

DOI: 10.7652/xjtuxb202003015

# 低秩张量分解的多视角谱聚类算法

程士卿<sup>1,2</sup>, 郝问裕<sup>1</sup>, 李晨<sup>1</sup>, 张茁涵<sup>1</sup>, 曹容玮<sup>1</sup>

(1. 西安交通大学软件学院, 710049, 西安;

2. 轨道交通工程信息化国家重点实验室(中铁一院), 710043, 西安)

**摘要:** 针对传统多视角学习算法只关注从多视角中提取共享信息而忽略了各视角的特有信息和高阶关联的问题,提出了一种基于截断核范数的低秩张量分解的多视角谱聚类算法。计算各视角的样本相似度矩阵和转移概率矩阵,构建一个包含各视角马尔可夫转移概率矩阵的张量,从而保留各个视角的信息。采用基于张量奇异值分解的截断核范数约束目标张量的秩。通过最小化张量截断核范数,学习到一个既包含各个视角共享信息又具有高阶关联的张量。利用迭代最优化算法求解目标函数,将求得的目标张量输入谱聚类算法得到聚类结果。在 4 个不同类型数据集上进行实验并与传统聚类算法进行了对比,结果表明:所提算法在 4 个数据集上的标准互信息度量值比标准谱聚类算法的分别提高了 7.9%、24.9%、29.5%、8.1%,比 LT-MSF 算法的分别提高了 3.4%、18.1%、17.6%、6.6%。通过对非负平衡参数在 0.000 1~100 之间的测试发现,所提算法表现基本稳定,在非负平衡参数取 0.1~1 之间表现良好。与传统多视角聚类算法相比,所提算法可有效增强各视角之间的互补性和高阶关联,并且具有良好的准确性和鲁棒性。

**关键词:** 多视角谱聚类;张量;截断核范数

**中图分类号:** TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2020)03-0119-07

## Multi-View Clustering by Low-Rank Tensor Decomposition

CHENG Shiqing<sup>1,2</sup>, HAO Wenyu<sup>1</sup>, LI Chen<sup>1</sup>, ZHANG Zhuohan<sup>1</sup>, CAO Rongwei<sup>1</sup>

(1. School of Software Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. State Key Laboratory of Rail Transit Engineering Informatization (FSDI), Xi'an 710043, China)

**Abstract:** To solve the problem that the traditional multi-view learning methods cannot fully explore the consensus information among different views, a low-rank tensor decomposition multi-view spectral clustering algorithm based on truncated nuclear norm is proposed. The similarity matrix and transition probability matrix of each view are firstly obtained, then a tensor based on multi-view transition probability matrices is constructed. Tensor singular value decomposition based tensor truncated nuclear norm is imposed to preserve the low-rank property of the common tensor. Minimizing the tensor truncated kernel norm, a tensor containing both shared information and high-order correlations can be obtained properly via learning. The proposed method can be efficiently optimized by the alternating direction method of multipliers. Experimental results on 4 datasets show that compared with standard spectral clustering, the value of normalized mutual information is enhanced by 7.9%, 24.9%, 29.5% and 8.1% respectively, and 3.4%, 18.1%, 17.6% and 6.6% respectively compared with LT-MSF. It is found that the performance of the

收稿日期: 2019-08-16。 作者简介: 程士卿(1997—),女,硕士生;李晨(通信作者),女,讲师。 基金项目: 轨道交通工程信息化国家重点实验室(中铁一院)资助项目(SKLG19-07);国家自然科学基金资助项目(61573273)。

网络出版时间: 2019-12-04

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20191204.1427.002.html>

proposed method only has small variations when trade-off parameter is chosen from 0.000 1 to 100, and the best trade-off parameter is ranged from 0.1 to 1. The proposed method has good clustering effect and robustness, and can effectively enhance the complementarity between the various perspectives.

**Keywords:** multi-view spectral clustering; tensor; truncated nuclear norm

聚类是机器学习领域中的重要研究内容,是应用最广泛的数据分析技术之一,应用范围包括统计学、计算机科学、生物学、社会科学和心理学<sup>[1]</sup>。传统的聚类算法,如  $k$  均值算法等,通常建立在凸样本空间<sup>[2]</sup>,谱聚类能够很好地解决在非凸分布样本上的聚类问题,避免陷入局部最优解。标准谱聚类 (SPC) 算法通过样本之间的相似度矩阵建立一个无向有权图,边的权重表示两点之间的相似性,利用图的拉普拉斯矩阵的性质学习指示矩阵<sup>[3]</sup>。杨清宇等提出了利用测地线距离取代欧氏距离的谱聚类算法,该算法对流形分布和多尺度有噪声的数据有较好的聚类效果<sup>[4]</sup>。

现实中的数据往往是多角度或多领域的,如一个对象可以用文字、图片、视频等表示。由于充分利用多视角信息可以提高聚类效果,因此近年来多视角聚类受到了研究者的广泛关注。为了更好地利用多视角信息,Kumar 等提出了协同训练算法提取多视角之间的一致性信息<sup>[5]</sup>,随后又提出了协同正则化算法学习各视角之间的互补信息<sup>[6]</sup>。谱聚类中的拉普拉斯矩阵可以转换为转移概率矩阵<sup>[7]</sup>。Zhou 等提出了基于马尔可夫随机游走的谱聚类算法,利用图上的随机游走转移概率矩阵构建拉普拉斯矩阵<sup>[8]</sup>。杨金鸿等提出了一种基于度量学习的半监督多视角谱聚类算法,该算法通过距离度量学习引入先验信息,将多视角数据映射至先验条件约束的特定空间,再构建各个视角的相似度图,利用切图算法获得最后的聚类结果<sup>[9]</sup>。由于各个视角数据存在的噪声会影响转移概率矩阵的准确性,Xia 等在假设噪声具有稀疏性的前提下,提出了鲁棒的基于低秩稀疏矩阵分解多视角谱聚类算法 (RMSC),该算法利用矩阵的低秩稀疏分解,将每个视角的转移概率矩阵分解为一个低秩的共享矩阵和一个稀疏的噪声矩阵,从而学习到一个包含各视角公共信息的低秩转移概率矩阵,该算法有效地提取了各视角的公共信息<sup>[10]</sup>。Zhai 等提出了最小化部分奇异值的多视角谱聚类算法,该算法在 RMSC 的基础上通过最小化共享拉普拉斯矩阵的部分奇异值之和保证低秩性,进一步提高了聚类效果<sup>[11]</sup>。唐永强等提出了

基于自步学习的鲁棒多样性多视角聚类算法,该算法利用  $l_{2,1}$  范数对数据中的异常点进行约束,并通过自步正则项增加多视角下选择样本的多样性,从而提高算法的鲁棒性<sup>[12]</sup>。贺艳芳等针对不同视角的权重划分问题,提出了一种优化加权多视角  $K$ -means 聚类算法<sup>[13]</sup>,该算法利用加权策略动态调整不同视角的权重,获得了更好的聚类性能。Zong 等提出了基于谱扰动理论的加权多视角谱聚类算法,该算法根据不同视角的聚类结果应该与一致聚类结果近似,和具有相似聚类结果的视角应赋予相似的权重的原则,给各个视角赋予权重从而提高多视角聚类的准确度<sup>[14]</sup>。Zhang 等提出了将张量低秩约束应用于子空间多视角聚类,将不同视角的子空间表示矩阵合成一个张量,学习各视角的互补信息<sup>[15]</sup>。

上述研究工作在多视角聚类中取得了一定的成效,但是只关注于各视角之间的共享信息,不能很好地利用各个视角的特有信息和它们之间的高阶关联。有鉴于此,本文提出了基于最小化截断核范数的低秩张量分解的多视角谱聚类算法,既能够学习到各个视角的公共信息,又能保持各视角之间的高阶关联。利用该算法计算各个视角的相似度矩阵和转移概率矩阵,构建原始张量数据结构,通过截断核范数给张量施加低秩约束,并提出基于交替方向乘子法 (ADMM) 的优化算法,将学习到的一致张量作为传统谱聚类算法输入,取得了较好的聚类效果。

## 1 多视角谱聚类

### 1.1 符号说明

本文使用的符号如表 1 所示,t-SVD 分解过程如 1 图所示。设有 3 维张量  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,其沿第  $i$  维展开的向量称为  $i$  阶纤维,张量的  $l_{2,1}$  范数定义为其沿第 3 维展开的纤维的  $l_2$  范数之和。 $\mathbf{A}_f = \text{fft}(\mathbf{A})$ ,

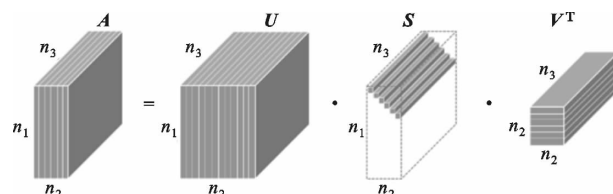


图1 t-SVD 分解过程示意

$[\cdot, 3)$ 表示张量  $\mathbf{A}$  沿第 3 维做快速傅里叶变换, 逆向傅里叶变换为  $\mathbf{A} = \text{ifft}(\mathbf{A}_i, [\cdot, 3))$ 。  $\|\mathbf{A}\|_{\odot} = \text{tr} \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n_3} \text{tr} \mathbf{S}^{(i)}$  表示  $\mathbf{A}$  基于 t-SVD 分解的张量核范数,  $\mathbf{S}^{(i)}$  表示  $\mathbf{S}$  的正面切片。

表 1 本文符号及定义

| 符号                                       | 定义                                                                                                                                           |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{J}, \mathbf{K}$                 | 张量                                                                                                                                           |
| $\mathbf{M}, \mathbf{N}$                 | 矩阵                                                                                                                                           |
| $\ \mathbf{J}\ _{\text{F}}$              | 张量 $\mathbf{J}$ 的 F 范数, $\ \mathbf{J}\ _{\text{F}} = \sqrt{\sum_{ijk}  \mathbf{J}_{ijk} ^2}$                                                 |
| $\ \mathbf{M}\ _{\text{F}}$              | 矩阵 $\mathbf{M}$ 的 F 范数, $\ \mathbf{M}\ _{\text{F}} = \sqrt{\sum_{ij} M_{ij}^2}$                                                              |
| $\ \mathbf{J}\ _{\odot}$                 | 基于 t-SVD 分解的张量核范数                                                                                                                            |
| $\ \mathbf{M}\ _*$                       | 矩阵 $\mathbf{M}$ 的奇异值之和                                                                                                                       |
| $\ \mathbf{J}\ _{2,1}$                   | 张量的 $l_{2,1}$ 范数, $\ \mathbf{J}\ _{2,1} = \sum_{ijk} \ \mathbf{J}(i, j, :)\ _2$                                                              |
| $\ \mathbf{M}\ _{2,1}$                   | 矩阵的 $l_{2,1}$ 范数, $\ \mathbf{M}\ _{2,1} = \sum_j \ \mathbf{M}(:, j)\ _2$                                                                     |
| $\ \mathbf{J}\ _1$                       | $\ \mathbf{J}\ _1 = \sum_{ijk}  \mathbf{J}_{ijk} $                                                                                           |
| $\ \mathbf{M}\ _1$                       | 矩阵 $\mathbf{M}$ 的 $l_1$ 范数, $\ \mathbf{M}\ _1 = \sum_{ij}  \mathbf{M}_{ij} $                                                                 |
| $\langle \mathbf{J}, \mathbf{K} \rangle$ | 张量的内积, $\langle \mathbf{J}, \mathbf{K} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_3} \langle \mathbf{J}^{(i)}, \mathbf{K}^{(i)} \rangle$ |
| $\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle$ | 矩阵的内积, $\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\mathbf{M}^T \mathbf{N})$                                  |
| $\ \mathbf{J}\ _{\infty}$                | 3 阶张量的无穷范数, $\ \mathbf{J}\ _{\infty} = \max_{ijk}  \mathbf{J}_{ijk} $                                                                        |
| $\mathbf{J}_i$                           | $\mathbf{J}_i = \text{fft}(\mathbf{J}, [\cdot, 3))$                                                                                          |
| $\mathbf{J}_{ijk}$                       | $\mathbf{J}$ 的下标 $ijk$ 位置的数                                                                                                                  |
| $\mathbf{J}(i, :, :)$                    | $\mathbf{J}$ 的第 $i$ 个水平切片                                                                                                                    |
| $\mathbf{J}(:, j, :)$                    | $\mathbf{J}$ 的第 $j$ 个侧面切片                                                                                                                    |
| $\mathbf{J}(:, :, k)$                    | $\mathbf{J}$ 的第 $k$ 个正面切片                                                                                                                    |
| $\mathbf{J}^{(i)}$                       | $\mathbf{J}^{(i)} = \mathbf{J}(:, :, i)$                                                                                                     |
| $\mathbf{J}_{(i)}$                       | $\mathbf{J}$ 的第 $i$ 阶展开矩阵                                                                                                                    |

## 1.2 多视角谱聚类模型

在多视角谱聚类中, 假设给定的数据集有  $m$  个视角,  $k$  个类别,  $\mathbf{X}^{(i)} = [x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}] \in \mathbf{R}^{d^{(i)} \times n}$  表示第  $i$  个视角的数据矩阵,  $n$  表示样本数量,  $d^{(i)}$  表示第  $i$  个视角的特征维数,  $i = 1, \dots, m$ 。计算各视角相似度矩阵  $\mathbf{S}^{(i)} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $s_{ij}^{(i)}$  表示  $x_i^{(i)}$  和  $x_j^{(i)}$  的相似度。根据  $\mathbf{S}^{(i)}$  计算每个视角的转移概率矩阵  $\mathbf{P}^{(i)}$ , 基于马尔可夫链的多视角谱聚类算法<sup>[8]</sup>定义了  $\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S}$ ,  $p_{ij}$  指从节点  $i$  到节点  $j$  的随机游走转移概率,  $\mathbf{D}$  为对角线上元素为  $d_{ii} = \sum_j s_{ij}$  的对角矩阵。由此可见,  $\mathbf{P}$  在马尔可夫谱聚类中非常关键, 所以希望学习到公共的具有低秩特性的  $\mathbf{P}$ 。

## 2 低秩张量分解的多视角谱聚类算法

### 2.1 算法框架

本文算法由 2 部分组成, 第 1 部分计算多视角数据的相似度矩阵和转移概率矩阵, 第 2 部分对构建的张量数据做基于 t-SVD 的截断核范数的分解, 得到一个用于马尔可夫谱聚类的低秩张量和一个误差张量。本文算法框架如图 2 所示。

为了保持各视角之间的高阶关联, 将各视角的转移概率矩阵  $\mathbf{P}^{(i)}$  构建为 3 维张量  $\mathbf{L}$ 。利用基于 t-SVD 的张量核范数约束  $\mathbf{L}$ , 得到初步目标函数

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{L}^*, \mathbf{E}, \mathbf{W}} & (\|\mathbf{L}^*\|_{\odot} + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1}) \\ \text{s. t. } & \mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{L}^*$  为希望求得的具有低秩性的矩阵构成的张量;  $\mathbf{E}$  为各个视角分解出的噪声矩阵构成的张量;  $\lambda$  为非负平衡参数。通常情况下, 待聚类数据的类别数  $k$  远小于样本数, 所以  $\mathbf{L}$  应该是低秩的。此时, 一般利用最小化核范数作为低秩约束, 但是最小化核范数只能使奇异值之和最小并不能保证秩最小。因此, 本文在  $k$  已知的情况下, 使用截断核范数。由此, 目标函数可以进一步转化为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{L}^*, \mathbf{E}, \mathbf{W}} & (\|\mathbf{L}^*\|_k + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1}) \\ \text{s. t. } & \mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

文献<sup>[16]</sup>给出了张量截断核范数和核范数之间的关系: 对于张量  $\mathbf{L}^* = \mathbf{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 存在

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{L}^*\|_k &= \|\mathbf{L}^*\|_{\odot} - \max \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{L}^* \mathbf{B}^T) \\ \text{s. t. } & \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  分别为  $\mathbf{L}^*$  的 t-SVD 分解结果的  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  的第 2 维的前  $k$  列, 即  $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}(:, 1:k, :)^T$ ,  $\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V}(:, 1:k, :)^T$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n_1 \times k \times n_3}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n_2 \times k \times n_3}$ 。

求解过程中更新  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  后, 固定  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  求解其他变量。为了方便目标函数优化, 将式(2)第一个  $\mathbf{L}^*$  替换为  $\mathbf{Q}$ , 根据式(2)(3)得到目标函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{L}^*, \mathbf{E}, \mathbf{W}} & (\|\mathbf{Q}\|_{\odot} - \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{L}^* \mathbf{B}^T) + \lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1}) \\ \text{s. t. } & \mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{E}, \mathbf{Q} = \mathbf{L}^* \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 2.2 目标函数求解

式(4)的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \mathbf{L}^*, \mathbf{E}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) &= \|\mathbf{Q}\|_{\odot} - \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{L}^* \mathbf{B}^T) + \\ &\lambda \|\mathbf{E}\|_{2,1} + \langle \mathbf{Y}_1, \mathbf{L} - \mathbf{L}^* + \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{Y}_2, \mathbf{Q} - \mathbf{L}^* \rangle + \\ &\frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{Q} - \mathbf{L}^*\|_{\text{F}}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{L} - \mathbf{L}^* + \mathbf{E}\|_{\text{F}}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$  为拉格朗日算子;  $\mu_1, \mu_2 > 0$  为惩罚参

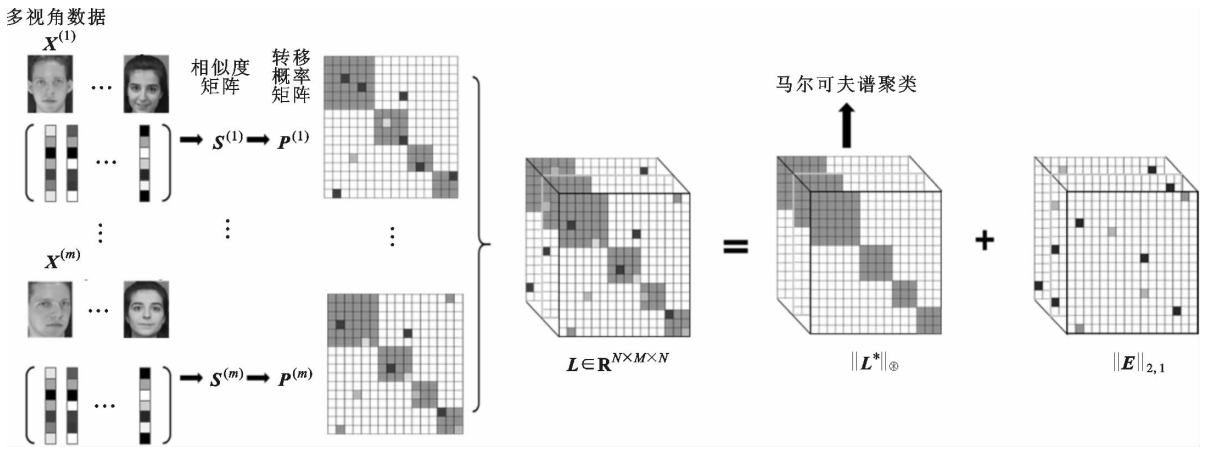


图2 基于截断核范数的低秩张量分解的多视角谱聚类算法框图

数。使用 ADMM 算法求解目标函数,迭代更新过程如下。

(1)更新  $Q$ 。固定  $L^{*k}$  和  $Y_2^k$  更新  $Q^{k+1}$ ,保留式(5)中含有  $Q$  的项,可得

$$Q^{k+1} = \arg \min_Q (\|Q\|_* + \frac{\mu_1}{2} \|Q - (L^* - Y_2/\mu_1)\|_F^2) \quad (6)$$

根据文献[16],基于 t-SVD 分解的张量核范数最小化问题可以对  $L^{*k} - Y_2^k/\mu_1$  进行奇异值阈值(SVT)操作求解,即

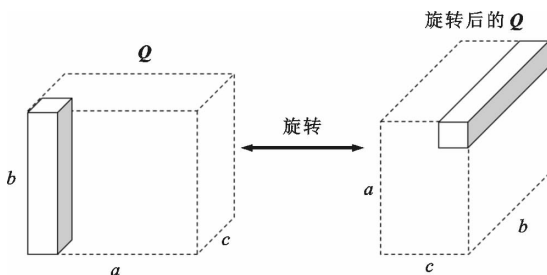
$$Q^{k+1} = D_{1/\mu_1}(L^{*k} - Y_2^k/\mu_1) \quad (7)$$

式中  $D_t$  表示 SVT 操作符,  $t=1/\mu_1$  为阈值。假设张量  $Q \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的 t-SVD 为  $USV^T$ , 则

$$D_t(Q) = UD_t(S)V^T, D_t(S) = \text{ifft}(D_t(S_f)) \quad (8)$$

其中  $D_t(S_f^{(i)}) = \text{diag}(\max\{\sigma_i - t, 0\}_{1 \leq i \leq r})$ ,  $i=1, 2, \dots, n_3$ ,  $\text{diag}$  为生成对角矩阵函数。

在计算过程中,根据文献[17]将张量  $Q$  进行旋转,做 t-SVD 分解,在完成 t-SVD 分解后再旋转为原始方向,旋转过程如图 3 所示。

图3 张量  $Q$  的旋转过程

(2)更新  $L^*$ 。固定  $Q^k$ 、 $Y_1$  和  $Y_2$ ,更新  $L^{*k+1}$ ,得到

$$L^{*k+1} = \arg \min_{L^*} (\frac{\mu_1}{2} \|Q - L^*\|_F^2 + \frac{\mu_2}{2} \|L - L^* + E\|_F^2 + \langle Y_1, L - L^* + E \rangle + \langle Y_2, Q - L^* \rangle -$$

$$\text{tr}(A_k L^* B_k^T)) \quad (9)$$

式(9)是关于  $L^*$  的二次函数,令式(9)的导数为 0,可以求得

$$L^{*k+1} = 2(A_k^T B_k + Y_1 + Y_2)/(\mu_1 + \mu_2) + (L + Q - E)/2 \quad (10)$$

(3)更新  $E$ 。固定  $L^{*k+1}$  更新  $E$ ,保留式(5)中含有  $E$  的项,可得

$$E^{k+1} = \arg \min_E (\lambda \|E\|_{2,1} + \frac{\mu_2}{2} \|E - (L - L^{*k+1} + Y_1/\mu_2)\|_F^2) \quad (11)$$

张量  $E$  的  $l_{2,1}$  范数定义为沿第 3 阶展开的纤维向量的  $l_2$  范数之和,即

$$\|E_{(3)}^{k+1}\|_{2,1} = \|E^{k+1}\|_{2,1} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)可得

$$E_{(3)}^{k+1} = \arg \min_{E_{(3)}} (\lambda \|E_{(3)}\|_{2,1} + \frac{\mu_2}{2} \|E_{(3)} - (L_{(3)} - L_{(3)}^{*k+1} + Y_{1(3)}^{k+1}/\mu_2)\|_F^2) \quad (13)$$

令  $D = L_{(3)} - L_{(3)}^{*k+1} + Y_{1(3)}^{k+1}/\mu_2$ , 根据文献[18],式(13)有近似解为

$$E_{(3),i}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\|D_{:,i}\|_2 - \lambda(\mu_2^k)^{-1}}{\|D_{:,i}\|_2} D_{:,i}, & \|D_{:,i}\|_2 \geq \frac{\lambda}{\mu_2^k} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

式中  $D_{:,i}$  为矩阵  $D$  的第  $i$  列。将更新得到  $E_{(3)}^{k+1}$  恢复成张量即得到  $E^{k+1}$ 。

(4)更新  $Y_1$  和  $Y_2$ ,公式为

$$Y_1^{k+1} = Y_1^k + \mu_2^k (L - L^{*k+1} - E^{k+1}) \quad (15)$$

$$Y_2^{k+1} = Y_2^k + \mu_1 (L^{*k+1} - Q_{k+1}) \quad (16)$$

本文提出的最小化低秩张量截断核范数的多视角谱聚类算法伪代码如下。

输入:多视角数据  $X(i) = \{x_1^i, \dots, x_n^i\} \in \mathbb{R}^{d(i) \times n}$ ,  $i=1, \dots, m$ 。

(1)计算相似度矩阵  $\mathbf{S}$  和转移概率矩阵  $\mathbf{P}$ ,将各视角的  $\mathbf{P}^{(i)}$  合成为张量  $\mathbf{L}$ 。初始化  $k=0, \mathbf{L}^0=\mathbf{E}^0=\mathbf{Y}_1=\mathbf{Y}_2=\mathbf{0}, \mu_1=\mu_2=10^{-5}, \rho=1.9, \mu^{\max}=10^8, \epsilon=10^{-6}$ 。

(2)ADMM 优化

```
while 不收敛 do
    根据式(7)更新  $\mathbf{Q}$ ;
    根据式(10)更新  $\mathbf{L}^*$ ;
    根据式(14)更新  $\mathbf{E}$ ;
    根据式(15)(16)更新  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ ;
     $\mu_1^{k+1}=\min(\rho\mu_1^k, \mu^{\max})$ ;
     $\mu_2^{k+1}=\min(\rho\mu_2^k, \mu^{\max})$ ;
until:满足收敛条件或达到最大迭代次数
收敛条件:  $\|\mathbf{L}^{*k+1}-\mathbf{L}^{*k}\|_\infty\leq\epsilon, \|\mathbf{E}^{*k+1}-\mathbf{E}^{*k}\|_\infty\leq\epsilon, \|\mathbf{Q}-\mathbf{L}^{*k+1}-\mathbf{E}^{*k+1}\|_\infty\leq\epsilon$ 。
输出:  $\mathbf{L}^{*k+1}, \mathbf{L}^{k+1}$ 。
```

将求解得到的  $\mathbf{L}^* \in \mathbf{R}^{n \times n \times m}$  的正面切片累加,得到  $\mathbf{L}_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{L}^*(:,:,i)$ 。将  $\mathbf{L}_{\text{sum}}$  作为马尔可夫谱聚类的转移概率矩阵进行计算,即可得到聚类结果。

### 3 实验结果与分析

#### 3.1 实验设置

3.1.1 数据集 为了验证算法有效性,在 4 个具有明显差异的数据集上进行实验,分别是 ORL 数据集<sup>[19]</sup>、Texture 数据集<sup>[20]</sup>、UCI\_Digits 数据集<sup>[21]</sup> 和 Movies 数据集<sup>[22]</sup>,部分图像数据示例如图 4 所示。

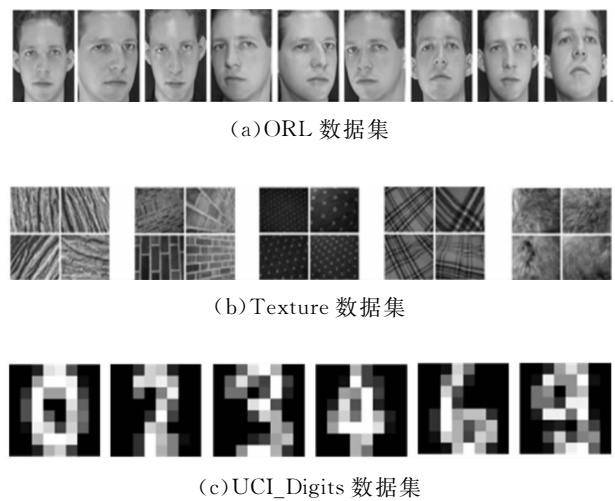


图 4 部分图像数据示例

ORL 数据集包含 40 个人在不同光照下或者不同面部表情下的各 10 张图像,共 400 张图像。Texture 数据集包含 25 个纹理类别,每个类别 40 个样本。UCI\_Digits 数据集包含 2 000 张从 0~9 的手

写数字图像。Movies 数据集包含 617 部电影的关键字和演员两个视角的描述,共分为 17 个标签。数据集的样本类别和视角情况如表 2 所示。

表 2 数据集情况

| 数据集        | 样本数   | 数据类型   | 类别数 | 视角数 |
|------------|-------|--------|-----|-----|
| ORL        | 400   | 人脸图像   | 40  | 3   |
| Texture    | 1 000 | 纹理图像   | 25  | 3   |
| UCI_Digits | 2 000 | 手写数字图像 | 10  | 3   |
| Movies     | 617   | 描述型文本  | 17  | 2   |

3.1.2 对比算法 将本文提出的算法同以下 6 个算法进行对比:①文献[3]算法(标准谱聚类算法),选择各单视角标准谱聚类算法结果的最优值;②文献[18]算法,选择各单视角采用低秩表示算法结果的最优值;③文献[6]算法,通过协同正则化算法实现多视角信息互补;④文献[10]算法,学习多视角共享的低秩转移概率矩阵;⑤文献[11]算法,最小化部分奇异值之和求得共享拉普拉斯矩阵;⑥文献[15]算法(LT-MS 算法),利用低秩张量约束的子空间聚类。

3.1.3 评价指标 采用 4 个常用的评价指标进行结果评估,分别是标准互信息(N)、查准率(P)、查全率和查准率的加权调和平均(F)、调整兰德系数(A)。

#### 3.2 实验结果分析

3.2.1 实验结果 在 4 个数据集上对 3.1.2 小节的 6 个算法和本文算法进行测试。为避免实验误差,分别对不同算法的参数进行调优,然后各自运行 30 次并计算各指标的均值,实验结果如表 3 所示,表中加粗数据表示最优结果。

从表 3 中可以看出:本文算法在 4 个数据集上均取得了最优的聚类结果,文献[15]算法次优;在 Texture 数据集和 UCI\_Digits 数据集上,本文算法的各项评价指标相比于次优算法的均提高了 10% 以上;在 ORL 数据集上,本文算法的 N、F 和 A 分别比次优算法的提高了 3.4%、9.3%、9.6%;在 Movies 文本数据集上,本文算法的 N、P、F 比次优算法的分别提高了 6.6%、4.7%、4.9%;在 4 个数据集上,本文算法的 N 比文献[3]算法的分别提高了 7.9%、24.9%、29.5%、8.1%,比文献[15]算法的分别提高了 3.4%、18.1%、17.6%、6.6%。

由实验结果可知,单视角聚类算法由于只利用一个视角的信息,对数据中的噪声和缺失敏感,即使采用最优的视角聚类结果仍不如多视角算法。文献

表 3 不同算法在各个数据集上的实验结果对比

| 算法来源   | ORL 数据集      |              |              |              | Texture 数据集  |              |              |              |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|        | N            | P            | F            | A            | N            | P            | F            | A            |
| 文献[3]  | 0.884        | 0.616        | 0.708        | 0.650        | 0.434        | 0.192        | 0.204        | 0.169        |
| 文献[18] | 0.895        | 0.684        | 0.748        | 0.742        | 0.427        | 0.193        | 0.200        | 0.167        |
| 文献[6]  | 0.854        | 0.569        | 0.613        | 0.603        | 0.428        | 0.185        | 0.196        | 0.161        |
| 文献[10] | 0.878        | 0.635        | 0.655        | 0.645        | 0.425        | 0.179        | 0.184        | 0.150        |
| 文献[11] | 0.881        | 0.641        | 0.679        | 0.671        | 0.348        | 0.131        | 0.135        | 0.099        |
| 文献[15] | 0.929        | 0.765        | 0.761        | 0.755        | 0.502        | 0.256        | 0.269        | 0.238        |
| 本文     | <b>0.963</b> | <b>0.795</b> | <b>0.854</b> | <b>0.851</b> | <b>0.683</b> | <b>0.442</b> | <b>0.464</b> | <b>0.441</b> |

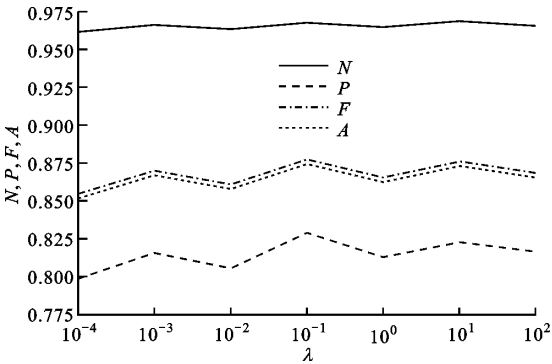
| 算法来源   | UCI_Digits 数据集 |              |              |              | Movies 数据集   |              |              |              |
|--------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|        | N              | P            | F            | A            | N            | P            | F            | A            |
| 文献[3]  | 0.643          | 0.577        | 0.587        | 0.541        | 0.259        | 0.140        | 0.147        | 0.088        |
| 文献[18] | 0.474          | 0.372        | 0.393        | 0.322        | 0.316        | 0.203        | 0.205        | 0.153        |
| 文献[6]  | 0.805          | 0.732        | 0.782        | 0.754        | 0.261        | 0.140        | 0.147        | 0.089        |
| 文献[10] | 0.821          | 0.772        | 0.791        | 0.767        | 0.156        | 0.090        | 0.091        | 0.031        |
| 文献[11] | 0.699          | 0.640        | 0.655        | 0.615        | 0.131        | 0.080        | 0.082        | 0.021        |
| 文献[15] | 0.762          | 0.725        | 0.737        | 0.707        | 0.274        | 0.163        | 0.166        | 0.111        |
| 本文     | <b>0.938</b>   | <b>0.850</b> | <b>0.891</b> | <b>0.878</b> | <b>0.340</b> | <b>0.210</b> | <b>0.215</b> | <b>0.162</b> |

[6]算法先求得每个视角的指示矩阵,然后对每个视角的指示矩阵加正则化约束,提取各个视角的一致性信息,从而实现多视角聚类,该算法不能有效利用多视角的信息。文献[10]算法和文献[11]算法分别对转移概率矩阵和相似度矩阵施加低秩稀疏约束,这两个算法只关注于提取一个用于谱聚类的公共表达,而忽略了各视角的特有信息。文献[15]算法将各个视角的子空间表达合并为张量,对张量施加低秩约束,从而得到用于聚类的子空间表达,实现了多视角聚类,但是在构建子空间表达时存在重构误差。

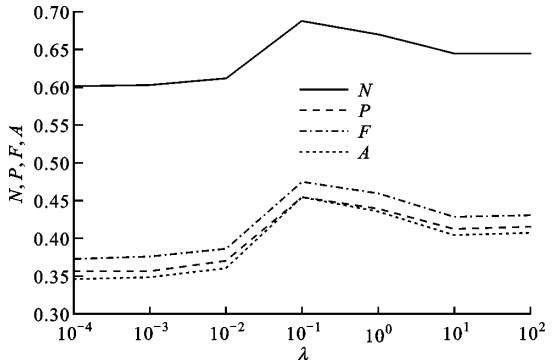
本文提出的算法利用各个视角的转移概率矩阵构建了高阶张量,在各个视角之间建立的高阶关联,保留了各视角之间的相关性,并利用类别先验信息加入了截断核范数的约束,更好地发掘和利用了各视角的信息。实验证明,本文算法在不同类型的数据集上都具有明显优势。

3.2.2 参数设置 本文提出的算法中包含一个平衡参数 $\lambda$ ,需要对该参数的调优过程及敏感性进行分析。以 ORL 数据集和 Texture 数据集为例,参数 $\lambda$ 的调优过程如图 5 所示。

从图 5 可以看出:在 ORL 数据集上, $\lambda$  不同时各项聚类评价指标波动较小,当 $\lambda$  为 0.000 1 和 100 时,本文算法现相对较差;在 Texture 数据集上,当 $\lambda$  在 0.000 1~0.01 时结果较差,当 $\lambda>1$  时相对平稳。由此得出, $\lambda$  的最佳取值为 0.1,当 $\lambda$  在 0.1~1



(a)ORL 数据集



(b)Texture 数据集

图 5 参数 $\lambda$ 在不同数据集上的调优过程

时,本文算法表现较好。

从目标函数(式(4))可以看出, $\lambda$  的取值决定了噪声项的重要性,这说明过多的忽略或重视噪声项

都不利于正确聚类,选择适中的平衡参数更利于算法发挥作用。经过验证,在较大跨度的参数取值范围中,本文算法表现稳定,因此本文算法不需要复杂的调参过程,只要在合适的范围内选择参数即可,具有较好的鲁棒性。

## 4 结 论

在多视角聚类方法的研究中,如何有效利用来自不同视角的信息是提高聚类结果准确性的关键所在。针对现存方法仅利用不同视角的一致性信息而忽略了各个视角的特有信息以及关联性的问题<sup>[10-11]</sup>,本文提出了一种基于马尔可夫谱聚类的最小化低秩张量截断核范数的多视角谱聚类算法,得出的主要结论如下。

(1)本文算法将来自多个视角的转移概率矩阵合并为高阶张量,从而使各个视角的特有信息得以保留,并进一步通过最小化基于 t-SVD 分解的张量截断核范数学习一个低秩的共享张量,保留了各视角之间的高阶关联。

(2)本文算法在 ORL 数据集<sup>[19]</sup>、Texture 数据集<sup>[20]</sup>、UCI\_Digits 数据集<sup>[21]</sup>和 Movies 数据集<sup>[22]</sup>共 4 个数据集上进行了验证。实验结果表明,本文算法的  $N$ 、 $F$  和  $A$  这 3 个评价指标明显优于其他对比算法的。特别的,在 Texture 数据集<sup>[20]</sup>和 UCI\_Digits 数据集<sup>[21]</sup>上,本文算法的  $N$  分别比标准谱聚类算法的提高了 24.9% 和 29.5%。

(3)本文算法不需要复杂的调参过程,只需在合适的范围内选择参数即可,具有较好的鲁棒性。

## 参考文献:

- [1] VON LUXBURG U. A tutorial on spectral clustering [J]. Statistics and Computing, 2007, 17(4): 395-416.
- [2] 贾建华, 焦李成, 柳炳祥. 图像分割的谱聚类集成算法 [J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(6): 93-98.  
JIA Jianhua, JIAO Licheng, LIU Bingxiang. A spectral clustering ensemble algorithm for image segmentation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(6): 93-98.
- [3] NG A Y, JORDAN M I, WEISS Y. On spectral clustering: analysis and an algorithm [C]//Proceedings of the 15th Annual Neural Information Processing Systems Conference. San Diego, CA, USA: NIPS, 2002: 849-856.
- [4] 杨清宇, 孙凤伟, 张翌, 等. 利用测地线距离的改进谱聚类算法 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(8): 1-7.  
YANG Qingyu, SUN Fengwei, ZHANG Zhao, et al. An improved spectral clustering algorithm using geodesic distance [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(8): 1-7.
- [5] KUMAR A, DAUMÉ H. A co-training approach for multi-view spectral clustering [C]//International Conference on International Conference on Machine Learning. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 393-400.
- [6] KUMAR A, RAI P, DAUMÉ H. Co-regularized multi-view spectral clustering [C]//Proceedings of the 24th International Conference on Neural Information Processing Systems. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011: 1413-1421.
- [7] SHI J B, MALIK J. Normalized cuts and image segmentation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905.
- [8] ZHOU D, BURGESS C J C. Spectral clustering and transductive learning with multiple views [C]//Proceedings of the 24th international conference on Machine learning. New York, USA: ACM, 2007: 1159-1166.
- [9] 杨金鸿, 邓廷权. 基于距离度量学习的半监督多视角谱聚类算法 [J]. 四川大学学报(工程科学版), 2016, 48(1): 146-151.  
YANG Jinhong, DENG Tingquan. A semi-supervised multiview spectral clustering algorithm based on distance metric learning [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2016, 48(1): 146-151.
- [10] XIA R, PAN Y, DU L, et al. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition [C]//Proceedings of the 28th AAAI Conference on Artificial Intelligence. Palo Alto, CA, USA: AAAI, 2014: 2149-2155.
- [11] ZHAI L, ZHU J H, ZHENG Q H, et al. Multi-view spectral clustering via partial sum minimisation of singular values [J]. Electronics Letters, 2019, 55(6): 314-316.
- [12] 唐永强, 张文生. 基于自步学习的鲁棒多样性多视角聚类 [J]. 中国图象图形学报, 2019, 24(8): 1338-1348.  
TANG Yongqiang, ZHANG Wensheng. Robust and diverse multi-view clustering based on self-paced learning [J]. Journal of Image and Graphics, 2019, 24(8): 1338-1348.

(下转第 133 页)

- [12] QIN L, LIANG X Q, HUANG H, et al. A versatile soft crawling robot with rapid locomotion [J]. *Soft Robotics*, 2019, 6(4): 455-467.
- [13] 杜勇. 具有多运动模式的可变形软体机器人研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2013: 25-33.
- [14] 刘亭羽. 仿生气动软体蠕动机器的研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018: 11-20.
- [15] ZOU J, LIN Y, JI C, et al. A reconfigurable omnidirectional soft robot based on caterpillar locomotion [J]. *Soft Robotics*, 2018, 5(2): 164-174.
- [16] 王江北, 方晔阳, 童歆, 等. 多气囊仿生软体机器人设计及其运动特性分析 [J]. *上海交通大学学报*, 2018, 52(1): 20-25.  
WANG Jiangbei, FANG Yeyang, TONG Xin, et al. Design and locomotion properties of a multi-airbag bionic soft robot [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2018, 52(1): 20-25.
- [17] 王绪, 费燕琼, 许红伟, 等. 仿尺蠖蠕动机模块化软体机器人的设计 [J]. *高技术通讯*, 2015, 25(8): 829-834.
- WANG Xu, FEI Yanqiong, XU Hongwei, et al. Design of modular soft robots imitating inchworm peristalsis [J]. *High Technology Letters*, 2015, 25(8): 829-834.
- [18] FECZKO J, MANKA M, KROL P, et al. Modular self-reconfigurable robot systems challenges and opportunities for the future [C]//2015 10th International Workshop on Robot Motion and Control. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015: 182-187.
- [19] 张玉华, 赵杰, 张亮, 等. 新型模块化可重构机器人系统 [J]. *机械工程学报*, 2006, 42(s1): 175-178.  
ZHANG Yuhua, ZHAO Jie, ZHANG Liang, et al. Novel modular self-reconfigurable robot system [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(s1): 175-178.
- [20] WU P, WANG J B, FEI Y Q. The structure, design, and closed-loop motion control of a differential drive soft robot [J]. *Soft Robotics*, 2018, 5(1): 71-80.

(编辑 陶晴)

(上接第125页)

- [13] 贺艳芳, 梁书田. 优化加权多视角  $K$ -means 聚类算法 [J]. *计算机技术与发展*, 2019, 29(3): 81-84.  
HE Yanfang, LIANG Shutian. Optimizing weighted multi-view  $K$ -means clustering algorithm [J]. *Computer Technology and Development*, 2019, 29(3): 81-84.
- [14] ZONG L, ZHANG X, LIU X, et al. Weighted multi-view spectral clustering based on spectral perturbation [C]//Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence. Palo Alto, CA, USA: AAAI, 2018: 4621-4629.
- [15] ZHANG C, FU H, LIU S, et al. Low-rank tensor constrained multiview subspace clustering [C]//Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015: 1582-1590.
- [16] XUE S, QIU W, LIU F, et al. Low-rank tensor completion by truncated nuclear norm regularization [C]//Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018: 2600-2605.
- [17] XIE Y, TAO D C, ZHANG W S, et al. On unifying multi-view self-representations for clustering by tensor multi-rank minimization [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2018, 126(11): 1157-1179.
- [18] LIU G C, LIN Z C, YAN S C, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(1): 171-184.
- [19] Digital Technology Group. ORL dataset [DS/OL]. [2019-08-01]. <https://www.cl.cam.ac.uk/research/dtg/attarchive/facedatabase.html>.
- [20] LAZEBNIK S, SCHMID C, PONCE J. A sparse texture representation using local affine regions [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(8): 1265-1278.
- [21] DUA D, GRAFF C. UCI machine learning repository [DS/OL]. [2019-08-01]. <http://archive.ics.uci.edu/ml/index.php>.
- [22] CLÉMENT G. Movies dataset [DS/OL]. [2019-08-01]. <http://membres-lig.imag.fr/grimal/data.html>.

(编辑 陶晴)