

二维基本矩形主方向关系的原关系推理

王淼¹, 王晓桐², 李松³, 郝忠孝³

(1. 河南工程学院计算机学院, 451191, 郑州; 2. 中南大学计算机学院, 410083, 长沙;

3. 哈尔滨理工大学计算机科学与技术学院, 150080, 哈尔滨)

摘要: 为了实现二维基本矩形主方向关系的原关系自动推理, 进一步提高对空间方向关系的智能推理与预测, 给出了二维基本矩形主方向关系的原关系推理规则, 并对其正确性进行了证明。进而, 提出了一个二维矩形主方向关系的原关系推理算法, 该算法借助队列对解空间进行搜索和剪枝, 实现了方向关系矩阵模型下二维矩形主方向关系原关系的自动推理与计算。理论分析和实验验证的结果表明: 该算法是正确的、完备的; 该算法有效地解决了二维基本矩形主方向关系原关系的自动推理问题, 避免了复杂、烦琐的手工推理, 增强了模型的自动计算与推理能力, 为实现二维基本主方向关系的复合、反关系推理及一致性检验等问题的自动推理与分析奠定了基础, 完善和提高了空间数据库对空间方向关系的智能分析与处理能力。

关键词: 矩形主方向关系; 原关系; 方向关系矩阵; 自动推理; 空间数据库

中图分类号: TP311.13 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202004017 **文章编号:** 0253-987X(2020)04-0133-11



OSID 码

Reasoning with the Original Relations of the Basic 2D Rectangular Cardinal Direction Relation

WANG Miao¹, WANG Xiaotong², LI Song³, HAO Zhongxiao³

(1. College of Computer Science, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 451191, China;

2. College of Computer Science, Central South University, Changsha 410083, China;

3. College of Computer Science and Technology, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In order to realize automatic reasoning with the original relations of rectangular cardinal direction relations between regions and then to improve model's power of intelligent reasoning and prediction for direction relations, corresponding inference rules are given and their correctness is proved. An algorithm is proposed to automatically compute the original relations of the rectangular cardinal direction relations defined by a direction relation matrix and to realize automatic reasoning and calculation of the original relationship of the cardinal direction of the two-dimensional rectangle under the direction relation matrix model. The algorithm searches and prunes the solution space with the help of a queue. Theoretical analysis and experimental results show that the algorithm is correct and complete. This algorithm effectively solves the problem of automatic reasoning with the original relations of the rectangular cardinal direction relations, avoids the complicated manual reasoning, and enhances model's power of automatic computing and reasoning. This study lays a foundation for the problems of composing, inversing and consistence checking with cardinal direction relations, and then enhances the intelligent analysis

and processing capacity of the spatial database for spatial direction relations.

Keywords: rectangular cardinal direction relation; original relation; direction relation matrix; automatic reasoning; spatial database

空间方向关系是空间认知中的一个基本概念,用来表达空间中一个对象相对于另一个对象的位置信息,反映空间对象间的序关系^[1]。空间方向关系是地理信息系统的重要理论问题,它与空间距离、空间拓扑关系一样,是空间关系的重要组成部分,在空间查询、空间分析和空间推理等过程中发挥着极其重要的作用,受到了广泛关注,日益成为空间及时空数据库、地理信息系统、模式识别、人工智能和机器人等领域研究的热点和难点问题^[2],广泛应用于空间智能分析处理、城市管网配置规划、抢险救援、地理信息可视化等领域。目前对空间方向关系的研究主要集中在空间方向关系表达模型^[3-9]和在表达模型之上的推理工作,包括空间方向关系的复合^[10-13]、反关系推理^[14-16]和一致性检验^[17-20]等。空间方向关系形式化描述模型作为空间方向关系认知和推理的前提,在空间方向关系研究领域受到了广泛关注。

近年来,人们相继提出诸多模型,其中,Goyal 提出的方向关系矩阵模型^[5-6]被认为是当前较为理想的二维空间对象方向关系模型,由于该模型易于计算,可推理性强,基于该模型的一些改进和推理工作陆续展开。Goyal 等最先基于方向关系矩阵模型对二维基本主方向关系复合进行研究,给出了该模型下二维基本主方向关系的复合推理规则。Skiadopoulos 等证明了 Goyal 等的主方向关系复合理论是不完善的,从结果的存在性和一致性对 Goyal 等的复合理论进行了修正,但该方法依赖于推理运算表且计算过程复杂^[10]。刘永山等对 Goyal 等定义的基本主方向关系的一个子类矩形主方向关系的复合、反关系推理和一致性检验等问题进行研究,分别给出了相应的推理和一致性检验算法^[19]。由于基本矩形主方向关系的原关系推理这一基础问题没有解决,致使这些方法无法扩展应用于基本主方向关系,只能以空间区域对象的最小外包矩形近似地替代空间对象本身,这在一定程度上降低了表达和推理的精度。王森等在 Goyal 等的模型中引入了定性直角坐标系,用来表示二维区域对象间的方位关系,并基于改进的模型,给出了一个二维基本主方向关系复合算法,以提高推理的精度^[1],但该方法需要借助基本矩形主方向关系原关系的手工推理。Chen 等基于二维矩形主方向关系原关系的概念给

出了 Goyal 等定义的基本主方向关系的复合推理方法^[11],但没有对矩形主方向关系的原关系求解问题进行研究,且需要借助基本矩形主方向关系原关系的手工推理。王森等借助基本矩形主方向关系原关系,给出了 Goyal 等定义的基本主方向关系的反关系推理算法^[15],但该方法在求解矩形主方向的原关系时,需要借助推理运算表,尤其是对包含 9 个非零元的矩形关系的原关系求解并未给出有效的自动计算方法,并未实现真正意义上的自动推理。现有的一些二维基本主方向关系的反关系推理及复合推理工作需要借助于包含该基本主方向关系的最小矩形关系的原关系推理实现。目前,对于二维矩形主方向关系的原关系推理仍依赖于复杂、烦琐的手工推理,由于二维基本矩形主方向关系原关系的自动推理这一基础问题未能得到有效解决,导致 Goyal 等的主方向关系模型的自动推理能力受限,这在一定程度上降低了模型的实用性。为此,在深入分析二维矩形主方向关系及其原关系特性的基础上,给出了二维基本矩形主方向关系的原关系推理规则并进行了证明,进而给出了一个二维基本矩形主方向关系的原关系推理算法,实现了基本矩形主方向关系原关系的自动推理与计算,为实现 Goyal 等定义的二维基本主方向关系的复合、反关系推理和一致性检验等问题的自动推理与分析奠定了基础,进而增强了模型的推理能力和实用性。

1 基本知识

Goyal 等在文献[5]中提出的方向关系矩阵模型是描述二维区域对象间的方向关系的,它所考虑的区域对象与封闭的单位圆($\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$)是同胚的,即是封闭的、连通的以及有连通边界的,这些区域对象的集合记为 G 。该模型因其可计算性和可推理性强,被认为是二维区域对象方向关系较为理想的表达模型。若 a 为参考对象, b 为主对象, $a,b\in G$,则该模型借助围成参考对象 a 最小外包矩形的 4 条直线 $x=\inf_x(a)$, $x=\sup_x(a)$, $y=\inf_y(a)$ 和 $y=\sup_y(a)$ 将空间分成 9 个方向区域 a_{NW} 、 a_N 、 a_{NE} 、 a_W 、 a_B 、 a_E 、 a_{SW} 、 a_S 、 a_{SE} ,如图 1 所示,其中 $\inf_x(a)$ 、 $\sup_x(a)$ 和 $\inf_y(a)$ 、 $\sup_y(a)$ 分别为 a 在 x 和 y 轴上投影的最小值、最大值。

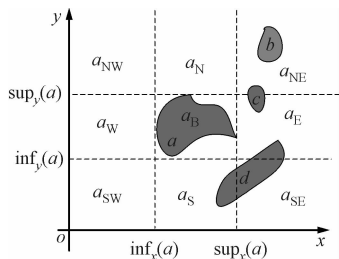


图 1 参考对象空间方向分区

例如,图 1 中 b 位于区域 a_{NE} ,则称 b 在 a 的东北方,记为 $bNEa$,类似地可定义北(N)、西北(NW)、西(W)、同一方向(B)、东(E)、西南(SW)、南(SW)、东南(SE)等方向关系; c 部分位于方向区域 a_E ,部分位于方向区域 a_{NE} ,则称 c 位于 a 的东和东北方向,记为 $cE;NEa$ 。

定义 1 二维基本主方向关系是一个形如 $R_1: \cdots: R_k$ 的表达式,其中, $R_1, \cdots, R_k \in \{S, SW, W, NW, N, NE, E, SE, B\}$, $1 \leq k \leq 9, 1 \leq i, j \leq k$, 且 $i \neq j$ 时 $R_i \neq R_j$, 对于任意参考对象 $a \in G, \exists b_1 \cdots, b_k \in G$ 使得 $b_1 \in a_{R_1}, \cdots, b_k \in a_{R_k}$ 且 $b_1 \cup \cdots, \cup b_k \in G^{[10]}$ 。

方向关系矩阵模型通过记录主对象落在参考对象的方向区域描述区域对象间的方向关系,即通过考查主对象和参考对象的 9 个方向区域与之间的交集是否为空,由此构造一个如式(1)的矩阵来表达二维区域对象间的方向关系,以 0 表示主对象和参考对象的方向区域与之间的交集为空,1 代表交集非空。基本主方向关系矩阵的形式化定义为

$$\begin{bmatrix} a_{NW} \cap b & a_N \cap b & a_{NE} \cap b \\ a_W \cap b & a_B \cap b & a_E \cap b \\ a_{SW} \cap b & a_S \cap b & a_{SE} \cap b \end{bmatrix} \quad (1)$$

定义 2 对于任意二维基本主方向关系 $R, \exists a, b \in G$,使得 bRa 成立,通过计算 b 与参考对象 a 的 9 个方向区域 $a_{NW}, a_N, a_{NE}, a_W, a_B, a_E, a_{SW}, a_S, a_{SE}$ 交集是否为空,以 1 表示非空,0 表示空,由此构成一个 3×3 的矩阵表达 b 相对 a 的主方向关系,则称该矩阵是一个基本主方向关系矩阵。

定义 3 若 P 是二维基本主方向关系矩阵且 P 中非零元素形成一个矩形,则称该矩阵为矩形主方向关系矩阵,否则称为非矩形的。

由定义 1 和定义 2 可知,一个二维基本主方向关系与一个二维基本主方向关系矩阵一一对应。例如,图 1 中, $a, c, d \in G$ 且有 $cNE;Ea, dE;SE;Sa$,则 c, d 相对参考对象 a 的方向关系如下

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中式(2)所示的矩阵是矩形主方向关系矩阵,式(3)所示的主方向矩阵是非矩形的。

定义 4 对于任意的二维基本主方向关系矩阵 P, Q ,任意的 $Q_{ij} = 1, i, j \in \{1, 2, 3\}$, 均有 $P_{ij} = 1$, 则称 P 包含 Q 。

定义 5 P 是二维基本主方向关系矩阵, P 的边界矩阵是包含 P 的最小矩形主方向关系矩阵,记为 P_B 。 M, M_1, M_2, M_3 的边界矩阵分别记为 $M_B, M_{1B}, M_{2B}, M_{3B}$ 。

定义 6 P 为二维矩形主方向关系矩阵,以 P 为边界矩阵的基本主方向关系矩阵称为矩形主方向关系矩阵 P 的原关系矩阵, P 的所有原关系矩阵的集合记为 P_{ORG} 。

2 二维基本矩形主方向关系的原关系推理算法

对于任意基本主方向关系矩阵 P, P 中非零元的个数记为 P_{nz} ,由 P 中任意 k 个非零元形成的所有矩阵的集合记为 $P_{nz}(k)$ 。

引理 1 假设 P 是一个二维基本矩形主方向关系矩阵,则有 $P_{nz} = 1$ 或 $P_{nz} = 2$ 或 $P_{nz} = 3$ 或 $P_{nz} = 4$ 或 $P_{nz} = 6$ 或 $P_{nz} = 9$ 成立。

定理 1 假设 P 是一个二维基本矩形主方向关系矩阵,如果 $P_{nz} = 1$ 或 $P_{nz} = 2$ 或 $P_{nz} = 3$, 则有 $P_{ORG} = \{P\}$ 。

证明 当 $P_{nz} = 1$ 时,则矩阵 P 中仅存在一个非零元 p , 因此,仅存在一个方向关系矩阵 M 且仅具有一个非零元 p , 使得 $M_B = P$ 成立。又 M 和 P 均有且只有一个非零元 p , 则有 M 等于 P , 故 $P_B = P$, 由定义 6 知,对于任意的矩形主方向关系矩阵 P , 如果仅有一个非零元, 则有 $P_{ORG} = \{P\}$ 成立。

当 $P_{nz} = 2$ 时,假设矩阵 P 中的两个非零元分别为 p_1 和 p_2 , 根据定义 6 可知, P 的所有可能的原关系矩阵为 M_1, M_2 和 M_3 , 其中 M_1 仅有一个非零元 p_1, M_2 仅有一个非零元 p_2, M_3 有非零元 p_1 和 p_2 , 即 $M_3 = P$ 。对于 M_1, M_2 和 M_3 , 则有 $M_{1B} = M_1 \neq P, M_{2B} = M_2 \neq P, M_{3B} = M_3$ 且 $M_3 = P$, 故 $M_1, M_2 \notin P_{ORG}$, 仅存在 $P = M_3 \in P_{ORG}$, 则当 $P_{nz} = 2$ 时 $P_{ORG} = \{P\}$ 成立。

当 $P_{nz} = 3$ 时,满足条件的方向关系矩阵有以下 6 个

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{假设 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则仅存在方向关系矩阵 } P \text{ 使}$$

得 $P_B = P$, 对于其他情形逐一例举可得

$$\forall P \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

仅存在唯一的主方向关系矩阵 P 使得 $P_B = P$, 因此, 当 $P_{nz} = 3$ 时 $P_{ORG} = \{P\}$ 成立。命题得证。

定理 2 假设 P 是一个矩形主方向关系矩阵, 如果 $P_{nz} = 4$, 则 P 的原关系矩阵是由 P 的任意 3 个或 4 个非零元形成的矩阵。

证明 由定义 6 可知, 对于一个矩形主方向关系矩阵 P , 它的原关系矩阵必是由 P 中的若干个非零元形成的主方向关系矩阵。若 $\forall M \in P_{nz}(1)$, 则有 $M_B = M$, M 中仅有 1 个非零元, 故 M 不等于 P , 则有 $M_B \neq P$, 故当 $M \in P_{nz}(1)$ 时 $M \notin P_{ORG}$ 。若 $\forall M \in P_{nz}(2)$, 则在一个有 4 个非零元的矩形内, 任取 2 个非零元共有以下 6 种情形, 如图 2 所示。

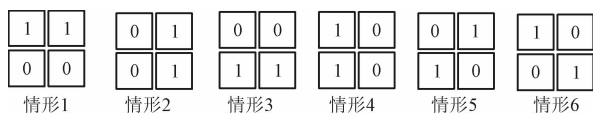


图 2 P 中任取 2 个非零元的布局示意图

对于前 4 种情形, M 为包含 2 个非零元的矩形主方向关系, 则 $M_B = M$, M 中仅有 2 个非零元, 故 M 不等于 P , 则此时 $M \notin P_{ORG}$; 对于后两种情形, 虽然 $M_B = P$, 但违背封闭区域的定义, M 均不是有效的主方向关系, 故当 $M \in P_{nz}(2)$ 时 $M \notin P_{ORG}$ 。若 $\forall M \in P_{nz}(3)$, M 是由 P 中 4 非零元矩形中的 3 个非零元形成的矩阵, 则包含 M 的最小矩形主方向关系矩阵是 P , 故 $\forall M \in P_{nz}(3)$ 时 $M \in P_{ORG}$ 。当 M 包含 4 个非零元时, M 等于 P , P 是矩形主方向关系矩阵, 则 $M_B = P$, 故 $M \in P_{ORG}$ 。

综上所述, 当且仅当 $M \in \{P\} \cup P_{nz}(3)$ 时, $M \in P_{ORG}$, 故对一个有 4 个非零元的主方向关系矩阵, 其原关系矩阵是由其中的 3 个或 4 个非零元形成的主方向关系矩阵。命题得证。

定理 3 假设 P 是一个矩形主方向关系矩阵, 如果 $P_{nz} = 6$, 则 P 的原关系矩阵是由 P 中 4 个及以上的非零元形成的主方向关系矩阵且有如下命题成立。

(1) 若 P 的原关系矩阵包含 4 个非零元, 则该原关系矩阵是由 P 中的任意 4 个非零元形成的非矩形主方向关系矩阵, 即是由 P 中在同一直线上的

3 个非零元以及余下 3 个非零元中任意一个非零元形成的主方向关系矩阵, 或是由 P 中取任意一条对角线上的 2 个非零元之外的 4 个非零元形成的主方向关系矩阵。

(2) 若 P 的原关系矩阵包含 5 个非零元, 则该原关系矩阵是由 P 中任意 5 个非零元形成的主方向关系矩阵。

(3) 若 P 的原关系矩阵包含 6 个非零元, 则该原关系矩阵是由 P 的全部非零元形成的主方向关系矩阵, 即矩阵 P 。

证明 由定义 6 可知, 对于有 6 个非零元的矩形主方向关系矩阵 P , 它的原关系矩阵必是由这 6 个非零元中的若干个非零元形成的主方向关系矩阵。

若 $\forall M \in P_{nz}(1)$, 则有 $M_B = M$, M 中仅有 1 个非零元, 故 M 不等于 P , 则有 $M_B \neq P$, 故当 $M \in P_{nz}(1)$ 时 $M \notin P_{ORG}$ 。

若 $\forall M \in P_{nz}(2)$, M 是由包含 6 个非零元的矩形主方向关系矩阵 P 中的 2 个非零元形成的主方向关系矩阵 M , M 中的 2 个非零元必在同一直线上且相邻; 若这 2 个非零元不在同一条直线上, 则在同一对角线上, 则不能构成有效的主方向关系; 若在同一直线上不相邻, 也不能构成有效的主方向关系, 则 M 是一个包含 2 个非零元的矩形主方向关系, 则有 $M_B = M$ 且 $M \neq P$, 故 $\forall M \in P_{nz}(2)$ 时 $M \notin P_{ORG}$ 。

若 $\forall M \in P_{nz}(3)$, M 是由包含 6 个非零元的矩形主方向关系矩阵 P 中的 3 个非零元形成的主方向关系矩阵, 则 M 必满足以下情形之一: ① M 是由 P 中在同一直线的 3 个非零元形成的主方向关系矩阵; ② M 是由 P 中 4 个非零元形成的矩形主方向关系矩阵的原关系矩阵。若 M 是由在同一直线的 3 个非零元形成的主方向关系矩阵, 则 M 是矩形主方向关系矩阵, 则有 $M_B = M$ 且 $M \neq P$, 故 $M \notin P_{ORG}$ 。若 M 是由 P 中 4 个非零元形成的矩形主方向关系矩阵的原关系矩阵, 则 M_B 是由 P 中的 4 个非零元形成的主方向关系矩阵, 因此, $M_B = M$ 且 $M \neq P$, 故 $M \notin P_{ORG}$, 则 $\forall M \in P_{nz}(3)$ 时 $M \notin P_{ORG}$ 。

若 $\forall M \in P_{nz}(4)$, M 是由 P 中的 4 个非零元形

成的矩形主方向关系矩阵,则有 $M_B=M$,故 $M \neq P$, 则 $M \notin P_{ORG}$ 。若 $M \in P_{ORG}$,则 M 必是由 P 中的 4 个非零元形成的非矩形主方向关系矩阵。反之对 P 中的任意 4 个非零元形成的非矩形主方向关系矩阵 M ,共有 8 种情形,如图 3 所示。

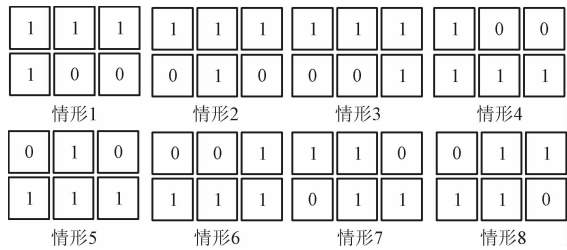


图 3 P 中 4 个非零元形成的非矩形关系布局示意图

由图 3 可知, M 或者由 P 中在同一直线上的 3 个非零元以及余下 3 个非零元中任取 1 个非零元形成的主方向关系矩阵,或是由 P 中取任意一条对角线上的 2 个非零元之外的 4 个非零元形成的主方向关系矩阵,且均有 $M_B=P$,故由 P 中的任意 4 个非零元形成的非矩形主方向关系矩阵 M 均是 P 的原关系矩阵。

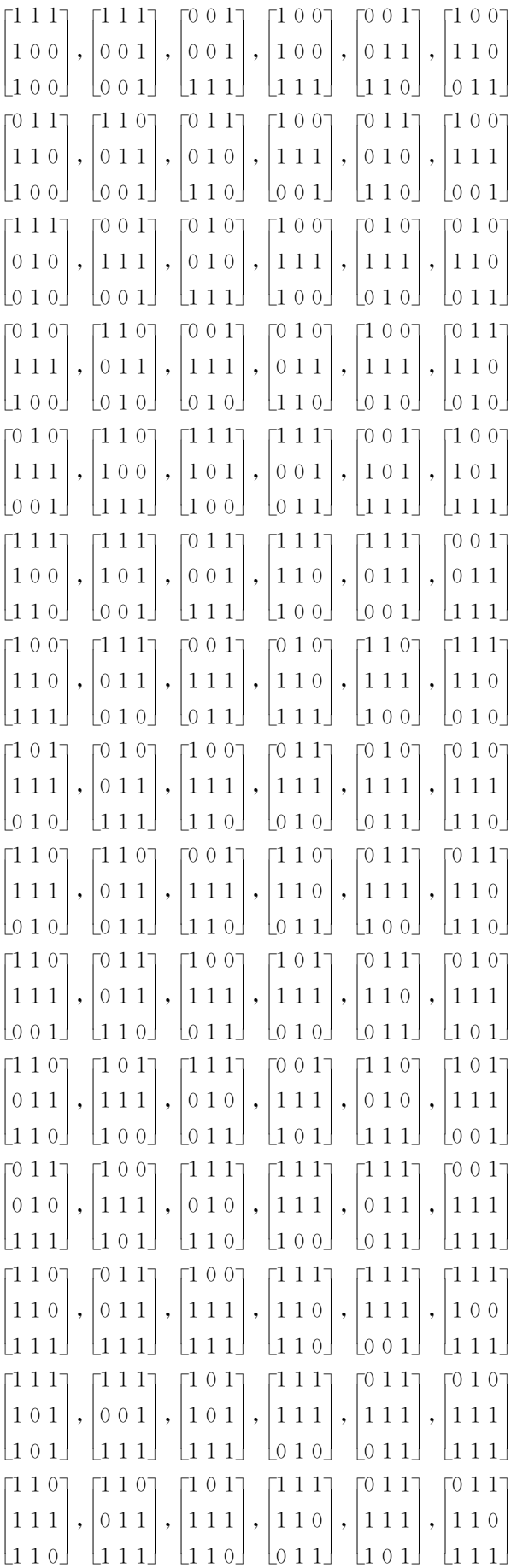
若 $\forall M \in P_{nz}(5), M$ 是由包含 6 个非零元的主方向关系矩阵 P 中的 5 个非零元形成的矩阵,由 P 中任意 5 个非零元形成的区域均是连通的,则 M 是有效的主方向关系矩阵,且包含 M 的最小矩形主方向关系矩阵是 P ,故 $\forall M \in P_{nz}(5)$ 时 $M \in P_{ORG}$ 。

由 P 中 6 个非零元形成的矩阵即矩阵 P ,对于矩形主方向关系矩阵 P ,则有 $P_B=P$,则 P 是唯一包含 6 个非零元的 P 的原关系矩阵。综上,对于包含 6 个非零元的矩形主方向关系矩阵 P 的原关系矩阵是由 P 中 4 个及以上的非零元形成的主方向关系矩阵且有命题(1)~(3)成立。证毕。

引理 2 对于有 9 个非零元的矩形主方向关系矩阵

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, P_{ORG} 共包含 111 个基本主方向关系矩阵。

根据定义 2 和定义 6 可得,有 9 个非零元的矩形主方向关系矩阵 P 的原关系矩阵是必由这 9 个非零元中若干个非零元形成的有效主方向关系矩阵,且包含该矩阵的最小矩形矩阵为 P ,因此 $\forall p \in P_{nz}(9)$ 。首先确定 p 是一个有效的主方向关系矩阵,进而检查包含 p 的最小矩形矩阵是否为 P ,通过手工推理可得 P 的原关系矩阵共有如下 111 个



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

为了避免手工推理和借助推理运算表,从而实现自动推理,本文给出了一个包含9个非零元的矩形主方向关系矩阵 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵求解算法 ORGIN_UNI(),该算法首先通过深度优先的方式对由9个元素0或1形成矩阵的解空间进行遍历,对解空间中每一个矩阵 $\mathbf{p}$ 调用 Connect()算法判断其是否为一个有效的主方向关系矩阵。Connect()算法借助记录着非零元行号和列号的队列实现,以矩阵 $\mathbf{p}$ 中的任意非零元为起始,将该非零元的行号和列号进队并将该元素置为0。出队一个元素,在该元素上、下、左、右邻接的元素中查找非零元,依次将其行号和列号进队并将这些元素置为0,当队列非空时重复上述过程,直至队列为空。若矩阵 $\mathbf{p}$ 中不存在非零元,则该矩阵是一个有效的主方向关系矩阵,否则该矩阵是一个无效的方向关系矩阵。若该矩阵是有效的主方向关系矩阵,进一步判断 $\mathbf{p}_B = \mathbf{P}$ 是否成立,若 $\mathbf{p}_B = \mathbf{P}$ 成立,则 $\mathbf{p}$ 为 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。基于以上论述,下面给出该算法。

算法 ORGIN_UNI(int $\mathbf{P}$, int a)

输入:包含9个非零元的矩形主方向关系矩阵 $\mathbf{P}$

输出: $\mathbf{P}$ 的所有原关系矩阵

begin

int i, j ;

if ($a > 9$) /* 此时得到 $P_{nz}(9)$ 中的一个矩阵 $\mathbf{p}$ */

$\mathbf{q} := \mathbf{p}$;

if (Connect($\mathbf{q}$) and $\mathbf{p}_B = \mathbf{P}$) then

$R := R \cup \{\mathbf{p}\}$; /* 由定义6知 $\mathbf{p}$ 为 $\mathbf{P}$ 的原

关系,将 $\mathbf{p}$ 存入 R */

return;

end if

end if

if ($a \bmod 3 = 0$) then

$i = a/3; j = 3$;

else

$i = (a/3) + 1; j = a \bmod 3$;

end if

$p[i][j] := 1$; ORGIN_UNI($\mathbf{P}, a+1$);

$p[i][j] := 0$; ORGIN_UNI($\mathbf{P}, a+1$);

end

算法 Connect(int $\mathbf{p}$) /* 判断 $\mathbf{p}$ 是否为一个有效的主方向关系矩阵 */

输入:矩阵 $\mathbf{p}$

输出: $\mathbf{p}$ 是否为一个有效的主方向关系矩阵

begin

int $r_{ow}[4] = \{0, 0, -1, 1\}$; int $c_{ol}[4] = \{1, -1, 0, 0\}$;

struct Point {int x, y }; queue<Point> que;

int $c_{nt} := 0$; bool $flag := false$;

for int $i := 1$ to 3 do

for int $j := 1$ to 3 do

if ($p[i][j] = 1$) then

$p[i][j] = 0$; $flag = true$; $c_{nt}++$;

que.push(Point{ i, j }); /* 将该非零元的行号和列号信息进队 */

while(! que.empty()) do /* 当队列非空 */

{Point $q = que.front()$; /* q 记录队头元素 */

que.pop(); /* 队头元素出队 */

for int $k := 0$ to 3 do /* 在 q 的邻接位置寻找非零元并将位置信息进队 */

{int $x = q.x + r_{ow}[k]$; int $y = q.y + c_{ol}[k]$;

if ($x > 1 \& \& x < 3 \& \& y > 1 \& \& y < 3 \& \& p[x][y] = 1$) then

$p[x][y] := 0$; que.push(Point{ x, y });

end if}

end if

if ($c_{nt} > 1$ or $flag = false$) then return false;

else return true;

end if

end

定理4 对于有9个非零元的矩形主方向关系矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 算法 ORGIN_UNI() 能够正确计算 } \mathbf{P}$$

的原关系矩阵集 P_{ORG} 。

证明 通过调用 ORGIN_UNI($\mathbf{P}, 1$)对 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵集进行求解。对于矩阵中的第一个元素

$P[1][1]$ 取1和0分别递归调用 ORGIN_UNI(P , 2)对剩余8个元素由0或1任意组合形成解空间的遍历,实现由 P 的9个非零元中若干个非零元形成的方向关系矩阵的计算,每当 $a>9$ 时得到一个矩阵 $p \in P_{nz}(9)$ 。该算法调用 Connect()算法判断 p 是否为一个有效的主方向关系矩阵,如果 p 同时满足 $p_B = P$ 则将 p 存入 R ,由定义6可知,使得if条件成立的 p 是 P 的原关系矩阵,因此当递归调用结束时 R 记录着 P 的原关系矩阵。

进一步证明 Connect()算法能够正确判断一个矩阵 p 是否为有效的主方向关系矩阵。该算法通过for循环结构遍历 p 中元素,遇到第一个非零元 $p[i][j]$,将该元素的位置信息 $\langle i, j \rangle$ 入队且将该元素置为0。当队列非空时循环进行如下处理,首先出队一个元素,借助数组 r_{ow} 和 c_{ol} 在该元素4个邻接的位置查找非零元,依次将其位置信息入队并将其置为0。while循环终止时,若 p 中不存在非零元,表明以邻接查找的方式可实现所有非零元一次性进队,因此目标对象是一个连通的封闭区域,满足定义2的要求, p 是一个有效的主方向关系矩阵,此时 $c_{nt}=1$,该算法返回真;若 p 中仍存在非零元,则无法以邻接查找的方式实现所有非零元一次性进队,表明目标对象至少由2个孤立的封闭区域组成,不满足定义2的要求, p 不是一个有效的主方向关系矩阵,此时 $c_{nt}=2$,该算法返回假。因此,该算法能够正确地判定矩阵 p 是否为一个有效的主方向关系矩阵。综上,算法 ORGIN_UNI()能够正确计算 P 原关系矩阵集 P_{ORG} 。证毕。

对于任意一个二维基本矩形主方向矩阵 P ,根据引理1、定理1、定理2、定理3和定理4,本文给出一个基于方向关系矩阵的二维基本矩形主方向关系的原关系矩阵推理算法。该算法首先计算二维基本矩形主方向矩阵 P 中非零元的个数,依据 P 中非零元的个数分别利用定理1、定理2、定理3和算法 ORGIN_UNI()提供的原关系矩阵推理方法进行求解,该推理算法如下。

算法 ORGIN_BRCD(int P)

输入:二维基本矩形主方向关系矩阵 P

输出: P 的所有原关系矩阵

begin

int $c_{count}:=0$; /* c_{count} 记录着 P 中非零元的个数 */

int $l:=INT_MAX$; int $r:=INT_MIN$;

int $b:=INT_MAX$; int $t:=INT_MIN$; /* l, r 和

b, t 分别记录着 P 中非零元的列号和行号的最小

值、最大值 */

for int $i:=1$ to 3 do /* 计算 P 中非零元的个数以及列号和行号的最小值、最大值 */

for int $j:=1$ to 3 do

if($P[i][j]=1$) then

$c_{count}:=c_{count}+1$;

if $i<b$ then $b:=i$; if $i>t$ then $t:=i$

if $j<l$ then $l:=j$; if $j>r$ then $r:=j$; /* l, r, b, t 界定了 P 中非零元形成的矩形区域 */

end if

$S:=\emptyset$; /* S 记录着 P 的原关系矩阵集 */

if ($c_{count}=1$ or $c_{count}=2$ or $c_{count}=3$) then $S:=\{P\}$;

/* 根据定理1计算 P 的原关系矩阵集 */

if ($c_{count}=4$) then /* 根据定理2计算 P 的原关系矩阵 */

{for $i:=b$ to t do

for $j:=l$ to r do

$\{R:=P; R[i][j]=0; S:=S \cup \{R\};$

$S:=S \cup \{P\}$;

end if

if($c_{count}=6$) then /* 根据定理3计算 P 的原关系矩阵 */

$R:=P; R[b][l]:=0; R[t][r]:=0; S:=S \cup \{R\}$;

$R:=P; R[b][r]:=0; R[t][l]:=0; S:=S \cup \{R\}$;

if ($t-b>1$) then

for $i:=b$ to t do

$\{j:=(i+1) \bmod 3$;

$R:=P; R[i][l]:=0; R[j][l]:=0; S:=S \cup \{R\}$;

$R:=P; R[i][r]:=0; R[j][r]:=0; S:=S \cup \{R\}$;

else

for $i:=l$ to r do

$\{j:=(i+1) \bmod 3$;

$R:=P; R[b][i]:=0; R[b][j]:=0; S:=S \cup \{R\}$;

$R:=P; R[t][i]:=0; R[t][j]:=0; S:=S \cup \{R\}$;

end if

for $i:=b$ to t do

for $j:=l$ to r do

$\{R:=P; R[i][j]=0; S:=S \cup \{R\}\}$

```

S:=S∪{P};
end if
if (cout=9) then
    S:=ORIGIN_UNI(P,1);/* 调用算法 ORIGIN_UNI()求解 P 的原关系矩阵集 */
end if
return S;
end

```

定理 5 二维基本矩形主方向关系的原关系推理算法 ORIGIN_BRCD()是正确的、完备的。

证明 对于任意一个二维基本矩形主方向关系矩阵 P , 该算法首先利用一个双重 for 循环遍历矩阵 P 的每个元素以及 P 中非零元的列号的最小值 l 、最大值 r 和行号的最小值 b 、最大值 t , 以确定由 P 中非零元形成的矩形区域。

若 P 中非零元的个数为 1 或 2 或 3, 由定理 1 可知, P 的原关系矩阵集仅包含矩阵 P , 该算法的第一个 if 结构实现了该情形下 P 的原关系矩阵求解并将结果记录在 S 中。

若 P 中非零元的个数为 4, 由定理 2 可知, P 的原关系矩阵是由 P 的 3 个或 4 个非零元形成的主方向关系矩阵, 该算法的第 2 个 if 结构利用一个双重 for 循环遍历 l, r, b, t 所确定的矩形区域内的每个元素, 将该非零元修改为 0 后得到的矩阵分别存入 S , 即实现了将 P 中的任意 3 个非零元形成的主方向关系矩阵存入 S , 最后将 P 存入 S , 即实现了将 P 中 4 个非零元形成的矩阵存入 S 。综上, 该 if 结构实现了包含 4 个非零元的矩形主方向关系矩阵 P 的原关系矩阵求解并将结果记录在 S 中。

若 P 中非零元的个数为 6, 则该算法的第 3 个 if 结构分别将矩阵 P 中由 l, r, b, t 所确定的矩形区域对角元素置为 0, 并将得到的矩阵分别存入 S , 即实现了将 P 的任意一条对角线上的 2 非零元之外的 4 个非零元形成的矩阵分别存入 S 。该 if 结构内嵌的 if 结构实现了将 P 中所有在同一直线上的 3 个非零元以及余下 3 个非零元中任取一个非零元形成的主方向关系矩阵存入 S 。该 if 结构内嵌的双重 for 循环遍历 l, r, b, t 所确定的矩形区域内的每个元素, 分别将 P 中相应的元素修改为 0 并存入 S , 即实现了将 P 中的任意 5 个非零元形成的方向关系矩阵存入 S , 最后将 P 存入 S , 即实现了将 P 中 6 个非零元形成的矩阵存入 S 。根据定理 3 可知, S 最终记录着 P 的所有原关系矩阵集。

若 P 中非零元的个数为 9, 仅有一个满足条件

的矩形主方向关系矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 该算法调用算法

ORIGIN_UNI()求解 P 的原关系矩阵集并将结果存入 S , 由定理 4 可知, S 最终记录着 P 的 111 个原关系矩阵。

由引理 1 可知, 对于任意一个二维基本矩形主方向关系矩阵 P , P 的非零元个数必为 1、2、3、4、6、9 之一。综上, 对于任意基本的矩形主方向关系矩阵 P , P 的原关系矩阵集可利用算法 ORIGIN_BRCD()求解, S 最终记录着 P 的原关系矩阵集, 故该算法是正确的、完备的。证毕。

3 分析验证

利用 C 语言编程实现了算法 ORIGIN_BRCD(), 在 VisualC++6.0 平台运行。程序实现的基本思想是: 将一个二维基本矩形主方向关系矩阵用二维数组表示, 通过判定该二维数组中非零元的个数, 分别按照定理 1、定理 2、定理 3 和算法 ORIGIN_UNI()提供的方法进行计算。通过比较算法 ORIGIN_BRCD()的执行结果与手工推理的结果, 以验证算法 ORIGIN_BRCD()的正确性和完备性。

下面通过实例说明对比验证的过程。例如, 对

于矩形主方向关系矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 利用手工推理

求解 P 的原关系矩阵的过程如下: 根据定义 6 可知, P 的原关系矩阵必是由 P 中若干个非零元形成的有效的主方向关系矩阵, 则首先从由 P 中若干个非零元形成的矩阵中筛选出有效的主方向关系矩阵, 进一步对这些有效的主方向关系矩阵逐个进行手工查验, 以确定其是否为 P 的原关系矩阵。

由 P 中任意一个 1 个非零元形成的矩阵共有以下 6 个

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于上述每一个矩阵均是有效的主方向关系矩阵且包含他们的最小矩形主方向关系矩阵是其本身, 不是 P 。由定义 6 可知, 由 P 中 1 个非零元形成的所有有效的主方向矩阵均不是 P 的原关系矩阵。

对由 P 的任意 2 个非零元形成的矩阵逐个筛查共得到以下 7 个有效的主方向矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于上述每一个主方向关系矩阵,2 个非零元都在同一行或同一列且相邻,每个方向关系矩阵均是包含 2 个非零元的矩形主方向关系,包含它们的最小矩形主方向关系矩阵是其本身,均不等于 $\mathbf{P}$,故由 $\mathbf{P}$ 中 2 个非零元形成的所有有效的主方向矩阵均不是 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。

对由 $\mathbf{P}$ 的任意 3 个非零元形成的矩阵逐个进行筛查共得到 10 个有效的主方向矩阵如图 4 所示。

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
情形1	情形2	情形3	情形4	情形5
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
情形6	情形7	情形8	情形9	情形10

图 4 $\mathbf{P}$ 的任意 3 个非零元形成的有效方向关系矩阵

图 4 情形 1 和 2 是由 $\mathbf{P}$ 中在同一直线上的 3 个非零元形成的主方向关系矩阵,因此包含它们的最小矩形主方向关系矩阵是其本身,不是 $\mathbf{P}$,故图 4 情形 1 和 2 不是 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。图 4 情形 3~7 和

图 4 情形 8~10 分别是 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的原关系

矩阵,对于图 4 情形 3~10,包含它们的最小矩形主方向关系矩阵均不是 $\mathbf{P}$,故由 $\mathbf{P}$ 中的 3 个非零元形成的所有有效的主方向矩阵均不是 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。

对由 $\mathbf{P}$ 的任意 4 个非零元形成的矩阵逐个进行筛查共得到 10 个有效的主方向矩阵如图 5 所示。

图 5 情形 1 和 2 是由 $\mathbf{P}$ 中 4 个非零元形成的矩

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
情形1	情形2	情形3	情形4	情形5
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
情形6	情形7	情形8	情形9	情形10

图 5 $\mathbf{P}$ 的任意 4 个非零元形成的有效方向关系矩阵

形主方向关系矩阵,因此,包含它们的最小矩形主方向关系矩阵是其本身,均不是 $\mathbf{P}$,故图 5 情形 1 和 2 不是 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。对于图 5 情形 3~10 包含它们的最小矩形主方向关系矩阵均是 $\mathbf{P}$,根据定义 2 可知,图 5 情形 3~10 是 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。

由 $\mathbf{P}$ 中的任意 5 个非零元形成的矩阵共有以下 6 个

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于上述每一个矩阵均是有效的主方向关系矩阵且包含它们的最小矩形主方向关系矩阵均是 $\mathbf{P}$,根据定义 6 可知,它们均是 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵。

由 $\mathbf{P}$ 中的 6 个即全部非零元形成的主方向矩阵即矩阵 $\mathbf{P}$,由定义 6 可知,矩形主方向关系矩阵 $\mathbf{P}$ 是其自身的原关系矩阵。

综上,由手工推理的结果可知, $\mathbf{P}$ 的所有原关系矩阵如下

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用算法 ORIGIN_BRCD()求解 $\mathbf{P}$ 的原关系矩阵过程如下:该算法首先执行 for 循环结构得到 $c_{\text{ount}}=6, l=1, r=3, b=1, t=2$,由于 $c_{\text{ount}}=6$,则执行第三个 if 结构,执行完该 if 结构内前两行赋值语句可得

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4)$$

由于 $t-b=1$,接着执行第 3 个 if 结构内嵌的 if 结构 else 部分内的循环语句,执行完该循环可得

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (5)$$

紧接着执行第 3 个 if 结构内的 for 循环,可得

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

最后执行 $S := S \cup \{P\}$, S 最终记录着 P 的原关系矩阵集, 可得

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

对于矩形主方向关系 P , 将本文推理算法执行的结果与手工推理的结果进行比对, 可知算法 ORIGIN_BRCD 的推理结果与手工推理的结果一致, 因此, 对于该矩形主方向关系矩阵 P , 利用本文的推理算法可以正确求解 P 的原关系矩阵集。对于任意一个基本矩形主方向矩阵, 将实验结果与手工推理相比较, 结果均一致。实验结果表明, 对于任意的基本矩形主方向关系, 算法 ORIGIN_BRCD() 能够正确地计算出其所有的原关系矩阵, 即该算法是正确的。

由上述对比验证的过程可知, 对于任意基本矩形主方向关系矩阵 P , 手工推理首先需要对由 P 中部分以及全部非零元形成的所有矩阵逐个进行查选, 以筛选出所有有效的主方向关系矩阵。通常由 P 中任意若干个非零元形成的矩阵数目繁多, 筛选的工作量大。进一步, 依据定义 6 对每个有效的主方向关系矩阵进行筛查以确定其是否为 P 的原关系矩阵。综上所述, 手工推理需要大量的人工筛查, 过程复杂, 工作量大。本文提出的算法 ORIGIN_BRCD() 实现了任意基本矩形主方向关系的原关系自动推理与计算, 避免了复杂、烦琐的手工推理。

4 结束语

为了提高对空间方向关系的智能推理与预测能力, 本文对二维矩形主方向关系的原关系推理问题进行研究, 给出了一个二维矩形主方向关系的原关系推理算法。该算法利用方向关系矩阵运算实现了

任意二维矩形主方向关系原关系的自动推理与计算, 并对该算法进行了验证, 验证结果表明该算法能够对二维矩形主方向关系原关系进行正确求解。

本文的研究实现了二维矩形主方向关系原关系的自动推理与计算, 使二维基本主方向关系的自动推理从理论向实用更进一步, 增强了模型的可用性, 这对进一步完善和提高空间数据库的空间推理与分析能力具有十分重要的意义, 未来将围绕以下问题开展研究。

(1) 在现有的二维主方向关系的复合、反关系推理和一致性检验^[11,15,19]等工作的基础上, 将本文提出的二维矩形主方向关系的原关系推理算法应用于二维主方向关系推理, 实现二维主方向关系的复合、反关系推理和一致性检验等问题的自动计算、推理与分析。

(2) 现实是一个三维世界, 三维空间方向关系更为复杂。对三维矩形主方向关系的原关系的自动推理进行研究, 并结合现有的三维空间方向关系推理^[13,16], 实现三维空间方向关系的自动计算与推理, 提高对三维空间方向关系的自动推理能力。

参考文献:

- [1] 王淼, 郝忠孝. 采用定性坐标的位置表达及主方向关系推理 [J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(8): 36-42. WANG Miao, HAO Zhongxiao. Location representation and cardinal direction relation reasoning based on qualitative coordinates [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(8): 36-42.
- [2] 郝忠孝. 时空数据库查询与推理 [M]. 北京: 科学出版社, 2010: 326-362.
- [3] PAPADIAS D, SELLIS T. Qualitative representation of spatial knowledge in two dimensional space [J]. VLDB Journal, 1994, 3(4): 479-516.
- [4] FRANK A U. Qualitative spatial reasoning: cardinal directions as an example [J]. International Journal of Geographical Information Systems, 1996, 10(3): 269-290.
- [5] GOYAL R K. Similarity assessment for cardinal directions between extended spatial objects [D]. Orono,

- Maine, USA: The University of Maine, 2000: 19-36.
- [6] GOYAL R K, EGENHOFER M J. Similarity of cardinal directions [C]// Proceedings of the 7th International Symposium on Advances in Spatial and Temporal Databases. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2001: 36-58.
- [7] 王森, 郝忠孝. 三维空间方向关系的定性描述与推理 [J]. 计算机工程, 2009, 35(15): 22-25.
- WANG Miao, HAO Zhongxiao. Qualitative representation and reasoning on direction relation of three-dimension space [J]. Computer Engineering, 2009, 35(15): 22-25.
- [8] 唐雪华, 秦昆, 孟令奎. 基于拓扑参考的定性方向关系矩阵描述模型 [J]. 测绘学报, 2014, 43(4): 396-403.
- TANG Xuehua, QIN Kun, MENG Lingkui. A qualitative matrix model of direction-relation based on topological reference [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(4): 396-403.
- [9] 李朋朋, 刘纪平, 闫浩文, 等. 基于方向关系矩阵的空间方向相似性计算改进模型 [J]. 测绘科学技术学报, 2018, 35(2): 216-220.
- LI Pengpeng, LIU Jiping, YAN Haowen, et al. An improved model for calculating the similarity of spatial direction based on direction relation matrix [J]. Journal of Geomatics Science and Technology, 2018, 35(2): 216-220.
- [10] SKIADOPOULOS S, KOUBARAKIS M. Composing cardinal direction relations [J]. Artificial Intelligence, 2004, 152(2): 143-171.
- [11] CHEN Juan, JIA Haiyang, LIU Dayou, et al. Composing cardinal direction relations based on interval algebra [J]. International Journal of Software and Informatics, 2010, 4(3): 291-303.
- [12] 李松, 张丽平, 郝晓红, 等. Vague 区域关系与方向关系的表示及复合推理 [J]. 计算机研究与发展, 2015, 52(4): 918-928.
- LI Song, ZHANG Liping, HAO Xiaohong, et al. Representation and compound of vague region relations and direction relations [J]. Journal of Computer and Development, 2015, 52(4): 918-928.
- [13] WANG Miao, LIU Xiaodong, LI Songyang, et al. Composing 3D cardinal direction relation [J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2016, 13(1): 623-627.
- [14] ZHANG Xiaotong, LIU Weiming, LI Sanjiang, et al. Reasoning with cardinal directions: an efficient algorithm [C]// Proceedings of the Twenty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence. Chicago, Illinois, USA: AAAI Press, 2008: 387-392.
- [15] 王森, 何莉, 李松. 基本主方向关系的反关系推理 [J]. 计算机应用研究, 2013, 30(1): 138-141.
- WANG Miao, HE Li, LI Song. Research on inversing the basic cardinal direction relation [J]. Application Research of Computers, 2013, 30(1): 138-141.
- [16] 王森, 黄治国, 李松. 基于代数理论的三维主方向关系的反关系推理 [J]. 计算机应用, 2014, 34(4): 1144-1148.
- WANG Miao, HUANG Zhiguo, LI Song. Reasoning with the inverse of 3D cardinal direction relations based on block algebra [J]. Journal of Computer Applications, 2014, 34(4): 1144-1148.
- [17] CICERONE S, DI FELICE P. Cardinal directions between spatial objects: the pairwise-consistency problem [J]. Informatics and Sciences, 2004, 164(124): 165-188.
- [18] SPIROS S, MANOLIS K. On the consistency of cardinal direction constraints [J]. Artificial Intelligence, 2005, 163(1): 91-135.
- [19] 刘永山, 郝忠孝. 基于 MBR 的主方向关系一致性检验 [J]. 软件学报, 2006, 17(5): 977-982.
- LIU Yongshan, HAO Zhongxiao. Consistency checking for cardinal direction relations based on MBR [J]. Journal of Software, 2006, 17(5): 976-982.
- [20] LIU Weiming, LI Sanjiang. Reasoning about cardinal directions between extended objects: the NP-hardness result [J]. Artificial Intelligence, 2011, 175(18): 2155-2169.

(编辑 亢列梅)