

DOI: 10.7652/xjtuxb201906022

局域共振型周期结构振动带隙形成机理

李锁斌¹, 窦益华¹, 陈天宁², 李冰³, 苏健军⁴, 张帆⁴, 崔潇骁⁵

(1. 西安石油大学机械工程学院, 710065, 西安; 2. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安; 3. 西北工业大学航空学院, 710072, 西安; 4. 西安近代化学研究所, 710065, 西安; 5. 北京特种工程设计研究院, 100028, 北京)

摘要: 为了揭示局域共振型周期结构振动带隙的形成机理,以二维局域共振型周期结构为对象,依据动力学理论,提出了振动带隙形成的基础理论假设:振子和基体的振动模式,由其主模态主导,主模态依据模态参与因子通过模态切换形成不同的振动模式,并依此建立了振动带隙形成机理模型,研究发现:局域共振型周期结构中存在 6 种广义振动模式,各模式由基体的广义主模态主导,而广义主模态又由广义模态依据模态叠加原理形成,当被抑制时,广义子带隙形成。研究结果表明:振子广义主模态依据模态参与因子,通过抑制或释放基体的广义主模态实现振动带隙的打开与闭合;振动带隙特性主要由振子广义主模态的等效刚度和等效质量决定,通过设计振子可主动设计与调控结构的带隙特征。该研究不仅为工程结构的振动控制提供了新方法,为带隙的主动设计奠定了理论基础,也完善了周期结构的基本理论。

关键词: 周期结构;振动带隙;振动控制;局域共振

中图分类号: TB303 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)06-0169-07

Formation Mechanisms of Vibration Band Gaps in Locally Resonant Periodic Structures

LI Suobin¹, DOU Yihua¹, CHEN Tianning², LI Bing³, SU Jianjun⁴,
ZHANG Fan⁴, CUI Xiaoxiao⁵

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China; 2. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710065, China; 3. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 4. Xi'an Modern Chemistry Research Institute, Xi'an 710065, China; 5. Beijing Special Engineering Design and Research Institute, Beijing 100028, China)

Abstract: Detailed formation mechanisms of vibration band gaps in locally resonant periodic structures are investigated based on a two-dimensional locally resonant periodic structure. Firstly, based on the dynamic theory a basic theoretical hypothesis of the formation mechanism for the band gap of locally resonant periodic structure is proposed following the modal superposition principle. Secondly, the detailed formation mechanism of vibration band gaps is further clarified according to the formation mechanism model of band gaps. Finally, the formation mechanism of vibration band gaps is verified by the interaction between the elastic wave and the structure during the formation of vibration band gaps in a typical two-dimensional locally resonant periodic structure. The result shows that there exist six types of generalized propagation

收稿日期: 2018-09-30。 作者简介: 李锁斌(1984—),男,博士,讲师;陈天宁(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51674199);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2019JQ-464);陕西省教育厅科研计划资助项目(18JK0613)。

网络出版时间: 2019-02-03

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190203.0843.002.html>

modes of waves in the locally resonant periodic structure, while these generalized propagation modes are formed by the mutual transformation of the main modes and these main modes are generated by corresponding 12 modes based on the superposition principle. The vibration mode dominated by the main mode of the vibrator determines the formation of a vibration band gap by suppressing or releasing the generalized propagation mode. When the oscillator's main mode suppresses the generalized propagation mode of the wave, a generalized sub-band gap that can only suppress the corresponding propagation mode is formed. The influencing mechanism of the band gap is further studied and an active design method of the band gap is proposed. This research may perfect the basic theory of periodic structure, lay a theoretical foundation for the study of band gap theory of periodic structure and the active design of band gap characteristics, and provide a new method for vibration reduction of engineering structures.

Keywords: periodic structure; vibration band gap; vibration reduction; local resonance

近年来,关于弹性波或振动在周期结构中的传播研究已成为固体物理学、材料科学及工程技术科学领域里一个热点^[1]。由于周期结构对弹性波或振动传播过程具有独特的调控作用——弹性波或振动带隙特性^[2],即当弹性波或振动通过时,带隙内的波或振动会被抑制,因此研究这一特性的物理本质将为凝聚态物理学中复杂物理现象(负质量/折射、声子聚焦等)的研究提供理论支撑,为新型多功能材料(隐身/波导材料等)的设计提供新的方法,为工程技术科学中新型功能结构(结构隔振/减振等)的研制提供新思路^[3-4]。

依据弹性波或振动带隙形成机理,周期结构可分为布拉格散射型^[5]和局域共振型^[6]两种,布拉格散射型周期结构因其带隙主要由散射体对波的各种周期性调制产生,使得带隙波长和结构尺寸处于同一数量级,很难实现小尺寸控制大波长。局域共振型周期结构的带隙主要由振子的共振引起,带隙波长较小,可以实现小尺寸控制大波长,有望实现低频应用,如工程结构的振动控制。

迄今,人们对于局域共振型周期结构的带隙形成机理的本质认识还不够透彻,解释依然较为笼统,虽然学界对局域共振带隙的形成机理已达成共识^[7-20],即振子的局域共振模态与基体模态发生相互耦合致使带隙形成,但对振动带隙产生的详细过程还缺乏全面深入的认识,使得目前只能解释带隙是如何打开的,却不能进一步揭示带隙(或带宽)是如何形成的,即只是简单认为带隙的宽度取决于振子模态与基体模态的耦合强弱,但对于二者的耦合机制及其遵循的基本准则没有详细论证,尚未有关于带隙形成机理的明确的统一表征模式,因此对局域共振型周期结构的带隙特性还无法实现主动

设计。

针对上述问题,本文以局域共振型周期结构为对象,研究带隙详细形成过程机制,阐明带隙形成机理。本文的研究思路为:提出带隙形成的基础理论假设,据此建立带隙形成理论模型,依此阐明带隙形成过程机制,并以典型二维周期结构的振动带隙形成过程为例对所提出的理论及其模型进行验证,最终提出并阐明局域共振型周期结构的振动带隙形成机理。

1 振动带隙形成的基础理论假设

基于动力学理论,给出局域共振型周期结构振动带隙形成的基础理论假设,为提出带隙机理奠定理论基础。对一个 n 自由度系统,当施加激励 $f e^{i\omega_x t}$ 时,其物理坐标下的动力学耦合方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} e^{i\omega_x t} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 分别为质量和刚度矩阵,表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

通过化简得到系统固有特性的表征式

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3)$$

式中: $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ 为 n 阶固有频率。 n 阶振型 $\mathbf{A}$ 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(1)} & \cdots & \mathbf{A}_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_n^{(1)} & \cdots & \mathbf{A}_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

依据模态分析原理,将式(4)代入式(2),对质量和刚度矩阵进行正则化,得到正则质量和正则刚度矩阵 $\mathbf{M}_p$ 和 $\mathbf{K}_p$ 如下

$$\mathbf{A}_p^T \mathbf{M} \mathbf{A}_p = \mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_p^T \mathbf{K} \mathbf{A}_p = \mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

于是系统在模态坐标下的解耦动力学方程为

$$\mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}_p \mathbf{x}_p = \mathbf{f}_p e^{i\omega_x t} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{x}_p$ 为系统在模态坐标下的响应。质点 i 的响应 x_{pi} 表示为

$$x_{pi} = \frac{f}{\sqrt{\omega_i^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (8)$$

进而,得到系统在物理坐标中的响应为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p \quad (9)$$

因此,质点 i 在物理坐标下的响应为

$$x_i = A_i^1 x_{p1} + A_i^2 x_{p2} + \cdots + A_i^n x_{pn} = A_i^1 \frac{f}{\sqrt{(\omega_i^1)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} + A_i^2 \frac{f}{\sqrt{(\omega_i^2)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} + \cdots + A_i^n \frac{f}{\sqrt{(\omega_i^n)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (10)$$

式中: ω_i 为质点 i 的第 i 阶固频; A_i^i 为 i 阶振型。

已知系统响应的本质为系统中各质点的响应,从(9)式可以看出,质点的响应为其模态振型的线性叠加,也称模态叠加原理,即系统中质点的响应为各阶模态振型通过模态参与因子线性叠加而成,其中振型为系统的固有属性,质点 i 的第 i 阶模态参与因子 η_i^i 表示为

$$\eta_i^i = \frac{f}{\sqrt{(\omega_i^i)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (11)$$

通过式(11)可以看出,当激励频率 ω_x 趋固频 ω_i^i 时,模态参与因子 η_i^i 放大,致使该模态成为主模态,其振型 A_i^i 被放大成为主振型,主导系统响应,即质点 i 按振型 A_i^i 振动。基于此,本文提出了局域共振型周期结构振动带隙形成的基础理论假设:结构中,振子和基体的响应,主要由各自的各阶模态,依据模态叠加原理形成的主模态主导形成;主模态随模态参与因子在不同模态之间进行转换,形成振子和基体的不同响应模式;模态参与因子随外界激励变化,于是带隙只在特定频率处出现,其形成主要由系统的主模态决定。

2 振动带隙形成机理模型

基于提出的基础理论假设,建立振动带隙形成的理论模型,原理如图1所示。

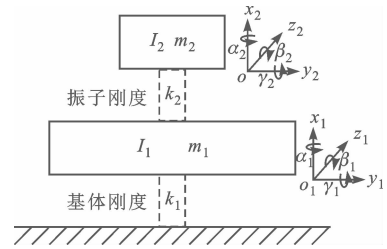


图1 局域共振型周期结构带隙形成的理论模型

将基体等效为具有广义质量 m_1 、广义转动惯量 I_1 和广义刚度 k_1 的等效系统1。其中,广义集中质量沿空间 x 、 y 、 z 这3个方向的运动模式 x_1 、 y_1 、 z_1 分别对应着3种广义平移振动模式,广义集中惯量沿3个坐标轴的转动模式 α_1 、 β_1 、 γ_1 分别对应着3种广义转动振动模式,系统1有6种广义振动模式。将振子等效为具有广义质量 m_2 、广义转动惯量 I_2 和广义刚度 k_2 的等效系统2。其中,广义集中质量沿 x 、 y 、 z 3个方向的运动模式 x_2 、 y_2 、 z_2 分别对应着3种广义平移振动模式,广义集中惯量沿3个坐标轴的转动模式 α_2 、 β_2 、 γ_2 分别对应着3种广义转动振动模式,系统2有6种广义振动模式。于是,局域共振型周期结构中可传播6种广义波模式。基于带隙形成的基础理论假设和模型,得到局域共振型周期结构的广义振动模式也即基体的传播模式的表征式

$$x_1 = A_{x1}^1 \eta_{x1}^1 + A_{x1}^2 \eta_{x1}^2 + \cdots + A_{x1}^{12} \eta_{x1}^{12} \quad (12)$$

$$y_1 = A_{y1}^1 \eta_{y1}^1 + A_{y1}^2 \eta_{y1}^2 + \cdots + A_{y1}^{12} \eta_{y1}^{12} \quad (13)$$

$$z_1 = A_{z1}^1 \eta_{z1}^1 + A_{z1}^2 \eta_{z1}^2 + \cdots + A_{z1}^{12} \eta_{z1}^{12} \quad (14)$$

$$\alpha_1 = A_{\alpha1}^1 \eta_{\alpha1}^1 + A_{\alpha1}^2 \eta_{\alpha1}^2 + \cdots + A_{\alpha1}^{12} \eta_{\alpha1}^{12} \quad (15)$$

$$\beta_1 = A_{\beta1}^1 \eta_{\beta1}^1 + A_{\beta1}^2 \eta_{\beta1}^2 + \cdots + A_{\beta1}^{12} \eta_{\beta1}^{12} \quad (16)$$

$$\gamma_1 = A_{\gamma1}^1 \eta_{\gamma1}^1 + A_{\gamma1}^2 \eta_{\gamma1}^2 + \cdots + A_{\gamma1}^{12} \eta_{\gamma1}^{12} \quad (17)$$

式中: $[x_1, y_1, z_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ 为基体传播模式向量; $[A_{x1}^i, A_{y1}^i, A_{z1}^i, A_{\alpha1}^i, A_{\beta1}^i, A_{\gamma1}^i]$ 为模式振型,如 x_1 模式的振型为 $[A_{x1}^1, A_{x1}^2, \cdots, A_{x1}^{12}]$;参与因子

$$\eta_{x1}^i = \frac{f}{\sqrt{(\omega_{x1}^i)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (18)$$

其中 ω_{x1}^i 为 x_1 模式第 i 阶固频。基体传播模式由其广义模态依据模态叠加原理形成的主模态主导,主模态又依据模态参与因子在各模态间转换,形成不同的振动模式。振子的运动模式可表征为

$$x_2 = A_{x2}^1 \eta_{x2}^1 + A_{x2}^2 \eta_{x2}^2 + \cdots + A_{x2}^{12} \eta_{x2}^{12} \quad (19)$$

$$y_2 = A_{y2}^1 \eta_{y2}^1 + A_{y2}^2 \eta_{y2}^2 + \cdots + A_{y2}^{12} \eta_{y2}^{12} \quad (20)$$

$$z_2 = A_{z2}^1 \eta_{z2}^1 + A_{z2}^2 \eta_{z2}^2 + \cdots + A_{z2}^{12} \eta_{z2}^{12} \quad (21)$$

$$\alpha_2 = A_{\alpha2}^1 \eta_{\alpha2}^1 + A_{\alpha2}^2 \eta_{\alpha2}^2 + \cdots + A_{\alpha2}^{12} \eta_{\alpha2}^{12} \quad (22)$$

$$\beta_2 = A_{\beta2}^1 \eta_{\beta2}^1 + A_{\beta2}^2 \eta_{\beta2}^2 + \cdots + A_{\beta2}^{12} \eta_{\beta2}^{12} \quad (23)$$

$$\gamma_2 = A_{\gamma2}^1 \eta_{\gamma2}^1 + A_{\gamma2}^2 \eta_{\gamma2}^2 + \cdots + A_{\gamma2}^{12} \eta_{\gamma2}^{12} \quad (24)$$

式中: $[x_2, y_2, z_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2]$ 为振子运动模式向量; $[A_{x2}^i, A_{y2}^i, A_{z2}^i, A_{\alpha2}^i, A_{\beta2}^i, A_{\gamma2}^i]$ 为模式振型, 如 x_2 模式振型为 $[A_{x2}^1, A_{x2}^2, \dots, A_{x2}^{12}]$; η_{x2}^i 为模态参与因子, 可表示为

$$\eta_{x2}^i = \frac{f}{\sqrt{(\omega_{x2}^i)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (25)$$

其中 ω_{x2}^i 为 x_2 模式的第 i 阶固频。振子运动模式由其广义模态依据模态叠加原理形成的主模态主导形成, 主模态依据模态参与因子在不同模态之间进行转换, 形成振子的不同运动模式。

3 振动带隙形成过程机理

依据上述模型, 提出局域共振型周期结构中振动带隙详细形成过程机制如下。

(1) 当激励频率 ω_x 从 0 增大时, 基体某一阶模态被激发成为主模态, 主导基体传播模式, 振动按该模式传播, 如基体 x_1 模式的第 1 阶广义模态被激发放大成为基体的主模态, 此时振动可按振型 A_{x1}^1 模式传播, 结构中无带隙形成。

(2) 当激励频率 ω_x 趋近振子某阶模态固频时, 模态参与因子增大, 该模态被激发。随着激励频率进一步趋近并等于该阶固频时, 该模态被放大成为振子主模态, 振子按该模式运动, 此时, 若振子和基体的振动模式一致时, 二者发生耦合, 耦合过程中, 振子给基体一作用力, 抑制了其主模态, 于是无振动模式, 弹性波不能传播, 带隙形成。振子主模态固频为开带位置, 振子对基体主模态的抑制力决定着带宽。随着激励频率 ω_x 远离振子主模态固频, 模态参与因子变小, 该模式对振子的主导变弱, 此时, 振子作用在基体主模态上的力变小, 抑制减弱, 直至模态参与因子小到使得该模态不能主导振子模式时, 振子对基体主模态的抑制消失, 基体主模态重新主导基体模式, 振动按该主模态模式继续传播, 带隙消失。例如: 当激励频率 ω_x 趋近振子振动模式 x_2 的第 1 阶模态固有频率 ω_{x2}^1 时, 模态参与因子 η_{x2}^1 变大, 该模态被放大转化为振子的主模态, 振子 (m_2) 按振型 A_{x2}^1 模式运动, 如图 2 所示。由图 2 可知, 振子垂直运动, 给基体 (m_1) 作用力 F , 基体模式 x_1 的主模态振型 A_{x1}^1 模式被抑制, 致使沿该模式 (模式 x_1) 传播的振动无法通过, 一条模式 x_1 子带隙打开, 带隙的起始位置频率由振子主模态的等效刚度和质量决定

$$\omega_{x2}^1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (26)$$

式中 k_2 和 m_2 分别为振子在该阶主模态的等效刚度

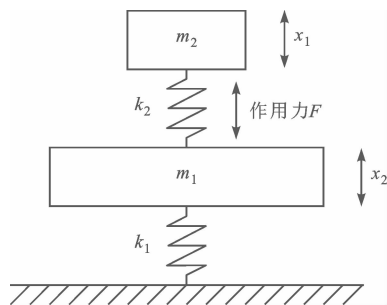


图2 局域共振型周期结构子带隙形成过程原理

和等效质量。带宽由振子对基体主模态的抑制力强弱决定, 抑制力为

$$F = k_2 |A_{x2}^1(\eta)| \quad (27)$$

式中: $|A_{x2}^1(\eta)|$ 为振子主模态位移, 表示为

$$A_{x2}^1(\eta) = |A_{x2}^1| \frac{f}{\sqrt{(\omega_{x2}^1)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (28)$$

随着激励频率 ω_x 离开振子固频 ω_{x2}^1 , 模态参与因子 η_{x2}^1 变小, 振型 A_{x2}^1 模式对振子的主导作用减弱, 振子位移 $|A_{x2}^1(\eta)|$ 减小, 力 F 变弱, 振子对基体主模态振型 A_{x1}^1 模式的抑制减弱; 随着激励频率 ω_x 进一步远离振子固频 ω_{x2}^1 , 模态参与因子 η_{x2}^1 进一步变小, 振型 A_{x2}^1 模式对振子的主导作用消失, 振子位移 $|A_{x2}^1(\eta)|$ 变为 0, 对基体主模态的抑制力 F 消失, 于是振型 A_{x1}^1 模式主导基体模式, 振动按该模式在基体中传播, 子带隙关闭。带隙的终止频率由振子该阶主模态的参与因子和等效刚度共同决定。

(3) 基体中存在 6 种广义振动模式, 各种模式由其对应的 12 阶广义模态依据模态叠加原理形成的主模态主导形成; 振子主模态主导的振子模式依据模态参与因子通过抑制或释放基体传播模式的方式决定着振动带隙的形成, 即当振子主模态抑制广义振动传播模式时, 形成了只能抑制该传播模式的子带隙; 6 种传播模式对应 6 条广义子带隙, 相互叠加形成完全振动带隙, 带隙内 6 种广义振动或传播模式均被抑制。

4 振动带隙形成机理验证

以典型局域共振型周期板结构^[12]为例, 验证上述理论。

该结构是通过在均匀板上周期布置一振子阵列而形成的二维局域共振型周期结构, 原理如图 3 所示。图 3a 表示结构形貌; 图 3b 表示周期单元, 振子由软橡胶柱 A 和钢柱 B 构成, 二者高度分别为 h_A 和 h_B , 直径均为 d , 基板厚为 e , 单元边长为 a ; 图 3c 表示第一布里渊区。

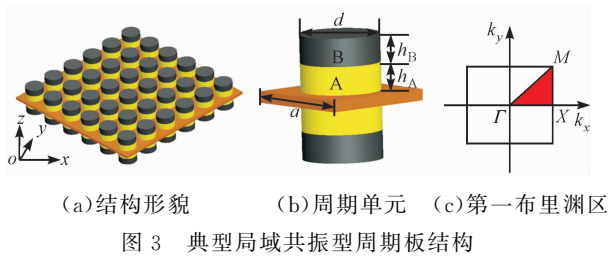


图 3 典型局域共振型周期板结构

采用有限元方法,通过 Comsol Metaphysics 3.5a 软件计算能带。计算中结构的几何、材料参数与文献[20]相同,最终得到结果如图 4 所示。从图 4 可以看出,在给定频率范围内存在一条完全带隙(图 4a 中频率为 300~450 Hz 区域),两条子带隙 2-x、2-y 模式弹性波带隙(图 4b 中频率分别为 100~200 Hz 和 300~450 Hz 区域),一条子带隙 1-z 模式弹性波带隙(图 4c 中频率为 300~850 Hz 区域)。

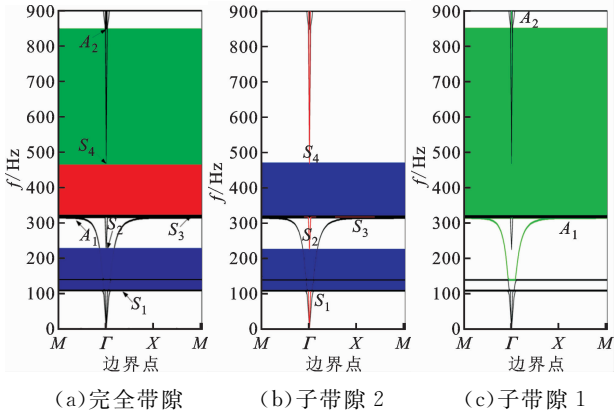


图 4 典型局域共振型周期板结构能带

4.1 子带隙 1-z 模式带隙形成机理验证

将子带隙 1 局部放大,结果如图 5b 所示。

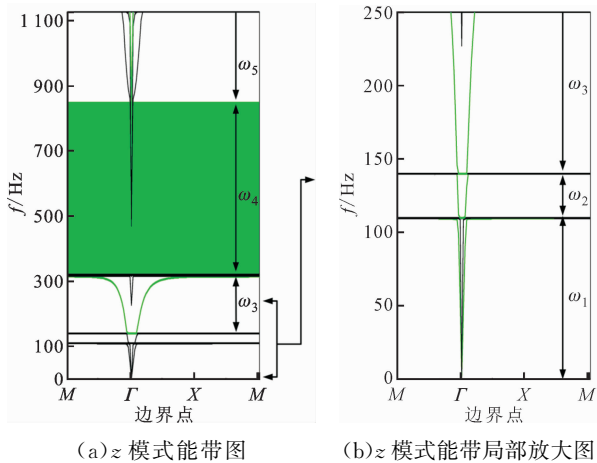


图 5 子带隙 1-z 模式能带

提取能带曲线上典型点对应的单元振动模式,如图 6 所示。

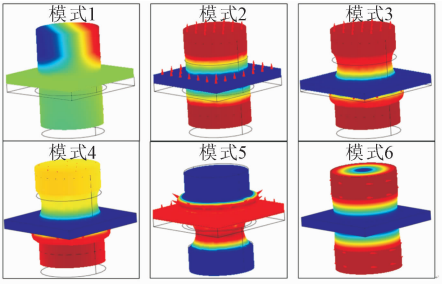


图 6 单元的 z 模式振动

子带隙 1-z 模式带隙形成的详细过程如下。

- (1)当激励频率 ω 从 0 趋于 120 Hz,即区间 ω_1 ,板波模态 1 被激发放大成为基板主模态,主导基板响应,横波(面外波)按该模式传播,不发生衰减(有限结构中波传播过程如图 7 中过程(1)所示),无子带隙 1 形成。
- (2)当激励频率 $\omega=120$ Hz,模态 6 被激发放大成为振子主模态,但其振动模式为旋转运动,与板波主模态不耦合,给基板沿垂直方向的作用力为零,未能抑制基板模式 1,振动按模式 1 继续传播,子带隙 1 未形成或者带宽为 0。
- (3)当激励频率 ω 从 120 Hz 趋近 140 Hz,即 ω_2 区间,板波模态 2 被激发放大为基板主模态,主导基板响应,横波按该模式传播,无子带隙 1 形成。
- (4)当激励频率 $\omega=140$ Hz,模态 6 被激发放大成为振子主模态,子带隙 1 未形成或者带宽为 0。
- (5)当激励频率 ω 从 140 Hz 趋于 320 Hz,即 ω_3 区间,板波模态 3 被激发放大为基板主模态,主导基

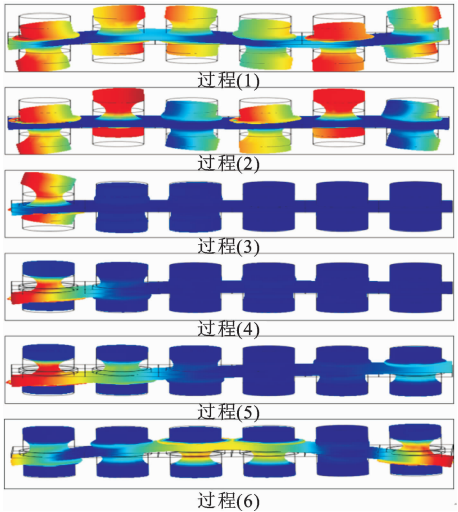


图 7 有限周期结构中 z 模式振动的传播过程

板响应,横波按该模式传播,无子带隙1。

(6)当激励频率 $\omega=320$ Hz,模态4被激发放大为振子主模态,主导振子沿垂直于板的方向运动,抑制了基板主模态,板内无 z 振动模式,横波无法传播,第一条子带隙1打开(传播过程如图7中过程(2)所示)。开带位置为振子主模态4的固频,据带隙理论,振子在该阶主模态的等效质量为

$$m = \pi \rho_B h_B (d/2)^2 \quad (29)$$

式中: ρ_B 为振子B的密度。对于振子A,沿 z 方向的正应力与正应变成正比,即

$$\frac{F^z}{\pi(d/2)^2} = E_A \frac{\Delta z}{h_A} \quad (30)$$

式中: Δz 为振子A在 z 方向上的形变; E_A 为振子A的弹性模量;振子在该阶主模态的等效刚度为

$$k = \frac{E_A \pi (d/2)^2}{h_A} \quad (31)$$

于是子带隙1的起始位置频率为

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_A}{\rho_B h_A h_B}} \quad (32)$$

从而验证了通过设计振子主模态的等效刚度和等效质量,可对带隙起始位置进行主动设计。

(7)当激励频率 ω 从 320 Hz 趋于 850 Hz,即 ω_1 区间内,模态4依然为振子主模态,主导振子运动。随着激励频率远离模态4的固频,其模态参与因子变小,振子对基板主模态的抑制变弱,表现为远离开带位置处,横向波的衰减变小,但此区域内,板的 z 模式依旧被抑制(传播过程如图7中过程(3)(4)所示),形成子带隙1,带宽为 ω_1 。据带隙理论,振子在该阶主模态对基板主模态的抑制力为

$$F = \frac{E_A \pi (d/2)^2}{h_A} |A_{x2}^4| \frac{f}{\sqrt{(\omega_{x2}^i)^2 - \omega_x^2}} e^{i\omega_x t} \quad (33)$$

式中: $|A_{x2}^4|$ 为振子主模态的振幅。于是,验证了通过设计振子主模态等效刚度,可对带宽主动设计。

(8)当激励频率 $\omega=850$ Hz,模态4的参与因子变小,其对振子的主导变弱,板波模态5被激发放大成为基板主模态,主导基板响应,横向波按此模式传播(有限结构中波的传播过程如图7中过程(5)所示),子带隙1关闭。

(9)当激励频率 ω 大于 850 Hz,即 ω_5 区间,板波模态5保持为基板主模态,主导基板响应,横向波按此模式传播(传播过程如图7中过程(6)所示),子带隙1消失。

4.2 子带隙 2-x、2-y 模式带隙形成机理验证

将子带隙2局部放大,结果如图8b所示。

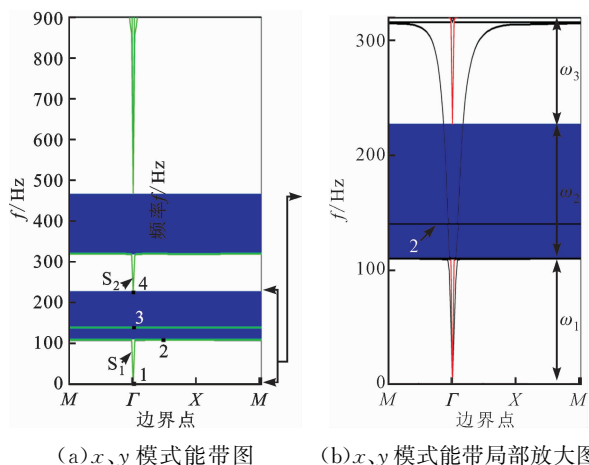


图8 x、y 模式能带

提取子带隙2能带上典型点对应的单元振动模式,如图9所示。

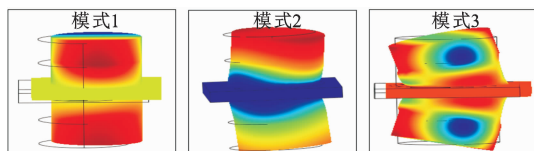


图9 单元 x、y 模式振动

子带隙 2-x、2-y 模式带隙形成详细过程如下。

(1)当激励频率 ω 从 0 趋于 120 Hz,即 ω_1 区间,板波 x、y 振动模态1被激发放大成为基板主模态,主导基板响应,纵波按该模式传播,不发生衰减(传播过程如图10中过程(1)所示),无子带隙2形成。

(2)当激励频率 ω 从 120 Hz 趋于 230 Hz,即 ω_2 区间,模态2被激发放大为振子主模态,主导振子运动,抑制基板主模态,纵波无法传播(传播过程如图10中过程(2)和(3)所示),子带隙2形成。

(3)当激励频率 ω 从 230 Hz 增大,即 ω_3 区间,

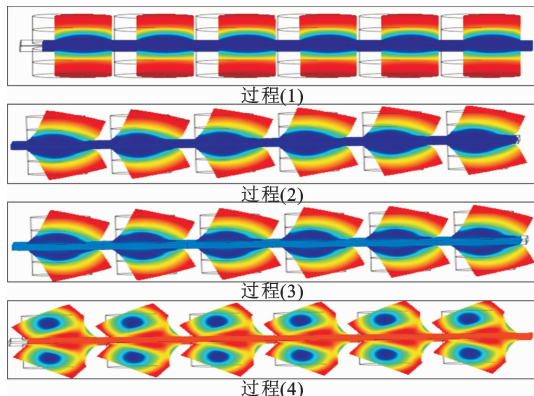


图10 有限结构中 x、y 模式振动传播过程

板波 x 、 y 振动模态 3 被激发放大成为基板主模态,主导基板响应,纵向波按此模式传播,不发生衰减(传播过程如图 10 中过程(4)所示),无子带隙 2 形成。

4.3 完全带隙形成机理验证

依据上述分析可知:基体振动模式由其各阶模态依据模型叠加原理形成的主模态主导形成;振子主模态依据模态参与因子通过抑制基体主模态的方式决定着振动带隙的形成,即当振子主模态抑制基体的主模态时,形成了只能抑制该模式的子带隙,子带隙相互叠加,形成完全带隙。验证模型中,完全带隙(见图 4a)仅由子带隙 1 和 2 叠加而成。因此,说明本文提出的局域共振型周期结构振动带隙形成的基础理论假说和依此建立的带隙形成理论模型,以及据此揭示的振动带隙形成机理,是合理的。据此,通过设计振子主模态等效刚度和等效质量,可对带隙打开位置进行主动设计,通过设计振子主模态等效刚度可对带宽进行主动设计。

5 结 论

本文的主要工作和结论如下:

(1)基于动力学原理,给出了局域共振型周期结构振动带隙形成的基础理论,据此建立了带隙形成的理论模型,依此模型阐明了带隙形成机理并通过局域共振型周期板中带隙形成时弹性波与结构的相互作用机制验证了该理论;

(2)局域共振型周期结构存在 6 种广义振动模式,各模式由广义模态依据模态叠加原理形成的主模态主导形成,振子主模态依据模态参与因子通过抑制或释放基体主模态的方式决定着振动带隙的形成;

(3)带隙特性主要由振子主模态的等效刚度和等效质量决定,通过设计振子主模态的等效刚度和等效质量,可对带隙的打开位置频率进行主动设计,通过设计振子主模态的等效刚度,可初步对带隙的宽度进行主动设计。

本文研究为工程结构的减振技术提供了新方法的理论基础,并为周期结构带隙理论研究和带隙特性主动设计奠定了基础,完善了周期结构的基本理论。

参考文献:

- [1] BILLINGS L. Exotic optics: metamaterial world [J]. Nature, 2013, 500(7461): 138.
- [2] 陈荣,吴天行. 非对称周期结构中耦合波的传播特性

[J]. 振动与冲击, 2015, 32(1): 68-73.

CHEN Rong, WU Tianxing. Coupled wave propagation in asymmetric periodic structures [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 32(1): 68-73.

- [3] MAASCH M. Wave propagation in periodic structures [M]. Berlin, Germany: Springer International Publishing, 2016: 26.
- [4] 吴九汇,马富银,张思文,等. 声学超材料在低频减振降噪中的应用评述 [J]. 机械工程学报, 2016, 52(13): 69-78.
- WU Jiuhui, MA Fuyin, ZHANG Siwen, et al. Application of acoustic metamaterials in low-frequency vibration and noise reduction [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 69-78.
- [5] SIGALAS M, ECONOMOU E N. Band structure of elastic waves in two dimensional systems [J]. Solid State Communications, 1993, 86(3): 141-143.
- [6] LIU Z Y, ZHANG X X, MAO Y W, et al. Locally resonant sonic materials [J]. Science, 2000, 289: 201-205.
- [7] HO K M, CHENG C K, YANG Z, et al. Broadband locally resonant sonic shields [J]. Applied Physics Letters, 2003, 83(26): 5566-5568.
- [8] WU T T, HUANH Z G, TSAI T C, et al. Evidence of complete band gap and resonances in a plate with periodic stubbed surface [J]. Applied Physics Letters, 2008, 93(11): 111902.
- [9] HSU J. Local resonances-induced low-frequency band gaps in two-dimensional phononic crystals slabs with periodic stepped resonators [J]. Journal of Physics: D Applied Physics, 2011, 44(5): 055401.
- [10] ASSOUAR M B, OUDICH M. Enlargement of a locally resonant sonic band gap by using double-sides stubbed plate [J]. Applied Physics Letters, 2012, 100(12): 100123506.
- [11] LIF M, WANGY Z. Elastic wave propagation and localization in band gap materials: a review [J]. Science China, 2012, 55(10): 1734-1746.
- [12] CHEN Jiujiu, HAN Xu, LI Guangyao. Asymmetric lamb wave propagation in phononic crystal slabs with graded grating [J]. Journal of Applied Physics, 2013, 113(18): 184506.
- [13] 高明,吴志. 一维三振子周期结构带隙设计 [J]. 物理学报, 2013, 62(14): 140507.
- GAO Ming, WU Zhiqiang. Band gap design for one-dimensional periodic structure with three oscillators [J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(14): 140507.

(下转第 182 页)

(上接第 175 页)

- [14] LI S B, CHEN T N, WANG X P, et al. Expansion of lower-frequency locally resonant band gaps using a double-sided stubbed composite phononic crystals plate with composite stubs [J]. *Physics Letters: A*, 2016, 380(25/26): 2167-2172.
- [15] 李锁斌, 陈天宁, 奚延辉, 等. 声子晶体板中低频完全禁带形成机理研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2016, 50(12): 51-57.
- LI Suobin, CHEN Tianning, XI Yanhui, et al. Forming mechanisms of low frequency complete band gaps in phononic crystal plate [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2016, 50(12): 51-57.
- [16] LI S B, XI Y H, CHEN T N, et al. Modulating Lamb wave band gaps using an elastic metamaterial plate [J]. *Acoustic Journal*, 2017, 63(5): 508-516.
- [17] 徐青, 张俊杰. 周期复合板的带隙特性和辐射噪声衰减特性分析 [J]. *振动与冲击*, 2017, 36(11): 188-191.
- XU Qing, ZHANG Junjie. Research on the band gap and attenuation characteristic of sound radiation for periodic compound plate [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(11): 188-191.
- [18] 石志飞, 程志宝, 向宏军. 周期结构理论及其在隔震减振中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2017: 21.
- [19] 温激鸿, 郁殿龙, 赵宏刚, 等. 人工周期结构中弹性波的传播: 振动与声学特性 [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 6.
- [20] 李锁斌, 窦益华, 陈天宁, 等. 声子晶体板中低频宽禁带形成机理 [J]. *西安交通大学学报*, 2018, 52(12): 159-166.
- LI Suobin, DOU Yihua, CHEN Tianning, et al. Forming mechanisms of low frequency broad band gaps in locally resonant phononic crystal plates [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2018, 52(12): 159-166.

(编辑 刘杨)