

压缩机工作过程模拟中数值振荡问题的成因分析及改善方法

王炳棋, 畅云峰

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为解决数值模拟压缩机工作过程中存在的数值振荡和发散问题,采用四阶后向差分(BDF-4)算法和经典四阶龙格库塔(RK-4)算法分析压缩机基元容积控制方程的稳定性,并对2种算法的计算结果进行对比。结果表明:在吸排气过程中,压力计算的微小偏差会导致质量流量产生较大的误差,从而使基元容积控制方程产生较大的数值刚性,限制了RK-4算法的最大稳定步长;在稳定性上,BDF-4算法的绝对稳定域包含整个负半 x 轴,可以避免数值刚性引起的振荡和发散,其计算步长不再受数值刚性的限制;对计算效率而言,每步BDF-4算法所消耗时间为同步长RK-4算法的1.7~1.8倍;计算精度上,BDF-4算法与RK-4算法代数精度相同,实际计算时两者的表现也十分接近。BDF-4算法在保证工程精度的前提下提高了压缩机工作过程模拟的稳定性,解决了数值振荡问题,对容积式压缩机的工作过程模拟、新型泄漏通道的研究等有实际意义。

关键词: 压缩机;数值刚性;后向差分算法

中图分类号: TB652 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202006021 **文章编号:** 0253-987X(2020)06-0161-07



OSID 码

Analysis and Improvement of Numerical Oscillation in Simulation of Compressor Working Process

WANG Bingqi, CHANG Yunfeng

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To solve the problems of numerical oscillations and divergence in the simulation of compressor process, 4th-order backward difference formula (BDF-4) and classical 4th-order Runge-Kutta (RK-4) method are adopted to analysis the stability of control equations of element volume, and the results of two methods are compared. The analysis results show that a small fluctuation of pressure in the process of suction and exhaust would induce a large fluctuation in the calculation of the mass flow, which would result in a large stiffness of the governing equation and is the key factor to cause numerical oscillations. The results indicate that there is no stability constraint in the calculation using the BDF-4 method, so that the oscillations and divergence due to the numerical stiffness can be avoided. However, the calculation time of the BDF-4 method is 1.7~1.8 times of the RK-4 method at one step, and the simulation accuracy of the BDF-4 method is nearly the same as that of the RK-4 method. The BDF-4 method can greatly improve the simulation stability of the compressor working process without loss of accuracy, and give a reference for simulation of compressor thermal process and the leakage simulation through clearance.

收稿日期: 2020-01-02。 作者简介: 王炳棋(1996—),男,硕士生;畅云峰(通信作者),男,副教授,硕士生导师。

网络出版时间: 2020-03-02

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20200301.1857.004.html>

Keywords: compressor; stiffness; backward difference formula

求解压缩机基元容积工作过程热力学模型,可以得到结构参数、运行参数对压缩机性能的影响,是压缩机设计参数优化的基础^[1]。目前,求解压缩机工作过程数学模型的主要算法为经典四阶龙格-库塔法(RK-4)^[2-4],但在容积较小或者质量变化率较大(如压缩机吸气开始和排气过程结束)时,BDF-4算法往往会出现振荡或者发散现象。为了保证计算稳定且收敛,需要采用更小步长,这又会导致计算时间过长。

本文分析了数值模拟压缩机工作过程中产生数值振荡的原因,采用四阶后向差分(BDF-4)算法和RK-4算法分析压缩机基元容积控制方程的稳定性,对比了2种求解算法的结果,提出采用BDF-4算法解决数值振荡问题。

1 压缩机工作过程数学模型

将压缩机基元容积作为控制容积,通过联立能量方程、质量方程和状态方程得到其控制方程。

1.1 能量方程

变质量系统热力学第一定律为

$$\begin{aligned} d(mu) = \sum dm_i \left(h_i + \frac{v_i^2}{2} + z_i g \right) - \\ \sum dm_o \left(h_o + \frac{v_o^2}{2} + z_o g \right) + dQ - dW \end{aligned} \quad (1)$$

式中: m 为基元容积内总质量; u 为比内能; m_i 、 m_o 分别为流入、流出基元容积的质量; h_i 、 h_o 分别为流入、流出比焓; v_i 、 v_o 分别为流入、流出速度; z_i 、 z_o 分别为流入、流出重心高度; Q 为基元容积与外界换热量; W 为基元容积内气体做功量。

忽略气体的动能和位能变化,可以得到

$$\frac{d(mu)}{d\varphi} = \sum \frac{dm_i}{d\varphi} h_i - \sum \frac{dm_o}{d\varphi} h_o + \frac{dW}{d\varphi} - \frac{dQ}{d\varphi} \quad (2)$$

通过热力学参数关系式可以推导得到压力项的表达式^[5]

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\varphi} = \frac{1}{v} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)_T - \frac{(\partial h / \partial T)_v (\partial p / \partial v)_T}{(\partial p / \partial T)_v} \right] \frac{dv}{d\varphi} - \\ \frac{1}{V_c} \left[\sum \frac{dm_i}{d\varphi} (h_i - h) + \frac{dQ}{d\varphi} \right] / \left[1 - \frac{1}{v} \frac{(\partial h / \partial T)_v}{(\partial p / \partial T)_v} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 质量方程

基元容积内的质量变化率等于各个泄漏通道和吸排气通道的流量之和^[6]。计算通道流量常采用等

熵喷管公式^[7]。

当 $\left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \leq \frac{p_2}{p_1} \leq 1$ 时,等熵喷管公式为

$$\frac{dm}{d\varphi} = \frac{CAp_1}{\omega} \left\{ \frac{2k}{(k-1)R_g T_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right] \right\}^{1/2} \quad (4)$$

当 $0 \leq \frac{p_2}{p_1} \leq \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}$ 时,等熵喷管公式为

$$\frac{dm}{d\varphi} = \frac{CAp_1}{\omega} \left[\frac{k}{(k-1)R_g} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)} \right]^{1/2} \quad (5)$$

式中: p_1 、 p_2 分别为高压侧和低压侧的压力,Pa; T 为高压侧气体温度,K; A 为泄漏通道的总面积, m^2 ; C 为流量系数; k 为气体过程指数; R_g 为气体常数。

除此之外,Salikeev等人针对压缩机间隙泄漏提出了流量公式^[8-10]

$$U = \frac{\delta L \xi (1 + \tau) \sqrt{2RT}}{9\pi [1 + \sqrt{1 + \alpha(1 - \tau^2) \xi^2}]} \quad (6)$$

式中: U 为泄漏通道导流,L/s; L 为通道宽度,m; δ 为通道最小间隙,m; R 为通用气体常数; τ 为通道出口与通道入口压力之比; ξ 为无量纲参数; α 是拟合得到的系数。

在求解多个工作容积的压缩机时,由于不同基元容积之间的泄漏无法通过微分方程直接求解,因此需要上一步的求解结果作为下一步计算的条件。如图1所示,对于间隔 H° 的多个基元容积,第 j 次迭代计算需要读取第 $j-1$ 次迭代的各点压力和温度进行泄漏计算。

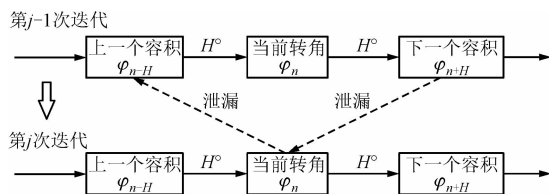


图1 基元容积间的泄漏通道

1.3 状态方程

为了计算控制方程中的热力学参数,需要补充气体状态方程。使用PR状态方程

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a(T)}{v(v + b) + b(v - b)} \quad (7)$$

式中: v 为比体积, m^3/kg ; a 、 b 由气体参数确定,其中 a 为与温度有关的函数。

2 微分方程求解

实际上,压缩机工作过程模拟就是求解式(3)~(7)组成的一阶常微分方程组。

2.1 显式龙格-库塔算法

经典四阶龙格-库塔算法(RK-4)的公式^[11]为

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(\varphi_n, y_n) \\ k_2 &= f(\varphi_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\ k_3 &= f(\varphi_n + h/2, y_n + k_2 h/2) \\ k_4 &= f(\varphi_n + h, y_n + k_3 h) \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: y 为控制变量; f 为控制方程的函数; h 为步长。

图 2 为一~四阶 RK 算法的绝对稳定域,可以看出其在有限范围稳定,其中 RK-4 算法对应的区域($s=4$)与 x 轴交点为 -2.78 ^[12]。当使用 RK-4 算法求解形如 $y'=ay(a<0)$ 的常微分方程时,保证稳定的最大步长为 $-2.78/a$ 。

显式龙格-库塔算法属于单步法,虽计算精度高,易于编写计算程序,但是它的稳定域较小,当数值刚性较强时,容易出现振荡和发散。

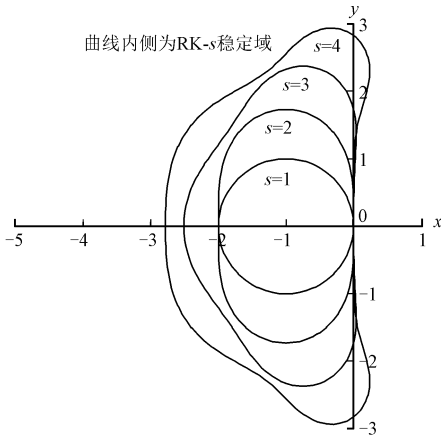


图 2 显式 RK 系列算法的绝对稳定域

2.2 后向差分算法

通常隐式算法的稳定性高于显式算法^[13-15]。为了与经典 RK-4 算法进行对比,选取同样为四阶代数精度的隐式算法,即四阶后向差分算法(BDF-4)。四阶后向差分算法(BDF-4)的格式为

$$\begin{aligned} 3y_{n-3} - 16y_{n-2} + 36y_{n-1} - 48y_n + 25y_{n+1} = \\ 12hf(\varphi_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: y_n 为 φ_n 角度时的控制变量。

通过差分格式可以看出,该算法属于多步法,并且要求解方程(组)得到 y_{n+1} 。BDF-4 算法保留了多步法计算效率高的优点,克服了多步法在高阶

格式不稳定的缺点,因此 BDF-4 算法相比其他隐式算法更适合模拟压缩机工作过程。BDF-4 算法的绝对稳定域(图 3)几乎包括整个 $-x$ 方向半平面。该算法在计算数值刚性较强的问题时,也可以稳定地运行。

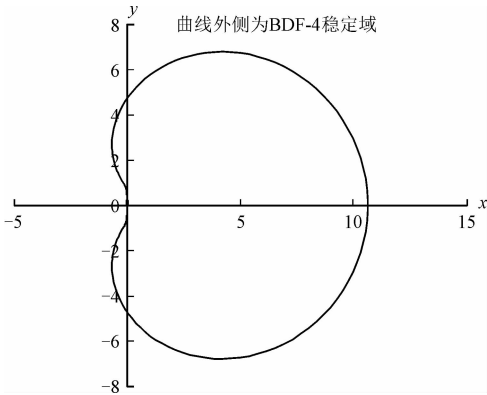


图 3 四阶后向差分算法的绝对稳定域^[16]

由于多步法缺少表头不能单独使用,因此本文使用四阶隐式龙格-库塔法^[17]计算表头。

3 稳定性分析

对于简单形式的微分方程,如 $y'=ay(a<0)$,可以通过 a 的大小判断方程的稳定性。 a 的绝对值越大,变化量的计算越容易受到控制变量误差的影响,方程越不稳定。对于常微分方程组,其稳定性通过控制方程的 Jacobi 矩阵来判断^[11]。下面结合某压缩机工作过程模拟^[4]进行说明。

不考虑泄漏和传热的影响,计算某螺杆真空泵的工作特性曲线,求解范围为 $818^{\circ} \sim 2\,250^{\circ}$,其压力随转角变化曲线如图 4 所示。利用数值微分获得压缩机工作过程中排气时($2\,040^{\circ}$)的 Jacobi 矩阵

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial dp/d\varphi}{\partial p} & \frac{\partial dp/d\varphi}{\partial m} \\ \frac{\partial dm/d\varphi}{\partial p} & \frac{\partial dm/d\varphi}{\partial p} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -37.896 & 4.8651 \times 10^3 \\ 2.6091 \times 10^{-5} & 2.9218 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$|J - \lambda I| = \lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (11)$$

该矩阵的特征值为 -37.893 、 -6.2718×10^{-3} ,记为 e_1 、 e_2 ,分别对应压力项与质量项,绝对值较大的特征值就是数值计算不稳定的主要原因。这说明压力项,也就是式(3)是引起数值刚性的主要因素。

Jacobi 矩阵特征值的最大值与最小值之比称为刚性比^[18-19],此时刚性比已经达到了 566,说明这是

一个刚性较强的问题。从图4可以看出,排气过程开始后,刚性比迅速上升。

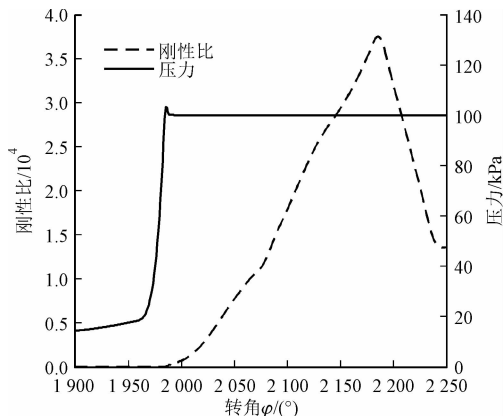


图4 压力和刚性比随转角变化曲线

图5为基元容积控制方程中误差传递示意图。在上述特征值计算过程中, $J_{11} \gg J_{22}$, $J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \ll 1$, 故有 $e_1 \approx J_{11}$, 可以看出 J_{11} 对于特征值 e_1 起了主导作用, 在图5中对应1—6以及2—5—6过程。

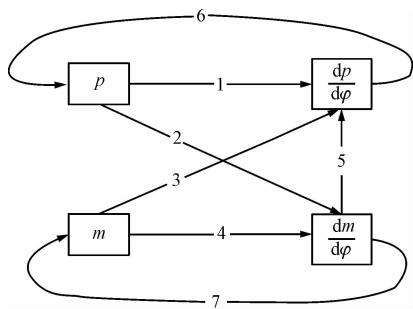


图5 基元容积控制方程误差传递示意图

J_{21} 与 J_{12} 分别对应图5中2、3过程, 其中 J_{12} 数量级较大, 其意义是 m 的微小变动引起 dp 的较大变化, 符合实际物理现象。但是 J_{21} 与 J_{12} 对特征值 e_1 的影响很小, 对应于2—7—3—6过程, 该过程中误差不会持续增大, 说明过程3可能会引起扰动, 但是并不是计算发散的主要原因。

J_{11} 及其对应的1、2—5过程是产生数值刚性的主要途径。过程2对应式(4), 该计算过程受孔口面积以及泄漏系数的影响。过程1、5对应式(3), 式中, $-\frac{1}{V_c} \left[\sum \frac{dm_i}{d\varphi} (h_i - h) \right]$ 项仅存在于压缩不足引起的倒吸过程, 在排气过程中可以暂时不考虑。

代入 $\frac{1}{v} \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\varphi} - \frac{1}{m} \frac{dm}{d\varphi}$ 可将式(3)化为

$$\frac{dp}{d\varphi} = g_1(m, p) \left[\frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\varphi} - \frac{1}{m} \frac{dm}{d\varphi}(m, p) \right] / [1 - g_2(m, p)] \quad (12)$$

容积内质量 m 一定时, 物性 g 随压力 p 变化非常小, 可以认为 $\frac{\partial g_1(m, p)}{\partial p} \ll 1$, $\frac{\partial g_2(m, p)}{\partial p} \ll 1$, $g_1(m, p) \gg 1$ 。基元容积相对变化率 $\frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\varphi} < 1$, 故有 $\frac{\partial g_1(m, p)}{\partial p} \frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\varphi} \ll 1$, 该项可以忽略。通过式(12)可以得到

$$\frac{\partial dp/d\varphi}{\partial p} \approx -g_1(m, p) \frac{1}{m} \frac{\partial dm/d\varphi(m, p)}{\partial p} / [1 - g_2(m, p)] \quad (13)$$

从式(13)可以看出, 数值刚性产生的原因在于2—5—6过程而不是1—6过程。其物理意义在于, 压力的微小变化, 会导致质量流量产生较大的相对变化。当气体压缩性较小时, 可以利用伯努利方程得到 $\frac{\partial dm/d\varphi}{\partial p} \propto \frac{A}{\sqrt{\Delta p}}$, 其中 A 为排气孔口面积。压差较小时, 质量变化率对压差就会非常敏感。这也解释了振荡现象往往出现在排气过程结束时的原因。

在排气过程中, 压差变化较小, 根据式(13), 数值刚性应当与 A/m 变化趋势接近, 将压缩机的 $\frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\varphi}$ 、 A/m 、 $1/m$ 进行归一化处理, 其变化规律如图6所示, 可以看出数值刚性确实与 A/m 变化趋势接近, 与预计相符。同时从图6可以看出, 排气接通后(1959°), 由于压缩不足产生倒吸, 相对排气前基元容积内的质量增加, 但是排气接通后数值刚性迅速增加, 这也证明了数值刚性并不是直接由基元容积内质量较小引起的。

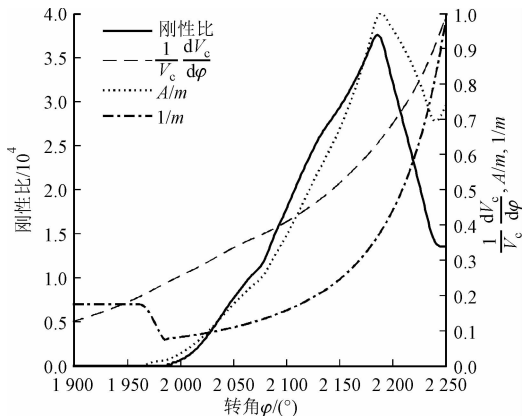


图6 影响刚性比的因素

综上所述, 数值刚性主要由质量方程对压力的

敏感性产生。

4 算法比较和分析

4.1 算法稳定性比较

不考虑泄漏和传热的影响,分别使用 RK-4 与 BDF-4 算法(一阶前向误差取 1×10^{-6})计算同一螺杆真空泵的工作特性曲线,求解范围为 $818^{\circ}\sim 2\,250^{\circ}$,结果如图 7 所示。可以看出,使用 RK-4 算法时产生了明显的压力波动,很容易被误认为是压力脉动或者气阀颤振。但是本例中并未加入气阀模型,改变步长后振荡的形式也出现了变化。结合图 4 中数值刚性的迅速上升可以判断,该振荡是由数值刚性产生的伪振荡,不是真实的物理过程。

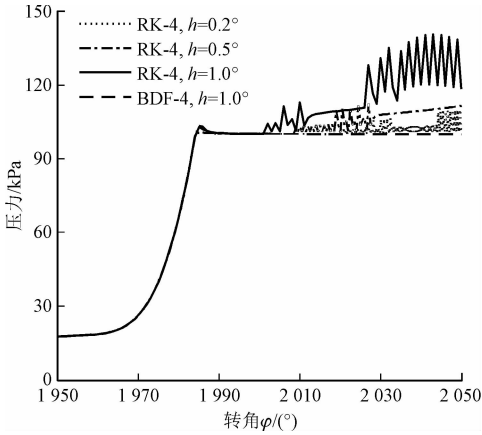


图 7 RK-4 与 BDF-4 算法稳定性对比

从图 7 还可以看出,步长越小,产生数值振荡的角度越延后,也就是说随着数值刚性增大,可以稳定计算的最大步长逐渐减小。在微分方程求解的每个时间步长内进行线性化假设,就可以利用显式算法的绝对稳定域和控制方程的数值刚性估计最大稳定计算步长

$$h_{\max} \approx \frac{2.78}{J_{11}}$$

(14)

根据图 8 所示的预测结果,步长为 0.5° 、 0.2° 的 RK-4 算法将分别在转角 $2\,006^{\circ}$ 、 $2\,019^{\circ}$ 时发散,与图 7 的结果吻合,也验证了数值刚性是产生计算振荡的原因。

预测结果显示,RK-4 算法需要很小的步长才能消除数值刚性的影响,而使用隐式算法 BDF-4 时完全不受数值刚性影响,并未出现压力波动。BDF-4 算法的绝对稳定域是延伸到无穷远处的,故理论上 BDF-4 算法在排气过程中绝对稳定。说明 BDF-4 算法可以克服数值刚性引起的振荡问题,其稳定

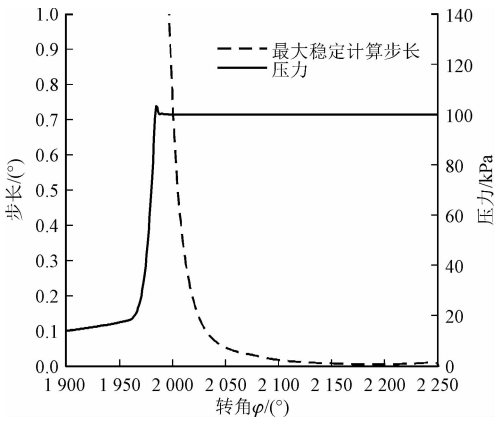


图 8 RK-4 算法最大稳定计算步长

性高于 RK-4 算法。

4.2 算法耗时比较

通过调用控制方程的次数,可以对计算时间进行简单估计。RK-4 算法需要调用 4 次控制方程,而 BDF-4 算法调用次数由求解非线性方程组迭代的次数决定,每迭代 1 次需要调用 3 次控制方程,一般需要调用 2~3 次,总共需要调用 6~9 次,是 RK-4 算法的 1.5~2.25 倍。

计算中,一阶前向误差(ϵ_x)取 1×10^{-6} ,区间为 $818^{\circ}\sim 2\,250^{\circ}$,比较不同步长和不同算法在每次计算所需要的时间。从表 1 可以看出,在相同步长下,BDF-4 算法耗时约为 RK-4 算法的 1.7~1.8 倍。

表 1 不同步长下 2 种算法每次循环耗时比较

算法	步长/(°)	耗时/s
RK-4	0.5	35.54
	1.0	18.19
BDF-4	0.5	61.89
	1.0	32.06

4.3 算法的误差

虽然 RK-4 与 BDF-4 算法都是四阶代数精度,但是 RK-4 算法的局部截断误差系数为 $-1/2\,880$,相比 BDF-4 算法的 $-12/125$ 更小^[20],在理论上,RK-4 算法更加精确。为了对比 2 种算法在实际计算程序中相同步长下的误差,定义压力的相对误差

$$\delta = \left| \frac{p_{\text{ref}} - p_a}{p_a} \right|$$

(15)

式中: p_{ref} 为基准算法的压力; p_a 为对比算法的压力。
4.3.1 无泄漏模型计算 在无泄漏的条件下进行计算,区间为 $818^{\circ}\sim 2\,050^{\circ}$ (防止 RK-4 计算发散),其中 BDF-4 求解方程组时 ϵ_x 分别选取 1×10^{-4} 、 1×10^{-6} 、 1×10^{-8} 。取步长为 0.5° 的 RK-4 算法作

为基准进行对比,压力的相对误差如图9所示。排气接通前,RK-4算法相对BDF-4算法的精度较高,与理论预计符合;排气过程中,2种算法的结果差异较小。不同误差下BDF-4算法的求解结果有所不同。当 $\epsilon_x=1\times 10^{-4}$ 时,误差主要由求解方程组产生; $\epsilon_x=1\times 10^{-8}$ 时,误差由BDF-4误差主导,此时可以认为 ϵ_x 为 1×10^{-8} 可以满足工程上的计算需求。

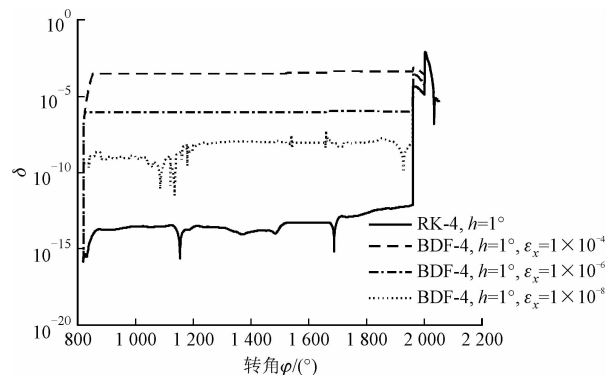


图9 无泄漏时压力的相对误差

4.3.2 有泄漏模型计算 当考虑多工作容积间的泄漏时,需要进行多次迭代计算,此时的误差很难通过理论估计。在有泄漏的条件下进行迭代计算,区间为 $818^{\circ}\sim 2\,050^{\circ}$,迭代次数为20次。

取步长为 0.01° 的RK-4算法作为基准进行对比,压力的相对误差如图10所示。此时RK-4算法误差随着步长减小而减小,BDF-4误差随 ϵ_x 减小而减小,比较符合理论预期。此时可以认为 $\epsilon_x=1\times 10^{-6}$ 可以满足工程上的计算需求。图10右侧的尖峰出现在排气刚刚连通的转角($1\,959^{\circ}$),说明步长为 1° 时不能较好地捕捉排气倒吸过程。该误差的存在导致上一个容积腔(提前 360°)的计算误差出现波动。在压缩过程中,2种算法的相对误差都处于 10^{-4} 数量级。

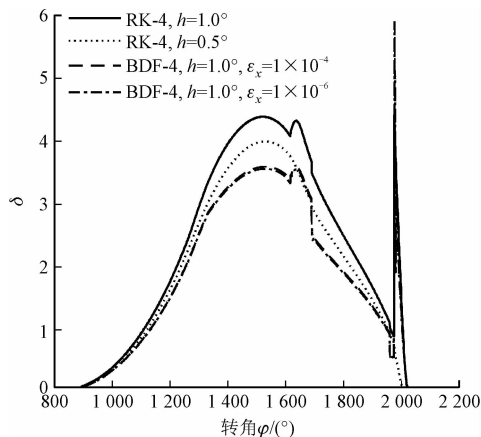


图10 有泄漏时压力的相对误差

总的来说,BDF-4算法的精度与RK-4算法差距较小,可以认为BDF-4算法能满足工程上对计算精度的需求。在实际工程计算中,可以根据对计算效率、精度以及稳定性的要求,将两者搭配使用。

5 结 论

(1)在压缩机工作过程模拟中,由于质量流率对压力敏感产生的数值刚性,经常会导致求解过程中产生振荡甚至发散。对于使用RK-4算法求解包含气阀或者气流脉动的模型,应当更加谨慎地判断压力曲线振荡的原因。

(2)BDF-4算法可以避免数值刚性带来的影响,提高压缩机一维工作过程模拟的稳定性,并防止数值振荡的产生。使用该BDF-4算法时,步长不再受到稳定性的限制。

(3)相比传统的RK-4算法,BDF-4算法需要消耗1.7~1.8倍的计算时间。实际循环计算中两者的相对误差基本都处于 10^{-4} 数量级,均可满足工程设计上的需要。

参考文献:

- [1] 邢子文,吴华根,束鹏程. 螺杆压缩机设计理论与关键技术的研究和开发[J]. 西安交通大学学报, 2007, 47(7): 755-763.
XING Ziwen, WU Huagen, SHU Pengcheng. Research and development on design theory and key technology of screw compressors [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 47(7): 755-763.
- [2] 吴华根,邢子文,束鹏程. R134a 螺杆制冷压缩机工作过程数值模拟及实验研究[J]. 西安交通大学学报, 2004, 38(5): 487-490.
WU Huagen, XING Ziwen, SHU Pengcheng. Theoretical and experimental investigation on working process of screw refrigeration compressor with R134a [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2004, 38(5): 487-490.
- [3] 邢子文,邓定国,束鹏程. 双螺杆压缩机工作过程的计算机模拟研究[J]. 流体工程, 1991(12): 11-16.
XING Ziwen, DENG Dingguo, SHU Pengcheng. Research on computer simulation of twin screw compressor working process [J]. Fluid Machinery, 1991(12): 11-16.
- [4] 卢阳,郭蓓,周瑞鑫. 双螺杆真空泵工作过程数值模拟[J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(7): 67-71.
LU Yang, GUO Bei, ZHOU Ruixin. Numerical simulation for working process in twin screw vacuum pump

- [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2015, 49(7): 67-71.
- [5] WU Huagen, XING Ziwen, SHU Pengcheng. Theoretical and experimental study on indicator diagram of twin screw refrigeration compressor [J]. International Journal of Refrigeration, 2004, 27(4): 331-338.
- [6] 邢子文. 螺杆压缩机: 理论、设计及应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2000: 117-132.
- [7] 齐元渠, 余岳峰. 双螺杆膨胀机泄漏过程的数值模拟与分析 [J]. 上海交通大学学报, 2016, 50(4): 496-501.
- QI Yuanqu, YU Yuefeng. Numerical simulation and analysis of leakage process in twin screw expander [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2016, 50(4): 496-501.
- [8] SALIKEEV S, BURMISTROV A, BRONSHTEIN M, et al. Conductance calculation of channels in laminar gas flow regime at an arbitrary pressure difference [J]. Vacuum, 2014, 107: 178-183.
- [9] SALIKEEV S, BURMISTROV A, BRONSHTEIN M, et al. Conductance calculation of slot channels in laminar gas flow regime at small pressure difference [J]. Vacuum, 2014, 99: 303-306.
- [10] BURMISTROV A, SALIKEEV S, BRONSHTEIN M, et al. Conductance calculation of slot channels with variable cross section [J]. Vakuum in Forschung und Praxis, 2015, 27(1): 36-40.
- [11] LAMBERT J D. Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem [M]. New York, USA: John Wiley & Sons Ltd., 1991: 98-103, 149-157, 213-254.
- [12] HAIRER E, NØRSETT S P, WANNER G. Solving ordinary differential equations: I Nonstiff problems [J]. SIAM Review, 1990, 32(3): 485.
- [13] ENRIGHT W H, HULL T E, LINDBERG B. Comparing numerical methods for stiff systems of O. D. E:s [J]. BIT Numerical Mathematics, 1975, 15(1): 10-48.
- [14] ASHINO R, NAGASE M, VAILLANCOURT R. Behind and beyond the MATLAB ODE suite [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2000, 40(4/5): 491-512.
- [15] SHAMPINE L F. Evaluation of a test set for stiff ODE solvers [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1981, 7(4): 409-420.
- [16] HAIRER E, WANNER G. On the instability of the BDF formulas [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1983, 20(6): 1206-1209.
- [17] BUI T D, BUI T R. Numerical methods for extremely stiff systems of ordinary differential equations [J]. Applied Mathematical Modelling, 1979, 3(5): 355-358.
- [18] SHAMPINE L F. Measuring stiffness [J]. Applied Numerical Mathematics, 1985, 1(2): 107-119.
- [19] SHAMPINE L F, REICHEL T M W. The MATLAB ODE suite [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1997, 18(1): 1-22.
- [20] HAIRER E, WANNER G. Solving ordinary differential equations II [M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1996: 16-18, 240-247.

[本刊相关文献链接]

- 李元, 全恺, 吴睿, 等. 往复压缩机管路大气流脉动的数值模拟和实验研究. 2019, 53(11): 20-26. [doi: 10.7652/xjtuxb201911003]
- 赵家毅, 王志恒, 席光, 等. 大预旋下离心压缩机进口结构与导叶掠角的改进研究. 2017, 51(11): 1-6. [doi: 10.7652/xjtuxb201711001]
- 吴小华, 杨俊玲, 越云凯, 等. 一种新型热压缩机运行特性实验研究. 2017, 51(11): 144-149. [doi: 10.7652/xjtuxb201711020]
- 王晟旻, 琚亚平, 张楚华. 离心压缩机级通流与盘盖侧泄漏流的耦合分析. 2017, 51(7): 73-77. [doi: 10.7652/xjtuxb201707011]
- 史云昊, 陈雪飞, 宁远钊, 等. 采用关联模型的离心压缩机喘振工况数值研究. 2017, 51(5): 128-133. [doi: 10.7652/xjtuxb201705018]
- 武晓昆, 陈文卿, 周明龙, 等. 双螺杆制冷压缩机气流脉动衰减器的研究与开发. 2017, 51(4): 23-29. [doi: 10.7652/xjtuxb201704004]
- 王枫, 陈征, 李花, 等. 采用多体动力学的压缩机曲轴结构优化. 2017, 51(3): 7-13. [doi: 10.7652/xjtuxb201703002]
- 王增丽, 申迎峰, 王振波, 等. 单螺杆压缩机工作腔喷液过程几何特性及工作机理研究. 2017, 51(2): 128-134. [doi: 10.7652/xjtuxb201702020]
- 慕光宇, 王枫, 米小珍. 压缩机舌簧排气阀运动模型对比及动态特性影响因素分析. 2017, 51(9): 69-76. [doi: 10.7652/xjtuxb201709010]
- 王亚洲, 秦国良, 和文强, 等. 时空耦合谱元方法求解一维 Burgers 方程. 2017, 51(1): 45-50. [doi: 10.7652/xjtuxb201701008]

(编辑 亢列梅 陶晴)