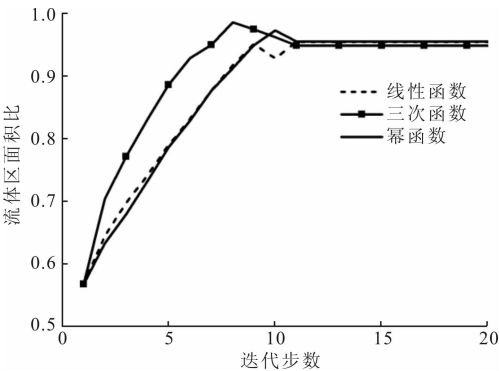
$$m = \begin{cases} -0.000\,444\,7n^3 + 0.053\,75n^2 - 1.96n + 24.1, & n \leq 66 \\ 1, & n > 66 \end{cases} \quad (19)$$

$$m = \begin{cases} 789.4n^{-1.956} + 0.997, & n \geq 10 \\ 10, & n < 10 \end{cases} \quad (20)$$

由图 3 可看出,流体区面积由初始面积逐渐上升至约束面积,之后基本保持不变直到迭代收敛。当 m 取值分别为 10 和 8 时,迭代收敛后在面积比为 0.95 附近呈现锯齿状的波动,原因是较大的 m 值导致结构参数(面积比和目标函数)变化较大,面积增加速度太快而导致流场面积大于目标面积,较



(a) m 取单一值



(b) m 取函数

图 3 不同 m 取值流体区面积比随迭代步数的变化

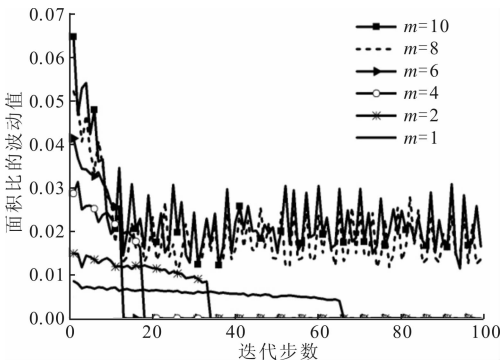


图 4 不同 m 取值时流体区面积比的波动值随迭代步数的变化

大面积对应着较小目标函数,约束的施加使得面积反向变化,面积减小,目标函数增大。继续演化,面积又增大到大于目标面积,如此反复,形成了锯齿状演化曲线。参数 m 分别取值为 6、4、2 和 1 时都可以达到稳定收敛,收敛速度依次下降,收敛时的迭代步数与计算时间见表 1。

表 1 m 取单一值时的收敛指标

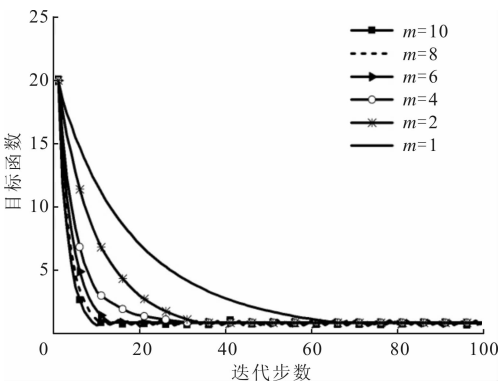
m	迭代步数	迭代时间/s
10	10	3 458
8	11	3 704
6	13	4 746
4	18	5 981
2	34	11 558
1	66	20 930

图 4 中面积比的波动值,即迭代第 n 步与 $n-1$ 步的面积比差值的绝对值。 m 取 10 和 8 时的波动值较大,且收敛之后的波动也较大。而其他参数的波动值都随着迭代步数大体呈下降趋势,尤其在收敛时有近乎竖直的下降梯度,收敛之后波动值接近 0 并呈现稳定趋势。

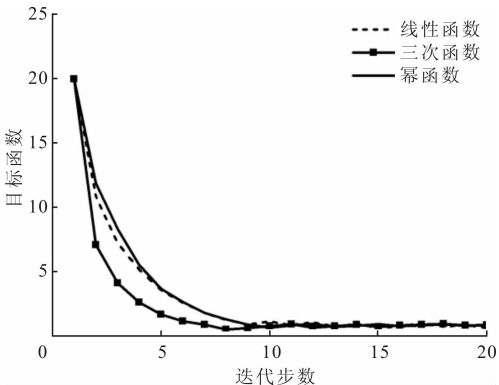
目标函数随迭代步数的收敛如图 5 所示,目标函数值随着迭代次数的增加而下降,达到 0.85 时几乎不再随着迭代次数发生变化,此时翼型绕流能量耗散值最小,翼型结构为最优拓扑结构。当 m 取值为 10 和 8 时,收敛到最优结果时产生了波动,收敛情况不理想。线性函数、三次函数与幂函数均在第 13 步时达到收敛,其中三次函数在优化过程中收敛速度最快,这是由于它在收敛前期有较大的 m ,收敛后 m 逐渐减小为 1,使得收敛趋于稳定。

3.2 时间步长的分析

时间步长的选择对于程序的收敛速度和计算速度起着至关重要的作用。时间步长过大会导致不满

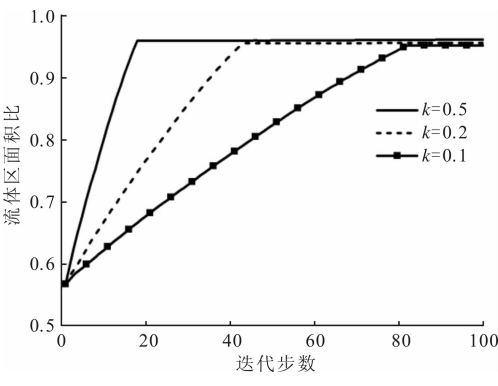


(a) m 取单一值

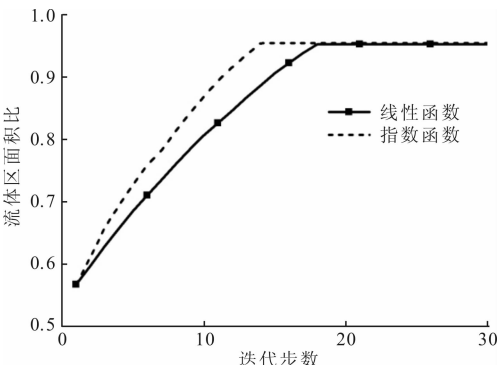


(b) m 取函数

图 5 不同 m 取值下目标函数随迭代步数的变化



(a) k 取单一值



(b) k 取函数

图 6 不同 k 取值流体区面积比随迭代步数的变化

足 courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件, 程序计算不稳定, 最后达不到收敛指标; 而时间步长过小又会导致计算耗时、收敛速度太慢。因此, 选取合适的时间步长尤为重要。

本文计算中时间步长设置为: $\Delta t = k \min(\Delta x, \Delta y)$, 其中 k 为常数, 为满足 CFL 条件, $k \leq 0.5$ 。 k 分别选取 0.5、0.2 和 0.1 时进行计算研究, 流体区面积比和波动值随迭代步数的关系分别如图 6 和图 7 所示, 迭代收敛步数和计算时间见表 2。 为了实现优化前期快速达到最优值, 优化后期稳定收敛, 使计算程序能够自动选择合理参数, 将描述时间步长的参数 k 与迭代步数 n 的关系分别表达为线性函数和指数函数, 公式如下

$$k = -0.006n + 0.55, \quad n \leq 99 \tag{21}$$

$$k = 0.833e^{-0.03n} \tag{22}$$

由图 6 可看出, 流体区面积由初始面积逐渐上升, 之后由于加入了面积约束, 保持面积比基本不变直到迭代收敛。图 7 中的波动值大体呈现下降趋势, 最后接近 0 稳定收敛, 随着 k 取值的减小, 波动更平缓但收敛更慢。

图 8 为目标函数随迭代步数的变化, 目标函数

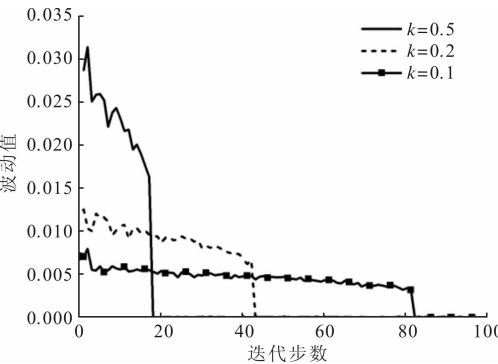
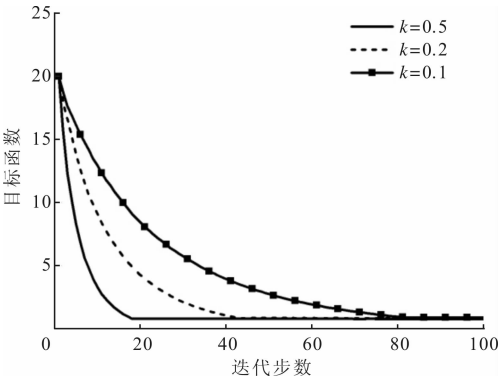


图 7 不同 k 取值时流体区面积比的波动值随迭代步数的变化

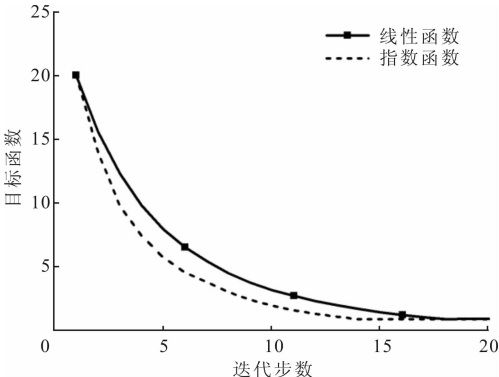
随着迭代次数的增加而下降, 最后逐渐稳定保持目标函数不变, 能量耗散数为 0.85, 此时可得到最优拓扑结构; 线性函数与指数函数分别在第 18 步与第 14 步达到收敛, 由于它们随着迭代步数变化, 因此在计算前期可以达到快速收敛的目的, 在后期防止

表 2 k 取单一值时的收敛指标

k	迭代步数	迭代时间/s
0.5	18	5 415
0.2	43	14 710
0.1	82	27 860



(a) k 取单一值

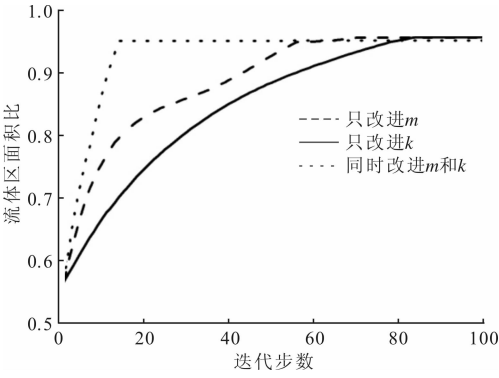


(b) k 取函数

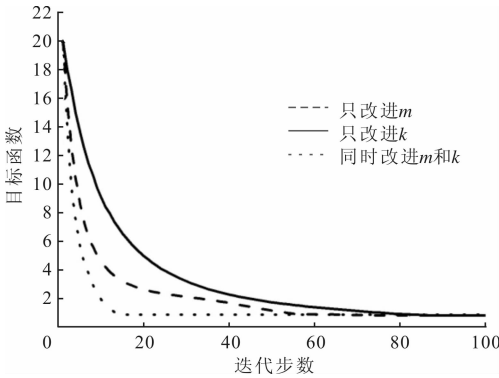
图 8 不同 k 取值下目标函数值随迭代步数的变化

因为时间步长过大引起的数值不稳定现象。

综合选取两个参数对优化过程的影响规律,流体区面积比及目标函数随迭代步数的变化情况如图 9 所示。从图 9a 中可以看出,流体区面积随迭代步数的增加逐渐上升至面积约束值,达到稳定收敛,收敛速度最慢的为只改进 k 的方案,其次为只改进 m 的方案,最快的为同时改进 m 和 k 的选取方式。由图 9b 可得,目标函数在优化前期下降速度最快,接近收敛时目标函数变化逐渐减小,直至稳定收敛。同时改进 m 和 k 的选取方式是在优化之初不需要精确的收敛数值的情况下,增加每一次迭代时水平



(a) 参数改进后的流体区面积比



(b) 参数改进后的目标函数

图 9 参数改进后的面积比及目标函数随迭代步数的变化

集函数的进化次数从而提高计算速度,同时时间步长增加使迭代速度加快,随着计算进行,由于需要获取精确的收敛数值,迭代速度减慢。改进前与改进后的收敛指标见表 3。参数选取方式如下:改进前 $m=1,k=0.1$;只改进 m 的选取方式为三次函数, $k=0.1$ 不变;只改进 k 取指数函数, $m=1$;改进 m 选取为三次函数, k 选取指数函数。经过合理选择 m 和 k ,收敛速度提高 96%。

表 3 参数改进前后的收敛指标

改进方式	迭代步数	迭代时间/s
只改进 m	56	8 752
只改进 k	77	11 909
同时改进 m 和 k	14	2 137
改进前	177	57 661

4 结 论

针对低雷诺数流动条件下二维翼型拓扑优化,引入了水平集函数进化次数 m ,研究了不同 m 时面积比与迭代步数的变化关系,并分析了收敛指标与波动值;研究了不同时间步长时面积比与迭代步数的变化关系,揭示了波动值与迭代步数的变化关系,并列出了收敛指标。获得的主要结论如下。

(1)在相同时间步长下,随着水平集函数进化次数 m 的增大,收敛速度变快,面积比的波动值变大。当 $m>6$,具有收敛速度快和面积比跳跃性大的特点,但达到最优面积比后收敛变得不稳定,无法得到稳定的最优形状。可在优化初期选用较大 m ,根据迭代步数的增长减小该值。

(2)在相同水平集函数进化次数下,当时间步长增大时,收敛速度和波动值都随着迭代步数的增大

而增大,达到最优面积比时稳定收敛。

(3)针对所需优化精确结果和收敛速度的不同,可在不同面积比下选取适当 m 和 k ,在最初优化时采用较大的水平集进化次数和时间步长,根据迭代步数增加逐渐采用较小的水平集进化次数和时间步长,同时实现快速迭代和较容易优化收敛的结果。

参考文献:

- [1] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilt-Jacobi formulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49.
- [2] 任晓辉, 封建湖. 基于水平集方法的连续体结构拓扑优化 [J]. *建筑科学与工程学报*, 2007, 24(1): 74-79.
REN Xiaohui, FENG Jianhu. Topology optimization of continuum structure based on level set method [J]. *Journal of Architecture and Civil Engineering*, 2007, 24(1): 74-79.
- [3] 段献葆, 秦新强. 一种改进的水平集方法在 Navier-Stokes 问题形状优化中的应用 [J]. *工程数学学报*, 2010, 27(2): 242-248.
DUAN Xianbao, QIN Xinqiang. An improved level set method for the shape optimization of Navier-Stokes problems [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2010, 27(2): 242-248.
- [4] 张彬, 刘小民. 一种保持界面位置不动的水平集函数隐式重新初始化方法 [J]. *计算物理*, 2011, 28(5): 667-676.
ZHANG Bin, LIU Xiaomin. An implicit re-initialization method for level set function keeping interface fixed [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2011, 28(5): 667-676.
- [5] DUNNING P D, STANFORD B K, KIM H A. Coupled aerostructural topology optimization using a level set method for 3D aircraft wings [J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2015, 51(5): 1-20.
- [6] DUAN X, LI F, QIN X. Topology optimization of incompressible Navier-Stokes problem by level set based adaptive mesh method [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2016, 72(4): 1131-1141.
- [7] YAMASAKI S, YAMANAKA S, FUJITA K. Three-

dimensional grayscale-free topology optimization using a level-set based r-refinement method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 112(10): 1402-1438.

- [8] 刘小民, 张彬, 张卓颢. 水平集与灵敏度分析相结合的流体形状识别与优化方法 [J]. *西安交通大学学报*, 2014, 48(7): 5-11.
LIU Xiaomin, ZHANG Bin, ZHANG Zhuosa. Fluid shape recognition and optimization by combining level set method with sensitivity analysis [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2014, 48(7): 5-11.
- [9] OSHER S, SHU C W. High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1991, 28(4): 907-922.
- [10] BORRVALL T, PETERSSON J. Topology optimization of fluids in Stokes flow [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, 41(1): 77-107.
- [11] SUSSMAN M, SMEREKA P, OSHER S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 114(1): 146-159.
- [12] 肖昌炎, 赵永明, 张素, 等. 水平集方法中符号距离函数快速重构 [J]. *信号处理*, 2003, 19(6): 551-555.
XIAO Changyan, ZHAO Yongming, ZHANG Su, et al. Fast reconstruction of signed distance function in level set method [J]. *Signal Processing*, 2003, 19(6): 551-555.
- [13] DUAN X B, MA Y C, ZHANG R. Optimal shape control of fluid flow using variational level set method [J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(9): 1374-1379.
- [14] CHANTALAT F, BRUNEAU C H, GALUSINSKI C, et al. Level-set penalization and Cartesian meshes: a paradigm for inverse problems and optimal design [J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(17): 6291-6315.
- [15] SOKOLOWSKI J, ZOLESIO J P. Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis [M]. Berlin, Germany: Springer, 1992: 16-20.

(编辑 武红江)