

DOI: 10.7652/xjtuxb201812008

# 样点邻域同构曲面约束的散乱点云曲率估计

梁增凯<sup>1</sup>, 孙殿柱<sup>1</sup>, 薄志成<sup>1</sup>, 李延瑞<sup>2</sup>, 林伟<sup>1</sup>

(1. 山东理工大学机械工程学院, 255049, 山东淄博; 2. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 针对现有点云曲率估计算法难以兼顾估计结果的精度与稳健性问题,提出一种样点邻域同构曲面约束的散乱点云曲率估计算法。以目标样点的邻域点集作为局部样本,采用二维 Delaunay 网格剖分与三维 Delaunay 网格过滤相结合的策略对局部样本进行曲面重建,获得插值于采样点集并与原表面拓扑同构的局部网格曲面;为稳健估计计算样点曲率所需的样点法向,通过局部网格曲面中顶点一阶邻域面的形状和尺寸确定邻域面法向的权重,以一阶邻域面法向的加权和作为法向估计结果;基于网格曲面顶点一阶邻域面初步估计样点曲率,进而根据邻域样点与目标样点间测地距离对初步估计结果进行平滑修正获得最终曲率估计结果。实验结果表明,所提算法可有效反映曲面特征并兼顾样点曲率估计的精度和稳健性,实现样点曲率的平滑过渡;相比于 Meyer 提出的 Voronoi 算法,所提算法对采样精度较高的点云数据可保证与其相当的计算精度,对存在噪声的点云数据计算精度和稳健性均可提高 1~2 倍。

**关键词:** 样点邻域;拓扑同构;曲率估计;局部重建;测地距离

**中图分类号:** TP391.72 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2018)12-0050-07

## An Estimation Method for Curvature of Unorganized Points Cloud Based on Local Isomorphic Surface

LIANG Zengkai<sup>1</sup>, SUN Dianzhu<sup>1</sup>, BO Zhicheng<sup>1</sup>, LI Yanrui<sup>2</sup>, LIN Wei<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049, China;

2. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** A precise curvature estimation algorithm based on local mesh reconstruction is presented to solve the problem that the existing curvature estimation algorithms for point clouds are difficult to achieve a trade-off between accuracy and robustness of estimation. A set of neighborhood points of the target sample is taken as the local sample. The strategy that combines the two-dimensional Delaunay mesh generation and the three-dimensional Delaunay mesh filtering is used to reconstruct a surface of the local sample and to obtain a local Delaunay mesh which interpolates on sampling points and is topologically equivalent to the original surface. In order to robustly estimate the normal direction of the sample points for calculating the curvature of the sample points, the weights of the normals of the first-order neighborhood patches of the vertex are determined by the shape and size of these patches in the local mesh surface, and the weighted summation of the normals of the first-order neighborhood patches is taken as the estimation result of the normal direction. A pre-estimation of curvature of sample points is obtained based on first-

order neighborhood patches of sample points, and then the estimation results are modified according to the geodesic distance between neighborhood points and target point. Experimental results show that the proposed algorithm can effectively reflect the surface characteristics, take the accuracy and robustness of the sample curvature estimation into account, and realize the smooth transition of the sample curvature. Compared with the Voronoi algorithm proposed by Meyer, the proposed algorithm guarantees the calculation accuracy of point cloud with higher sampling accuracy, and improves the accuracy and robustness of point cloud with noise by 1-2 times.

**Keywords:** neighborhood of sample point; topological isomorphism; curvature estimation; local reconstruction; geodesic distance

曲率是曲面信息度量的重要指标,可反映曲面任一点处局部几何性质,在数字化设计与制造、医学辅助设计、文物保护等领域具有广泛的应用价值。三维扫描设备的发展使得获取反映物体细节特征的密集点云数据成为现实,但所得数据通常只包含样点位置坐标且拓扑信息缺失,因此准确估计散乱点云曲率对不同视角的点云配准、特征识别以及曲面重建等后续处理具有重要意义<sup>[1]</sup>。

现有点云曲率估计方法主要分为基于样点  $k$  邻域点集拟合的方法和基于三角网格的方法。Hoppe 等采用主元分析法拟合采样点的  $k$  邻域点集,通过曲面变分求取其近似曲率<sup>[2]</sup>。Gumhold 等选用移动最小二乘法对样点邻域进行二次曲面拟合,构造逼近原始曲面的局部参数曲面,基于所得参数曲面估计样点曲率<sup>[3-4]</sup>。Ernest 等通过坐标变换构造抛物面,并基于加权拟合有效降低了曲率估计值的误差<sup>[5]</sup>。然而,基于样点  $k$  邻域点集拟合的方法在高复杂度的模型外表面和尖锐特征区域难以寻找合适的拟合曲面形式,限制了曲率估计的适用范围。基于三角网格的方法通常先对散乱点云进行曲面重建,依据重建所得网格结构建立数据间拓扑关系,进而准确估计样点曲率。其中 Taubin 在三角网格顶点处建立近似矩阵,通过求解矩阵特征值估计顶点曲率<sup>[7]</sup>;Meyer 等基于 Voronoi 元与有限元定义离散的微分几何算子,利用微分几何中的 Green 公式进行离散化求解,使计算结果准确性进一步提升<sup>[8-9]</sup>。基于三角网格的方法参考样点局部属性,能对不同区域样点曲率进行准确估计,应用范围更为广泛。

在实际扫描原表面获取点云过程中,因测量距离及扫描角度的变化,即便对于光滑曲面,仍会存在采样误差。特别当点云模型坐标出现法向偏移误差时,曲面  $G^2$  连续性<sup>[10]</sup>难以延续,从而导致现有基于重建网格曲面的曲率估计方法计算结果存在偏差且

过渡不够平滑。为解决这一问题,本文将目标样点的邻域点集作为局部样本进行曲面重建,获得插值于采样点集且与原表面拓扑同构的局部网格曲面,基于网格曲面中一阶邻域面估计样点曲率,进而依据网格曲面上测地距离对样点曲率估计结果进行修正。在曲率估计的过程中,基于一阶邻域面形心权重计算所需的样点法向,提高曲率估计的精度与稳健性。实验结果表明,该算法具有较高的计算效率,能够有效抑制曲面采样误差的干扰,使得样点曲率估计结果过渡更为平滑。

## 1 曲面局部拓扑重建

为获得插值于采样点集的高质量 Delaunay 三角网格曲面,本文依据局部平坦程度,采用二维 Delaunay 网格剖分与三维 Delaunay 网格过滤相结合的策略重建局部样本。对于采样点集  $S$  中目标样点  $p$ ,将  $p$  的  $k$  邻域点集作为局部重建样本,通过适度扩大邻域搜索范围对该样本进行辅助点添加。设  $k_\eta$  为获取  $\lambda(p)$  时所需的邻域点集数量,  $k_\varepsilon$  为添加辅助点后邻域点集数量,局部重建算法的具体流程如下。

- (1) 搜索  $p$  的  $k_\eta$  邻域,获得局部重建样本  $\lambda(p)$ 。
- (2) 搜索  $p$  的  $k_\varepsilon$  邻域点集,获得包含辅助点的局部重建样本  $\varphi(p)$ 。在  $\varphi(p)$  中,若  $\exists p_i, p_i \in \varphi(p)$  且  $p_i \notin \lambda(p)$ ,则将  $p_i$  标记为辅助点。
- (3) 对  $\varphi(p)$  中样点进行共面检测,若共面,则对  $\varphi(p)$  进行二维 Delaunay 网格剖分,输出剖分的局部重建网格,程序结束。
- (4) 对  $\varphi(p)$  进行三维 Delaunay 网格剖分,获得四面体集合  $D(\varphi(p))$ ,并求出对应的 Voronoi 图  $V(\varphi(p))$ 。
- (5) 对  $D(\varphi(p))$  中任一面片  $T_i$  进行夹角检测,若检测未通过,则将  $T_i$  从  $D(\varphi(p))$  中删除,否则

保留。

(6)对  $D(\varphi(p))$  进行流形提取<sup>[11]</sup>, 输出局部重建网格, 程序结束。

在上述步骤(5)中, 对  $T_i$  进行夹角检测的具体流程如下:

- (1)提取面片  $T_i$  的顶点  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ;
- (2)检测每个顶点的标记, 若三个顶点中存在辅助点, 则该面片未通过检测, 程序结束;
- (3)获取面片  $T_i$  对偶 Voronoi 边的端点  $b_1, b_2$ ;
- (4)对于顶点  $v_1$ , 计算 Voronoi 单元中与其距离最近的 Voronoi 顶点, 并将由  $v_1$  指向该顶点的向量记为  $V_{v_1}$ ;
- (5)计算  $v_1 b_1$  和  $v_2 b_2$  与  $V_{v_1}$  的夹角  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 其中  $\theta_1 = \angle(v_1 b_1, V_{v_1})$ ,  $\theta_2 = \angle(v_1 b_2, V_{v_1})$ 。对于给定阈值  $\theta_p$ , 若  $\theta_1$  与  $\theta_2$  均小于  $\theta_p$ , 或  $\theta_1$  与  $\theta_2$  均大于  $\pi - \theta_p$ , 则该面片未通过检测。对  $v_2$  和  $v_3$  进行相同操作。

局部样本  $\lambda(p)$  的重建效果如图 1 所示。

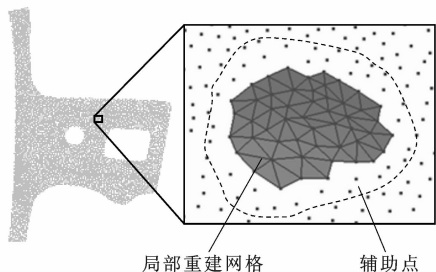


图 1 曲面局部重建结果

## 2 基于形心权重的样点法向估计

基于三角网格估计样点曲率时通常需要计算样点法向, 且样点法向估计的准确度对计算曲率的准确度有很大影响。由局部曲面重建获得的 Delaunay 网格曲面包含着样点之间的拓扑关系, 可基于网格顶点的邻接信息计算样点法向。对网格曲面, 顶点的一阶邻域如图 2 所示。可将一阶邻域面法向的加权和表示为顶点法向, 即样点法向。在分析网格顶点一阶邻域面几何特性的基础上, 提出一种一阶邻域形心权重, 使样点法向计算更为稳定与精确。网格表面上的顶点法向计算公式可表示为

$$n_{v_i} = \sum_{k=1}^m c_k n_{f_k} / \left\| \sum_{k=1}^m c_k n_{f_k} \right\| \quad (1)$$

式中:  $m$  为顶点一阶邻域面的数量;  $c_k$  为邻域面  $f_k$  的权重值;  $n_{f_k}$  表示邻域面  $f_k$  的法向, 可表示为

$$n_{f_k} = \frac{(v_{k+1} - v_i)(v_k - v_i)}{\| (v_{k+1} - v_i)(v_k - v_i) \|} \quad (2)$$

$k = 1, 2, \dots, m; v_{m+1} = v_1$

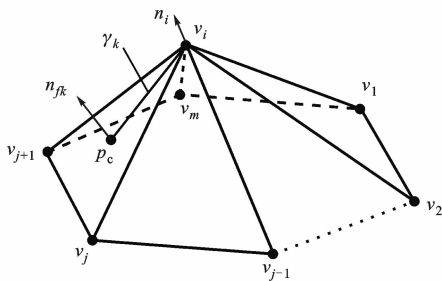


图 2 网格顶点的一阶邻域

在三角网格曲面中三角面片以形状为等边三角形为质量最优, 在同等条件下, 三角面片形状越规整, 它对顶点法向的贡献越大。为对三角面片形状规整程度进行量化, 以三角形外接圆圆心与内切圆圆心的欧氏距离与外接圆半径的比值作为形状评价因子

$$\lambda = 1 - \frac{R_o - r_o}{R} \quad (3)$$

式中:  $R_o$ 、 $r_o$  分别为三角形的外接圆圆心和内切圆圆心;  $R$  为外接圆半径。在  $[0, 1]$  区间内, 随着  $\lambda$  的增大, 表示三角面片形状规整程度越高。当  $\lambda$  等于 0 时, 三角面片的形状为退化三角形, 即三点共线, 可认为该面片对顶点法向没有影响;  $\lambda$  等于 1 时, 三角面片形状为等边三角形, 此时三角面片规整度最高。

在一阶邻域面形状评价因子相同的条件下, 邻域面的尺寸也对顶点法向有一定的影响, 尺寸越小的邻域面几何性质与顶点处相似性越高, 其法向对顶点法向的贡献越大。因质心可以很好地反映三角面片尺寸和形状, 所以以邻域面的质心到顶点的距离来刻画邻域面尺寸这一影响因素, 记为

$$\gamma = d(p_c, v_i) \quad (4)$$

式中:  $d(\cdot)$  表示两点之间的欧氏距离;  $p_c$  表示邻域面  $f_k$  的质心;  $v_i$  表示三角网格顶点。

由形状和尺寸可确定一个邻域面, 故顶点一阶邻域面  $f_k$  权重值可表示为

$$c_k = \frac{\lambda_k}{\gamma_k}$$

式中:  $\lambda_k$  为  $f_k$  的形状评价因子;  $\gamma_k$  为顶点  $v_i$  到  $f_k$  质心的距离。故样点法向即顶点法向可表示为

$$n_{p_i} = n_{v_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\gamma_k} n_{f_k} / \left\| \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\gamma_k} n_{f_k} \right\| \quad (5)$$

基于网格顶点一阶邻域面形心权重的样点法向计算方法考虑了邻域面的形状和尺寸对顶点局部几何性质的综合影响, 所得法向更为精确。

## 3 样点曲率稳健估计

曲率估计过程包含初步计算和加权修正两个阶

段。在获得局部 Delaunay 网格曲面后,基于网格中样点一阶邻域面估计样点曲率,通过加权计算对其修正,提高样点曲率估计的稳健性。

对于局部网格中样点  $p_i$ ,其平均曲率和高斯曲率的估计公式<sup>[8]</sup>分别为

$$k_H(p_i) = \frac{1}{4A_{\max}} \sum_{p_j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \mathbf{v}_{ij} \mathbf{n}_{p_i} \quad (6)$$

$$k_G(p_i) = \frac{1}{A_{\max}} \begin{cases} 2\pi - \sum_{p_j \in N(i)} \theta_j, & p_i \notin \partial M \\ \pi - \sum_{p_j \in N(i)} \theta_j, & p_i \in \partial M \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\alpha_{ij}$ 、 $\beta_{ij}$ 分别为连接样点  $p_i$  和  $p_j$  的对角; $\mathbf{v}_{ij}$ 为  $p_i$  指向  $p_j$  的向量; $N(i)$ 为样点  $p_i$  的一阶邻域点集; $\mathbf{n}_{p_i}$ 为顶点  $p_i$  的法向,按式(5)计算所得; $\theta_j$ 表示邻域三角形中以为顶点的角度值; $A_{\max}$ 为网格曲面中  $p_i$  所在 Voronoi 单元面积; $\partial M$ 表示局部网格边界样点集合。局部网格中样点曲率估计示意图如图 3 所示。

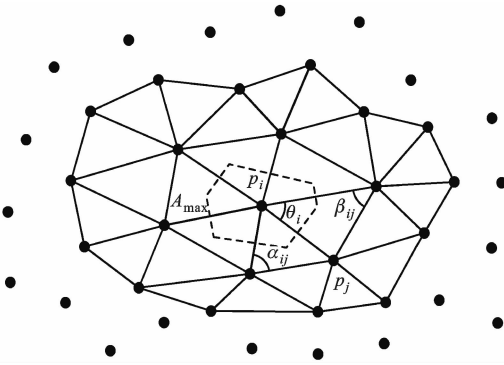


图 3 局部网格中样点曲率估计示意图

获取样点曲率估计结果后,计算局部网格曲面中邻域点与目标样点间测地距离,基于所得测地距离确定不同邻域点权重系数,对目标样点曲率进行加权修正,最终实现样点曲率的平滑过渡。对于目标样点  $p$ ,其平均曲率修正结果可表示为

$$k_H(p) = \frac{\sum_{p_i \in \lambda(p)} G\left\{\left\|\frac{d_i}{h}\right\|^2\right\} k_H(p_i)}{\sum_{p_i \in \lambda(p)} G\left\{\left\|\frac{d_i}{h}\right\|^2\right\}} \quad (8)$$

式中: $d_i$ 表示在局部网格所构成图结构中邻域样点  $p_i$  至目标样点  $p$  的最短路径长度,可近似表示该两点间的测地距离; $h$ 为目标样点  $p$  至所有邻域样点中最短路径长度的最大值; $G(x)$ 为核函数,表达式为

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (9)$$

在式(8)中,将  $k_H(p)$  替换为  $k_G(p)$ ,即可获得

高斯曲率估计结果。

在局部重建过程中,为散乱点集建立合理的索引结构可显著提高局部样本获取效率。目前有多种用于提高目标样点  $k$  近邻查询效率的空间索引,如空间八叉树<sup>[12]</sup>、 $k$ -d 树<sup>[13]</sup>、R 树<sup>[14]</sup>以及 R\* 树<sup>[15]</sup>等。鉴于  $k$ -d 树优越的空间索引性能和便于实现的特点,本文将作为散乱点云的空间索引,实现邻域点集的快速查找。

综上所述,对  $S$  中任一样点  $p$ ,其曲率估计完整流程如下:

(1)基于  $k$ -d 树索引查询  $p$  的邻域点集并进行局部重建,获得局部重建网格  $D(\varphi(p))$ 。

(2)基于样点一阶邻域形心权重,按式(4)计算  $D(\varphi(p))$  中任一样点法向。

(3)基于式(5)与式(6)估计  $D(\varphi(p))$  中任一样点的曲率。

(4)采用 Dijkstra 算法<sup>[16]</sup>计算目标样点  $p$  至邻域点集中任一样点的近似测地距离,并利用式(7)求解  $p$  点曲率。

## 4 实验与分析

为验证本文所提算法的有效性,在硬件配置为 HP xw8600 Workstation(2.5 GHz,4.0 GB 内存),操作系统为 GNU/Linux 的测试环境中,分别利用文献[3]算法、文献[5]算法、文献[8]算法与本文算法对如图 4 所示的不同点云模型进行测试,测试结果如图 5 所示。

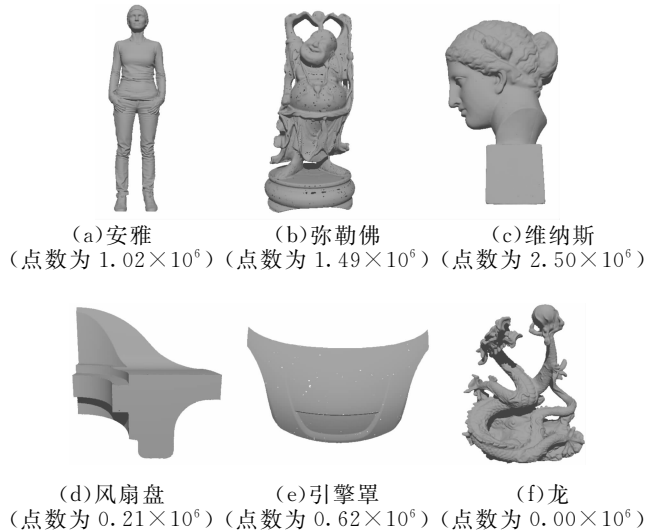


图 4 不同模型点云数据

将不同算法所得高斯曲率进行归一化处理,采用颜色索引表示曲率变化,可得模型高斯曲率云彩图,如图 5 所示。对于图 4e 所示引擎罩模型,文献

[8]算法曲率估计结果与其他 3 种算法计算相比存在一定误差,这是因为文献[8]算法易受采样误差的影响,而其他 3 种算法对采样误差均具有一定的抑制作用。通过对比可知,本文算法与文献[5]算法所得曲率过渡较为光滑,尤其在曲率变化较大特征处,本文算法所得曲率过渡最为光滑。

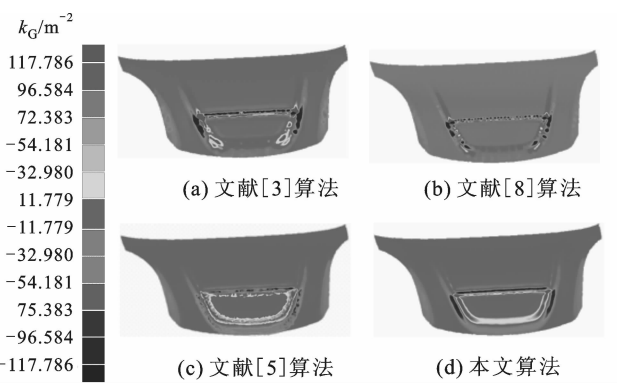


图 5 引擎罩点云数据不同算法高斯曲率估计结果

平均曲率是模型的重要几何信息,可作为型面特征度量标准应用于点云简化过程。为验证 4 种算法对平均曲率估计的准确性,以不同算法所得平均曲率为输入数据,对图 4d 所示的非均匀采样的风扇盘模型点云数据进行简化。简化后点云数据规模为原始数据的 30%。图 6a 所示为基于文献[3]算法所得曲率的精简结果,精简后的点云分布较为均匀,特别在尖锐特征区域,未能保留足够多的点云数据。如图 6b 所示,基于文献[8]算法所得曲率进行精简的结果在尖锐特征处样点数据较基于文献[3]算法的精简结果有所增加。如图 6c 和图 6d 所示,文献[5]算法和本文算法精简所得点云数据在特征区域分布较为密集,并且通过对比可知,本文算法精简结果随曲率变化的趋势最为明显。

为对本文算法曲率估计结果进行定量分析,构造半径为 10 mm 的球面的散乱点云数据(点数为  $10^4$ ),以不同算法计算球面样点的高斯曲率和平均曲率。重复 10 次实验,分别统计各算法所得平均曲率高斯曲率与标准曲率的相对误差均值  $\eta_H$ 、 $\eta_G$  和曲率标准差  $\sigma_H$ 、 $\sigma_G$ 。 $\eta_H$ 、 $\eta_G$  可反映各算法曲率计算的精度, $\sigma_H$ 、 $\sigma_G$  可反映各算法曲率计算的稳健性, $\sigma_H$ 、 $\sigma_G$  值越小,表明曲率估计稳健性越好。如表 1 所示,文献[8]和文献[5]算法平均曲率计算精度最高,对于无采样偏差的点云数据,文献[5]算法采用的是文献[8]所提的 Voronoi 算法,因此,具有较高的计算精度,本文算法与文献[8]算法计算精度相当,高斯曲率计算精度高于其他算法且稳健性最好。

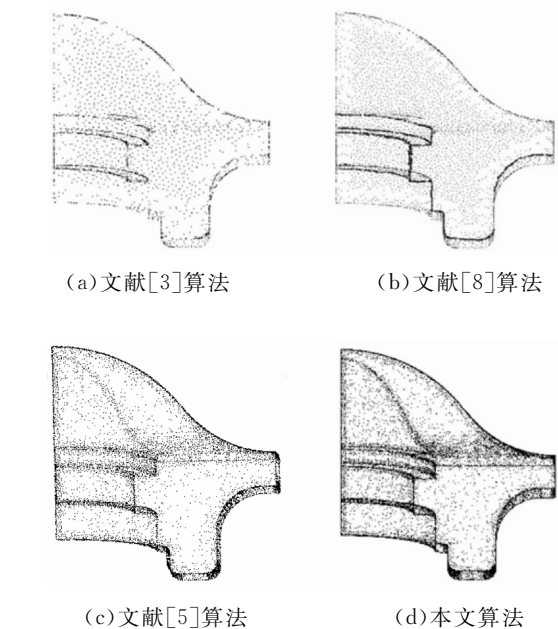


图 6 风扇盘点云数据基于不同算法所得曲率的精简结果

表 1 不同算法所得球面样点曲率结果比较

| 算法    | $\eta_H/\%$ | $\sigma_H/\text{mm}$ | $\eta_G/\%$ | $\sigma_G/\text{mm}$ |
|-------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| 文献[3] | 0.22        | $2.1 \times 10^{-2}$ | 0.42        | $3.7 \times 10^{-2}$ |
| 文献[5] | 0.16        | $2.1 \times 10^{-3}$ | 0.53        | $3.6 \times 10^{-2}$ |
| 文献[8] | 0.16        | $2.2 \times 10^{-2}$ | 0.55        | $4.1 \times 10^{-2}$ |
| 本文    | 0.17        | $1.8 \times 10^{-3}$ | 0.39        | $3.3 \times 10^{-2}$ |

为分析各算法对具有采样误差的点云数据的曲率估计效果,对球面点云数据添加均值为 0、方差为 0~1.0 mm 的高斯噪声,分别统计各算法曲率计算结果的  $\eta_H$ 、 $\eta_G$  和  $\sigma_H$ 、 $\sigma_G$ ,结果如图 7 所示。从图 7 中可以看出:随着噪声程度的增大,本文算法的曲率计算精度和稳健性均高于其他算法;相比于计算精度较高的 Voronoi 算法,本文算法在噪声为 0 时,计算精度与之相当,随着噪声程度的增大,本文算法优势明显,计算精度和稳健性可保持在 Voronoi 算法的 1~2 倍。

为验证本文算法的运行效率,分别采用文献[3]算法、文献[5]算法、文献[8]算法和本文算法对如图 4 所示的 6 组不同采样数据进行曲率估计,实验结果如图 8 所示。由图 8 可见,本文算法的运行效率低于基于样点一阶邻域面进行曲率估计的文献[8]算法,但明显高于基于局部拟合的文献[3]算法。文献[5]算法通过识别曲率估算异常区域并对其进行加权抛物面拟合估计离散曲率,其运行效率略低于本文算法。

本文算法所需主要参数有  $k_\eta$ 、 $k_\zeta$  和  $\theta_p$ 。 $k_\eta$  为局

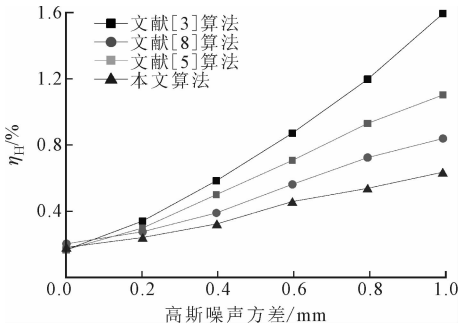
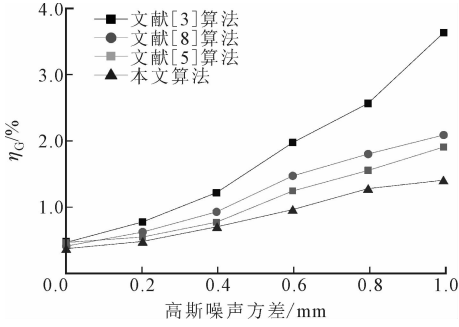
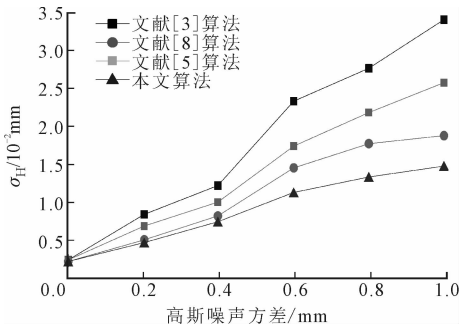
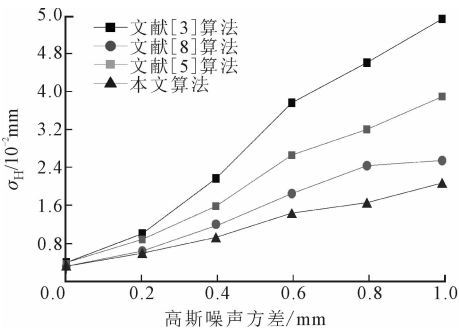
(a) 4 种算法的  $\eta_H$  比较(b) 4 种算法的  $\eta_G$  比较(c) 4 种算法的  $\sigma_H$  比较(d) 4 种算法的  $\sigma_G$  比较

图 7 不同噪声程度下各算法所得曲率误差比较

部样本的样点数量,其值大小决定着样点曲率估计质量。基于高斯核函数将局部样本中样点预估计曲率的加权和作为样点曲率的估计结果, $k_\eta$  值越大,参与加权计算的样点数量越大,样点曲率过渡越光滑,对于有噪声以及采样不均匀等缺陷的点云,其样

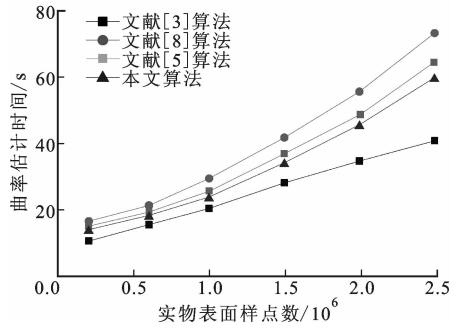


图 8 不同算法曲率估计时间对比

点曲率计算越稳定,但过大的  $k_\eta$  值会导致样点曲率过于平滑,且计算效率低下; $k_\eta$  值也不宜过小, $k_\eta$  值过小会导致曲面局部样本不够完备,无法准确反映曲面局部形状,导致样点曲率估计不准确,且无法稳健处理有缺陷点云的样点曲率估计问题。通过大量实验表明:对于采样均匀的点云, $k_\eta$  取 15 时可获得较为理想的实验效果。为更为稳健地处理非均匀采样点云的曲率估计问题,在以样点的 15 近邻点集为局部样本的基础上对其进行增益优化<sup>[17]</sup>,获得可准确反映曲面局部形状的局部样本。 $k_\xi$  为添加辅助点后样点邻域点集样点数量,通过添加辅助点使得重建所得网格曲面中局部样本边缘样点可以有完整的一阶邻域面,辅助点的数量不宜过多,否则会导致局部重建效率低下。根据增益优化后局部样本样点数量  $N$  和样点局部采样密度确定  $k_\xi$  的取值,计算公式如下

$$k_\xi = \left\lceil \frac{1.2\pi(r+\xi)^2}{\sigma} \right\rceil \quad (10)$$

式中: $\lceil \cdot \rceil$  为向上取整运算符; $r$  为增益优化后局部样本的最小包围球半径; $\xi$  为局部样本中样点与其最近邻点欧氏距离的均值; $\sigma = N/\pi r^2$  为局部样本采样密度。此外, $\theta_p$  为夹角检测过程中控制阈值,通常取  $\pi/8$ 。

## 5 结 论

通过对局部样本进行 Delaunay 网格剖分并滤除多余面片,可为样点构建邻域同构曲面,基于所得网格曲面并结合测地距离进行加权修正估计样点曲率,可得到如下结果:

(1) 局部重建所得 Delaunay 网格曲面插值于采样点集,并且当采样密度符合要求时,拓扑同构于原表面,因此在复杂表面及尖锐特征区域均可实现理想的估计效果;

(2) 通过对局部样本获取时所需参数  $k_\eta$ 、 $k_\xi$  合

理取值,以一阶邻域形心权重计算样点法向进行曲率预估计,并基于测地距离对曲率估计结果进行平滑修正,能够有效抑制曲面采样误差对曲率估计结果的影响,提高了算法的稳健性;

(3)相比于 Meyer 提出的 Voronoi 算法,本文算法对采样精度较高的点云数据可保证与其相当的计算精度,对存在噪声的点云数据计算精度和稳健性均可提高 1~2 倍,基于  $k$ -d 树构建空间索引获取局部样本并进行辅助点添加,使本文算法具有较高的计算效率,适用于大规模点云数据的处理。

## 参考文献:

- [1] VÁŠA L, VAN ĚCEK P, PRANTL M, et al. Mesh statistics for robust curvature estimation [J]. Computer Graphics Forum, 2016, 35(5): 271-280.
- [2] HOPPE H, DEROSE T, DUCHAMP T, et al. Surface reconstruction from unorganized points [J]. Computer Graphics, 1992, 26(2): 71-78.
- [3] QIU Yanjie, ZHOU Xionghui, YANG Pinghai, et al. Curvature estimation of point set data based on the moving-least square surface [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2011, 16(4): 402-411.
- [4] 王泉, 陈双敏, 陈叶芳, 等. 基于模板采样和 MLS 能函数的曲率计算 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015(6): 1104-1109.  
WANG Xiao, CHEN Shuangmin, et al. Computing curvature based on template sampling and MLS energy function [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2015(6): 1104-1109.
- [5] 刘鹏鑫, 王扬, 刘璇. 反求工程中离散曲率估算方法 [J]. 吉林大学学报(工学版), 2011, 41(2): 479-483.  
LIU Pengxin, WANG Yang, LIU Xuan. Discrete curvature estimation in reverse engineering [J]. Journal of Jilin (Engineering and Technology Edition), 2011, 41(2): 479-483.
- [6] NURUNNABI A, WEST G, BELTON D. Outlier detection and robust normal-curvature estimation in mobile laser scanning 3D point cloud data [J]. Pattern Recognition, 2015, 48(4): 1404-1419.
- [7] TAUBIN G. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation [C] // IEEE International Conference on Computer Vision. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1995: 902-907.
- [8] MEYER M, DESBRUN M, SCHRODER P, et al. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds [J]. Visualization & Mathematics, 2002, 3(8/9): 35-57.
- [9] YANG X, ZHENG J. Curvature tensor computation by piecewise surface interpolation [J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(12): 1639-1650.
- [10] 袁启明, 施侃乐, 雍俊海, 等. 曲面二阶几何连续性的混合曲率评价与可视化 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, (11): 1830-1837.  
YUAN Qiming, SHI Kanle, YONG Junhai, et al. The mixed curvature and the  $G^2$  continuity visualization of surfaces [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011(11): 1830-1837.
- [11] AMENTA N, CHOI S, DEY T K, et al. A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction [C] // Proceedings of the sixteenth annual symposium on Computational Geometry. New York, USA: ACM, 2000: 213-222.
- [12] ZENG M, ZHAO F, ZHENG J, et al. Octree-based fusion for realtime 3D reconstruction [J]. Graphical Models, 2013, 75(3): 126-136.
- [13] MERRY B, GAIN J, MARAIS P. Accelerating kd-tree searches for all k-nearest neighbours [J]. Eurographics, 2013: 37-40.
- [14] 孙殿柱, 王超, 刘华东, 等. 基于三角 Bézier 曲面平刀环切粗加工刀轨生成算法 [J]. 计算机集成制造系统, 2012, 10: 2191-2195.  
SUN Dianzhu, WANG Chao, LIU Huadong, et al. Generating algorithm of contour-parallel rough tool-path for triangular Bezier surface [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2012, 18(10): 2191-2195.
- [15] 孙殿柱, 康新才, 李延瑞, 等. 三角 Bézier 曲面粗加工刀轨生成算法 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(3): 70-74.  
SUN Dianzhu, KANG Xincan, LI Yanrui, et al. Algorithm for generating rough tool-path based on triangular Bézier surface [J]. Journal of Xian Jiaotong University, 2011, 45(3): 70-74.
- [16] BAUER R, DELLING D, SANDERS P, et al. Combining hierarchical and goal-directed speed-up techniques for Dijkstra's algorithm [J]. Journal of Experimental Algorithmics, 2010, 15(3): 1-31.
- [17] 孙殿柱, 魏亮, 李延瑞, 等. 基于局部样本增益优化的  $\alpha$ -shape 曲面拓扑重建 [J]. 机械工程学报, 2016, 52(3): 136-142.  
SUN Dianzhu, WEI Liang, LI Yanrui, et al. Surface reconstruction with  $\alpha$ -shape based on optimization of surface local sample [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(3): 136-142.

(编辑 刘杨)