

零件曲线拟合不确定度的评估与降低方法

韦进文

(广西大学机械工程学院, 530004, 南宁)

摘要: 针对零件曲线拟合中的数据噪声与误差、数据分割误差以及用错几何元素等引起的不确定度进行评估并提出其降低方法。首先,基于蒙特卡罗法,在拟合数据中叠加噪声、用零均值高斯分布作为分割误差模型、用圆弧拟合 Bezier 曲线,以数字仿真研究拟合参数的不确定度。结果表明,对不确定度影响最大的是分割误差与用错几何元素,远大于数据噪声的影响;其次,为了降低拟合参数的不确定度,采用高维向量映射测试元素特征在局部数据中的恒定性,找出其所在的数据段范围,从而准确辨识出各数据段的几何元素。仿真与实物实验均表明,提出的方法能够正确识别数据序列的几何元素、准确分割数据,从而降低零件曲线拟合不确定度。

关键词: 曲线拟合;不确定度评估;蒙特卡罗法

中图分类号: TH39 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202110008 **文章编号:** 0253-987X(2021)10-0068-10



The Uncertainty Valuation and Reduction in Part Curve Fitting

WEI Jinwen

(School of Mechanical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: The uncertainties from data noise and error, data segmentation error and wrong fitting geometric elements, are evaluated respectively, and then a method to decrease the uncertainties is proposed for the curve fitting of parts. Firstly, based on Monte Carlo method, the uncertainty of fitting parameters is studied by adding noise to fitting data, using 0-means Gaussian distribution as segmentation error model, and using circular arc to fit Bezier curve. The results show that segmentation error and misuse of geometric elements have a great influence on the uncertainty, which is much greater than the influence of data noise. Secondly, in order to segment the data sequence accurately, high-dimensional vector mapping is proposed to test the constancy of local features of elements, identify the geometric elements in the data sequence, and find out the range of the data segment. Simulation and experiment results show that the proposed method can obtain more accurate data segmentation and fitting than traditional methods.

Keywords: curve fitting; uncertainty valuation; Monte Carlo method

曲线拟合广泛应用于逆向工程、产品检测与加工质量控制等许多领域^[1]。在应用传统的最小二乘法(LSM)拟合时,需要给出所用直线、圆弧等几何元素类型(以下简称元素)的目标函数,以及分割点(边界)处的约束条件,力求使元素尽可能逼近待拟合数据序列^[2]。但是,数据序列所包含的元素种类、数量等通常是不可知的,也就无法预先给出分割点处的约束条件,甚至正确的目标函数。很多情况下,

元素类型、数量及各自的数据范围是主观指定的,这显然不合理。在很多情况下,需要揭示数据对象的内在信息比单纯的数据逼近更有用^[3]。所以,待拟合数据序列的辨识、分割是一种重要技术^[4]。

以霍夫变换为代表的一类传统数据分割方法主要用于直线与圆等简单元素识别^[5]。把数据序列的点映射到某元素参数空间,若多个映射交汇于一点,则对应数据点属于相同元素。这种用点映射“投票”来决定其所属元素的方法受噪声或误差影响时,在参数空间中可能由于“票数分散”引起识别误差^[6],表明其鉴别能力有限。此外,霍夫变换用二维参数空间一个点来表示数据序列的参数恒定性,不适于其他高维参数元素的辨识与分割;简单元素如直线或圆弧的数据分割方法还包括遗传算法^[7]、曲率分析^[8]等。曲率分析涉及微分运算,受数据噪声影响较大;而遗传算法的分割精度不高。较复杂的其他元素如样条曲线,可以用模板匹配(广义霍夫变换)^[9]、粒子群优化或杜鹃搜索算法^[10]等分割方法,但精度有限;也有人采用曲线二阶导数符号变化来判断元素分割点^[11],但受噪声影响很大。

拟合中的数据分割是一个随机事件。传统拟合只考虑减小数据噪声与误差的影响,使元素尽量逼近所拟合的数据序列,而对正确元素选用以及数据分割准确性对拟合的影响重视不够;分割方法一般存在适用特征维数低、受噪声影响大且分割点的随机偏移量大等不足。本文探讨数据分割误差与用错元素等因素对拟合的影响,据此提出一种几何元素辨识及其数据分割方法。

1 不确定度评估

根据 JJF1059.1—2012,测量不确定度评估方法有指南法(GUM)与蒙特卡罗法(MCM)^[12]等,其中 GUM 用于线性、对称或正态测量模型,而 MCM 用于非线性模型^[13]。曲线拟合不确定度来源主要有:数据噪声与误差、数据分割误差以及用错元素(例如把圆弧误当做直线进行拟合)。数据噪声与误差在测量领域普遍存在,相应的不确定度评估已有成熟方法例如 GUM^[12];分割误差不仅由数据误差引起,还常常源于分割方法;而用错元素的原因与后果则更为复杂。因此,曲线拟合一般是一个强非线性模型。所以本文考虑 MCM 评估,以一个凸轮为对象,对其轮廓拟合实施 MCM 数字仿真实验。

1.1 实验对象设计

某凸轮轮廓曲线包含 4 个元素,名称与参数分

别为:基圆弧 b_1 与 b_2 ,圆心均为 $(0,0)$ 、半径均为 18;顶圆弧 T ,圆心为 $(20,0)$ 、半径为 5;右圆弧 R ,圆心为 $(-10.475\ 0, 22.699\ 7)$ 、半径为 43;Bezier 曲线段 Bez,顶点为 $Q_0(30.253\ 2, -8.957\ 3)$ 、 $Q_1(22.214\ 9, 13.278\ 1)$ 与 $Q_2(-1.213\ 9, 19.458)$,各参数的单位均为 mm。圆弧 R 与曲线段 Bez 的两端分别关于 x 轴对称;各元素在连接点处满足 C^1 连续;由于 Q_0 与 Q_2 均在轮廓外,曲线段 Bez 仅部分在轮廓上,两端分别对应伯恩斯坦基函数的参数 $t=0.3$ 与 $t=0.8$ 。

把这轮廓线从基圆弧的中部开始,绕原点进行以 1° 为步长的等角采样离散,可以得到 360 个采样点,分为 5 个子集,即圆弧 $b_1: \{P_1, \dots, P_{115}\}$,圆弧 $R: \{P_{116}, \dots, P_{171}\}$,圆弧 $T: \{P_{172}, \dots, P_{187}\}$,曲线段 Bez: $\{P_{188}, \dots, P_{245}\}$,及圆弧 $b_2: \{P_{246}, \dots, P_{360}\}$,即各元素数据段末端数据点下标为 $\{i_{cb}, i_{cR}, i_{cT}, i_{cB}\} = \{115, 171, 187, 245\}$ 。

对采样数据施加均方差 $\sigma = 0.1\ \mu\text{m}$ 的高斯噪声。

1.2 曲线拟合算法

1.2.1 圆弧拟合 待拟合的参数为半径 r 与圆心 (x_c, y_c) 。设数据序列 $(x_i, y_i), i=1, \dots, m_c$, 由最小二乘法(LSM)得目标函数为

$$\min \sum_{i=1}^{m_c} [(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - r^2]^2 \quad (1)$$

1.2.2 Bezier 曲线拟合 二阶 Bezier 曲线具有足够曲率与平滑性,可以很好拟合一般的样条曲线。由控制点 $Q_0 \sim Q_2$ 生成的 Bezier 曲线中,将其参数方程中的参数消掉,得到抛物线形式的 Bezier 曲线

$$(C_y x - C_x y)^2 + [2(B_y C_x - B_x C_y) C_y + A_y (A_x C_y - A_y C_x)] x + [2(B_x C_y - B_y C_x) C_x + A_x (A_y C_x - A_x C_y)] y + (A_x B_y - A_y B_x) (A_x C_y - A_y C_x) + (B_y C_x - B_x C_y)^2 = 0$$

式中: $A=2(Q_1-Q_0)$; $B=Q_0$; $C=(Q_0+Q_2-2Q_1)$; x, y 可互换。

设 $C_x \neq 0$, Bezier 曲线 LSM 目标函数的一般形式为

$$\min \sum_{i=1}^{m_B} [(b_1 x_i - y_i)^2 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4]^2 \quad (2)$$

作为一般的圆锥曲线,其 LSM 目标函数则为

$$\min \sum (x_i^2 + b_1 y_i^2 + b_2 x_i y_i^2 + b_3 x_i + b_4 y_i + b_5)^2$$

传统的样条曲线参数化(如累加弦长参数化 CCL)拟合通常需要曲线的控制端点 Q_0 或 Q_2 , 用抛

物线拟合则不受此限制,可以很好地拟合曲线片段。
1.2.3 含多元素曲线的 LSM 拟合 把前述实验对象分割后的数据 (x_i, y_i) 按整体拟合,其 LSM 目标函数为

$$\min \left\{ \sum_{i=i_{eB}+1}^{i_{eb}} [(x_i - x_b)^2 + (y_i - y_b)^2 - r_b^2]^2 + \sum_{i=i_{eB}+1}^{i_{eR}} [(x_i - x_R)^2 + (y_i - y_R)^2 - r_R^2]^2 + \sum_{i=i_{eR}+1}^{i_{eT}} [(x_i - x_T)^2 + (y_i - y_T)^2 - r_T^2]^2 + \sum_{i=i_{eT}+1}^{i_{eB}} [(b_1 x_i - y_i)^2 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4]^2 \right\}$$

s. t. C^1 连续

在圆弧 R 两端 R_1 与 R_2 满足

$$(x_b - x_R)^2 + (y_b - y_R)^2 - (r_b - r_R)^2 = 0, (x_T - x_R)^2 + (y_T - y_R)^2 - (r_T - r_R)^2 = 0;$$

在曲线段 Bez 两端 $(R_{1x}, -R_{1y})$ 与 $(R_{2x}, -R_{2y})$ 满足

$$\begin{cases} (b_1 R_{1x} + R_{1y})^2 + b_2 R_{1x} - b_3 R_{1y} + b_4 = 0 \\ \frac{2b_1(R_{1y} + b_1 R_{1x}) + b_2}{2(R_{1y} + b_1 R_{1x}) - b_3} - \frac{(x_b - x_R)}{(y_b - x_R)} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (b_1 R_{2x} + R_{2y})^2 + b_2 R_{2x} - b_3 R_{2y} + b_4 = 0 \\ \frac{2b_1(R_{2y} + b_1 R_{2x}) + b_2}{2(R_{2y} + b_1 R_{2x}) - b_3} - \frac{(x_T - x_R)}{(y_T - y_R)} = 0 \end{cases}$$

而

$$R_{1x} = \frac{r_R x_b - r_b x_R}{r_R - r_b}; \quad R_{1y} = \frac{r_R y_b - r_b y_R}{r_R - r_b}$$
$$R_{2x} = \frac{r_R x_T - r_T x_R}{r_R - r_T}; \quad R_{2y} = \frac{r_R y_T - r_T y_R}{r_R - r_T}$$
$$Z = \{x_b, y_b, r_b, x_R, y_R, r_R, x_T, y_T, r_T, b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

(3)

表 1 各种分割误差的拟合期望与不确定度

Table 1 Some fitting results under various segmentation errors

(σ_1, σ_2)	μ_{δ_s}/mm	U_{δ_s}/mm	μ_{δ_a}/mm	U_{δ_a}/mm	μ_{δ_i}	U_{δ_i}	$\mu_{\delta_l}/\text{mm}^2$	U_{δ_l}/mm^2
(0,0)	$4.024\,8 \times 10^{-8}$	$2.175\,4 \times 10^{-10}$	$-7.588\,1 \times 10^{-9}$	$7.383\,8 \times 10^{-1}$	$-6.937\,6 \times 10^{-6}$	$2.395\,3 \times 10^{-7}$	0.076 507	2.476 7
(1,1)	$1.357\,5 \times 10^{-5}$	$3.119\,5 \times 10^{-9}$	$-1.264\,5 \times 10^{-6}$	$7.875\,5 \times 10^{-11}$	-0.030 791	0.002 227 8	99.603	23 180
(2,1)	$1.249\,3 \times 10^{-4}$	$1.889\,1 \times 10^{-7}$	$8.772\,2 \times 10^{-7}$	$4.369\,4 \times 10^{-10}$	-0.028 935	0.002 546 0	93.839	26 039

注: μ, U 分别表示参数的期望与不确定度。

图 1 中,若分割误差 $\{\sigma_1, \sigma_2\}=0$,拟合误差直方图在噪声作用下大致呈现正态分布的形态 $\delta_Z \sim N(\mu, \Sigma)$,几乎所有的拟合误差期望均在 μm 级以下,不难从中建立其 PDF 及各参数的置信区间。然而,随着分割误差的出现,拟合误差直方图呈现出复杂的多峰形态(d_1, d_2 离散化导致的栏栅效应)。在 MCM 实验中发现,拟合误差状况与元素及其参数

为待拟合的 13 个参数,可用诸如高斯-牛顿法解之。为了简单方便,以下用拟合误差表示相应的参数

$$\delta_Z = \{\delta_{xb}, \delta_{yb}, \delta_{rb}, \delta_{xR}, \delta_{yR}, \delta_{rR}, \delta_{xT}, \delta_{yT}, \delta_{rT}, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$$

式中: $\delta_{zi} = \hat{z}_i - \underline{z}_i, \hat{z}_i, \underline{z}_i$ 分别为各参数的估计值与真值。真值 $\underline{z} = \{0, 0, 18, -10.475, 22.699\,7, 43, 20, 0, 5, 1.043\,2, 92.421\,9, 145.007\,6, -3\,138.9\}$ 。本文中矩阵、向量各元素之间的逗号表示同行,分号表示换行。

1.3 不确定度模型

1.3.1 数据分割误差造成的拟合不确定度 分割误差视为随机变量。考虑到前述实验对象 4 个分割点关于 x 轴对称,分割点下标 $\{i_{eb}, i_{eR}, i_{eT}, i_{eB}\}$ 的误差设为 $\{d_1, d_2, -d_2, -d_1\}$,其中 $\{d_1, d_2\}$ 服从 $\{\mu_1, \mu_2\}=0, \Sigma=\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ 的二维正态分布。各元素分割系依据其各自局部参数特征,其独立性是有保证的,所以 d_1 与 d_2 不相关,即

$$d_1 \sim N(0, \sigma_1^2); \quad d_2 \sim N(0, \sigma_2^2) \quad (4)$$

在离散测量数据序列中, $\{d_1, d_2\}$ 应离散为整数,即把小数点后的数字 4 舍 5 入。考虑分割误差后,上述凸轮轮廓 4 个元素数据段的下邻域依次变为

$$[1 + i_{eB} - d_1, i_{eb} + d_1]; [1 + i_{eb} + d_1, i_{eR} + d_2]$$
$$[1 + i_{eR} + d_2, i_{eT} - d_2]; [1 + i_{eT} - d_2, i_{eB} - d_1]$$

以下设定几组分割误差的组合 $\{\sigma_1, \sigma_2\}$,每对组合实施 5×10^4 次数字仿真实验,各组实验数据仍用前述的噪声水平。由于概率密度函数(PDF)与直方图的相似性,图 1 给出 x_b, y_b, b_1, b_4 等几个参数用直方图表示的实验结果, $\delta_{zi}(\sigma_1, \sigma_2) \sim F, F$ 为实验出现频次。参数期望与不确定度见表 1。

的对称性、数据段大小、拟合算法鲁棒性等有关。

(1)元素/参数对称性及数据段大小。圆弧 b 与圆弧 T 均关于 x 轴对称,而圆弧 R 与曲线段 Bez 既不对称也不互相对称。圆弧 b 与圆弧 T 的对称性会随着混入圆弧 R 与曲线段 Bez 的数据点错误而变差。因此, δ_{yb} 的正态形状随着分割误差而逐渐变坏;而圆弧 T 则由于数据量过少,在分割误差很小时

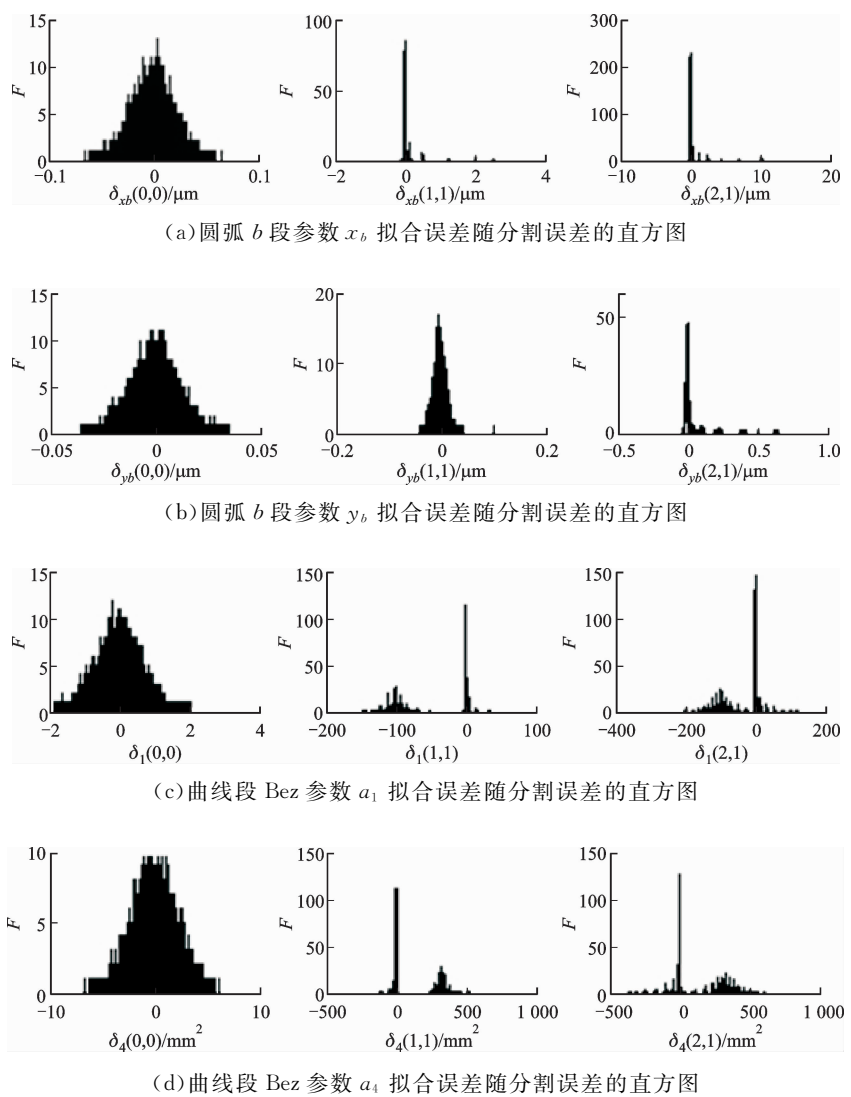


图 1 部分变量拟合的 MCM 实验结果

Fig. 1 The results of some MCM experiments

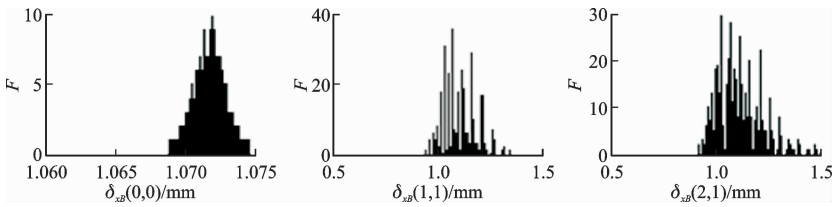
δ_{yT} 即出现栏栅效应。

(2)算法鲁棒性。式(3)中曲线段 Bez 的参数 a_4 阶次最低,鲁棒性最差。故 δ_4 对分割误差敏感性远超过其对数据噪声的敏感性,会随着分割误差而快速增大甚至发散。曲线段 Bez 的其他参数相对圆弧参数的鲁棒性也比较差。若各元素分别用式(1)或(2)单独拟合,圆弧 b 与圆弧 T 元素只分别受 σ_1 与 σ_2 影响,而圆弧 R 与曲线段 Bez 则都受到二者影响;但若用式(3)整体拟合,任一分割误差均会影响所有参数。

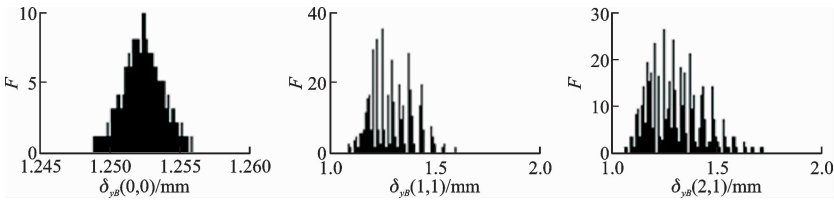
(3)分割误差的单边性。元素的数据段正确分割或者被截短后其拟合误差通常主要受数据噪声影响;而若其数据段由于错分而有其他元素数据点混入时,其拟合误差会增大甚至淹没了噪声误差并出现单边性。以圆弧 b 为例,当其数据段包含圆弧 R 与曲线段 Bez 的一些数据点时,其圆心 x 坐标会被高估而远大于噪声误差,即 $\hat{x}_1 > z_1$ 或 $\delta_{xb}(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ 。由此出现了 $\delta_{xb}(\sigma_1, \sigma_2)$ 总是位于直方图原点右侧的单边性。曲线段 Bez 参数 $\{b_1, \dots, b_4\}$ 没有明确的几何意义,拟合不确定度主要来自于相邻元素数据点的混入而非数据噪声。这些参数可能高估也可能低估。

1.3.2 用错元素类型造成的拟合不确定度 最可能出现的用错元素情况是曲线段 Bez 被当作圆弧处理。不考虑曲线段 Bez 与圆弧 R 的对称性,另设一圆弧 B 及其参数 $\{x_B, y_B, r_B\}$,用圆弧 B 的取代 Bez-ier 的 LSM 目标函数以仿真用错元素。这样式(3)中共有 12 个参数。图 2 与表 2 给出部分 MCM 实验结果。

由实验结果看出其特点:没有分割误差时,圆弧



(a)用圆弧拟合曲线段 Bez 时参数 x_B 拟合误差随分割误差的直方图



(b)用圆弧拟合曲线段 Bez 时参数 y_B 拟合误差随分割误差的直方图

图 2 用圆弧拟合曲线段 Bez 的部分 MCM 实验结果

Fig. 2 The results of the MCM experiments on the Bez fitted by an arc

表 2 用圆弧拟合曲线段 Bez 的参数期望与不确定度

Table 2 The fitting results of the Bez by an arc

(σ_1, σ_2)	$\mu_{\delta xB}/\text{mm}$	$U_{\delta xB}/\text{mm}$	$\mu_{\delta yB}/\text{mm}$	$U_{\delta yB}/\text{mm}$
(0,0)	1.071 8	$6.625\ 7 \times 10^{-7}$	1.252 4	$1.002\ 7 \times 10^{-6}$
(1,1)	1.098 6	0.004 254 6	1.288 8	0.006 919 4
(2,1)	1.106 2	0.008 329 8	1.297 0	0.011 857 0

注:下标 B 表示拟合曲线段 Bez 的圆弧。

B 拟合误差直方图在一定程度上呈现期望不为 0 的正态性,但拟合准确度不如 Bezier 曲线,也不及与其相对称的圆弧 R ,且不确定度也比较大;有分割误差时,出现了栏栅效应,不确定度增大但不显著。由于样条曲线拟合算法鲁棒性较弱^[14],圆弧 B 对分割误差的敏感性远小于 Bezier,用式(1)拟合曲线段 Bez 的准确度可能比式(2)高。

2 降低曲线拟合不确定度

上述实验表明,对曲线拟合影响最大的是元素选择与数据分割,而非数据噪声。为了降低不确定度,以下提出一种从零件曲线中正确识别所含元素类型并准确分割其数据段的方法。

2.1 基本原理

待拟合数据序列包含多个元素时,每个数据段所属元素的参数特征恒定不变。由此,本文的元素识别与数据分割原理为:将待拟合数据序列按序划分为多个包含少量局部数据点的子集(称为数据子集),用于计算某元素的一组参数特征;顺序扫描各数据子集,如果参数特征恒定则相应子集属于该元

素,不恒定则无该元素;逐个测试各个可能元素,通过观察相应参数特征恒定性,可以判断是否存在其数据段;以此类推,实现整个序列的元素识别与数据分割。

上述原理是在理想状况下的。实际上数据序列都包含噪声、错误等,各顺序数据子集即使属于同一元素,它们的特征一般也不相同。这就需要一种方法尽量抑制噪声、错误的影响,凸显元素几何特征,以利于其恒定性判断。高维叉积运算能满足该需求。

2.1.1 高维叉积的定义及其鲁棒性质^[15]

定义 对于 $n \times (n+1)$ 叉矩阵 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1; \cdots; \mathbf{X}_n\}$,对应的叉积运算定义为 $\mathbf{X}_{n+1} = \text{cross}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{X}_{n+1}, \cdots, \mathbf{X}_{n,n+1}\}$,且

$$\mathbf{X}_{n+1,j} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{X}_{1,1} & \cdots & \mathbf{X}_{1,j-1} & \mathbf{X}_{1,j} & \mathbf{X}_{1,j+1} & \cdots & \mathbf{X}_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{X}_{n,1} & \cdots & \mathbf{X}_{n,j-1} & \mathbf{X}_{n,j} & \mathbf{X}_{n,j+1} & \cdots & \mathbf{X}_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

式中: $\mathbf{X}_i \in R^{n+1}; i, j = 1, \cdots, n+1$ 。

积向量的模为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_{n+1}\| &= \|\mathbf{X}_1\| \cdots \|\mathbf{X}_n\| \begin{vmatrix} \cos\beta_{1,1} & \cdots & \cos\beta_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \cos\beta_{n,1} & \cdots & \cos\beta_{n,n} \end{vmatrix}^{0.5} \\ &= \|\mathbf{X}_1\| \cdots \|\mathbf{X}_n\| |\mathbf{B}|^{0.5} \end{aligned}$$

式中: β_{ij} 为向量 $\mathbf{X}_i$ 与 $\mathbf{X}_j$ 的夹角。

叉积鲁棒定理 定义 $\cos\alpha_i = -\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}(i,i)|}$ 为向量

$\mathbf{X}_i$ 的正交角,其中 $\mathbf{B}(i,j)$ 表示矩阵 $\mathbf{B}$ 删除第 i 行第 j 列后得到的矩阵,则必有 $\pi/2 < \alpha_i \leq \pi$ 。实际上 α_i 可表示向量 $\mathbf{X}_i$ 对其所在叉矩阵 $\mathbf{X}$ 的相对方位角或正交程度。若 $\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j^T = 0, j=1, \dots, n, i \neq j$, 则 $\alpha_i = \pi$, 说明 $\mathbf{X}_i$ 与 $\mathbf{X}$ 完全正交。若 $\mathbf{X}_i$ 系由 $\mathbf{X}^r$ 沿某轨迹变化而来,有

$$\frac{\|\mathbf{X}_{n+1}\|}{\|\mathbf{X}_{n+1}^r\|} = \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_r} \frac{\|\mathbf{X}_i\|}{\|\mathbf{X}^r\|}$$

或

$$\|\mathbf{X}_{n+1}\| \propto \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_r} \|\mathbf{X}_i\|$$

即 $\|\mathbf{X}_{n+1}\|$ 包含了 $\mathbf{X}_i$ 的模与方位信息,且与 $\|\mathbf{X}_i\|$ 之比为可变的比例系数 $\cos \alpha_i / \cos \alpha_r$ 。由于 α_r 越接近 π , 在 $\mathbf{X}^r$ 附近 $\|\mathbf{X}_{n+1}\|$ 对 $\|\mathbf{X}_i\|$ 的变化率越小, 即 $\mathbf{X}_{n+1}$ 的鲁棒性越强; 反之, 若 $\alpha_r \rightarrow \pi/2$, 则 $\mathbf{X}_{n+1}$ 的鲁棒性变差。故 α_r 可用作积向量对 $\mathbf{X}_i$ 的鲁棒性指标。

2.1.2 基于高维叉积的元素识别与数据分割 对于待拟合序列 $\mathbf{P}_i, i=1, \dots, m$, 顺序构造某测试元素的数据子集序列 $(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}, \mathbf{P}_{i+2}, \dots)$, 从中计算各相应的参数特征向量 $\mathbf{X}_i \in \mathbf{R}^{n+1}$ 。为了观察该参数特征序列是否恒定, 把它们映射到一个标量即积向量模

$$\|\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{X})\| = \|\text{cross}[\mathbf{X}; \mathbf{E}]\| \quad (5)$$

式中: $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1; \dots; \mathbf{E}_{n-1}\} \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n+1)}$ 为常数映射矩阵; 设 $\mathbf{X}$ 的正交角为 α 。

当扫描某个数据段时, 假设该数据段属于所测试的元素, 其对应的特征向量为常向量 $\mathbf{X}^r$, 对应的正交角为 α_r , 有 $\alpha, \alpha_r \in [\pi/2, \pi]$ 。以 $\mathbf{X}^r$ 为参照, 若噪声或数据误差使特征向量从 $\mathbf{X}^r$ 变为 $\mathbf{X}$, 对应参考正交角变化为 $\alpha_r \rightarrow \alpha$ 。选用不同的 α_r 导致的比例系数 $\cos \alpha / \cos \alpha_r$ 随 $\mathbf{X}$ 的方位变化情况: 若 α_r 接近 $\pi/2$, 比例系数随 $\mathbf{X}$ 正交角而急剧变化, $\|\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{X})\|$ 亦将随 $\mathbf{X}$ 而剧烈变化; 若 α_r 接近 π , 比例系数只随正交角在 1 附近稍有平缓变化, 噪声或错误引起 $\mathbf{X}$ 的波动在 $\|\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{X})\|$ 中被抑制。如果数据属于被测元素, 则 $\|\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{X})\|$ 保持恒定直至数据不再属于被测元素而出现转折或拐点, 这样通过检测 $\|\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{X})\|$ 的恒定性及其范围而实现被测元素的识别与数据分割。

参考正交角 α_r 取决于映射矩阵 $\mathbf{E}$ 的构造。

2.1.3 根据特征恒定性的要求构造映射矩阵 映射矩阵 $\mathbf{E}$ 决定于所选用的参考向量 $\mathbf{X}^r$ 。为了了解各数据子集的特征向量 $\mathbf{X}$ 是否与 $\mathbf{X}^r$ 相同, 应该抑

制 $\mathbf{X}$ 中的噪声干扰, 以便于观察积向量模恒定性。所以, 针对 $\mathbf{X}^r$ 构造映射矩阵 $\mathbf{E}$ 使 $\alpha_r \rightarrow \pi$ 。以被测试序列的第 1 个特征向量 $\mathbf{X}_1$ 为参照, 若其他特征向量 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}_1$ 相同, 则式(5)中的积向量模能最大限度克服数据噪声与误差的影响而展现出相同性; 反之, 若 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}_1$ 不同, 由于积向量模鲁棒性好, 也能够最大限度克服数据噪声与错误的影响而展现出特征向量序列 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}_1$ 的差异, 利于判断测试元素的不成立。由式(5)可得

$$\begin{vmatrix} \cos \beta_{r,1} & \cos \beta_{r,2} & \cdots & \cos \beta_{r,n-1} \\ \cos \beta_{1,r} & \cos \beta_{1,1} & \cdots & \cos \beta_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \beta_{n-1,r} & \cos \beta_{n-1,1} & \cdots & \cos \beta_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha_r \begin{vmatrix} \cos \beta_{1,1} & \cdots & \cos \beta_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \cos \beta_{n-1,1} & \cdots & \cos \beta_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \quad (6)$$

式中: $\beta_{r,i}$ 为 $\mathbf{X}^r$ 与 $\mathbf{E}_i$ 的夹角; $\beta_{i,j}$ 为 $\mathbf{E}_i$ 与 $\mathbf{E}_j$ 的夹角。由于要求 $\alpha_r = \pi$, 可得 $\cos \beta_{\text{ref},i} = 0$, 即 $\mathbf{X}^r$ 对 $\mathbf{E}$ 的约束为

$$\mathbf{X}^r \mathbf{E}_i^T = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

2.1.4 根据准确定位分割点的要求构造映射矩阵

为了精确定位两个相邻元素的边界, 应该抑制测试数据段在 $\mathbf{X}_{n+1}$ 的噪声, 同时放大其相邻数据段在 $\mathbf{X}_{n+1}$ 的噪声, 使它们之间形成强烈反差, 以便于鉴别它们的分割点。假设相邻元素的参考特征向量为 $\mathbf{X}^N$, 则映射矩阵应该满足 $\alpha_N \rightarrow \pi/2$ 。 $\mathbf{X}^N$ 对 $\mathbf{E}$ 的约束为

$$\mathbf{X}^N \mathbf{E}_i^T = \cos \beta_{N,i} \|\mathbf{X}^N\| \|\mathbf{E}_i\|$$

由于要求在 $\mathbf{X}^N$ 附近放大噪声对 $\|\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{X})\|$ 的影响, 所以 $\cos \beta_{N,i} \rightarrow 1$ 。建立以 $\mathbf{E}$ 为变量的方程组

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}^r \mathbf{E}_i^T &= 0 \\ \mathbf{X}^N \mathbf{E}_i^T &= \cos \beta_{N,i} \|\mathbf{X}^N\| \|\mathbf{E}_i\| \\ i &= 1, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据式(6), 若要求 $\beta_{N,1} = \dots = \beta_{N,n-1}$, 则 $\cos \beta_{N,i} \approx 1/(n-1)^{0.5}$ 。

由此构造的映射矩阵满足了映射要求。

2.1.5 测试元素的特征向量 把数据子集序列转化为测试元素的特征序列是本方法的一个重要步骤。对于曲面, 常用法向量用作为特征向量^[16], 而对于简单一维元素, 则可用其主要参数做其特征向量。

(1) 圆弧特征: 用圆弧所在的圆半径 r 与圆心 (x_c, y_c) 作为圆弧元素的特征向量, 即 $\mathbf{X} = \{x_c, y_c,$

$r\}$, 其数据子集为 $(x_i, y_i), i=1, \dots, m_c$, 用式(1)将该数据子集转化为特征向量。

(2) Bezier 曲线特征: 数据子集 $\{P_i, P_j, P_k\}$ 可用参数化方法转化为 Bezier 曲线元素的特征向量, 但这样的特征向量没有独立性。用抛物线参数 $X_i = \{b_1, \dots, b_4\}$ 作为 Bezier 曲线特征, 其对应的数据子集为 $\{P_i, P_{i+s}, P_{i+2s}, P_{i+3s}\}$, 用式(2)进行数据子集到特征向量的转化, 则特征向量有独立性或局部性。

2.2 凸轮轮廓元素识别与数据分割实验

考虑到每个元素数据段的起始点实际上是未知的, 任取一点如 P_1 作为识别、分割扫描的起始点。通过观察特征向量的恒定性确定, 一个数据段是否属于测试元素, 如果属于则找出其终点。如此反复直至完成整个数据序列的扫描。

2.2.1 霍夫变换的圆弧数据识别分割 传统方法在数据点 P_i 处构造圆弧法线做为霍夫变换, 容易受噪声影响^[5]。因此, 改用弦 $P_i P_{i+s}$ 的平分线作为霍夫变换, 即把凸轮轮廓数据点 $P_i(x_i, y_i)$ 映射为

$$y - \frac{y_{i+s} + y_i}{2} = -\frac{x_{i+s} - x_i}{y_{i+s} - y_i} \left(x - \frac{x_{i+s} + x_i}{2} \right)$$

其中可取数据步长 $s \equiv$ 常数, $i=1, 2, \dots$; 也可取 $s=1, 2, \dots, i \equiv 1$ 。如果以各连续点的霍夫变换交点 O 作为其所在圆弧的圆心, 即若 P_i 辨识为一段圆弧的点, 则 $P_{i+1}, \dots, P_{i+s}$ 也都位于该圆弧上, 并可求出圆弧半径, 找到圆弧的最后一个点后, 即完成了该圆弧的数据分割。

这种圆弧数据分割精度受霍夫矩阵维数及所设的圆心与弦平分线距离容差影响比较大。经过反复尝试, 取霍夫矩阵维数 $5\ 400 \times 5\ 520$ 与 $s=3$, 得到弧 b 的圆心为 $(3.52, -4.17) \mu\text{m}$, 相应数据段下标为

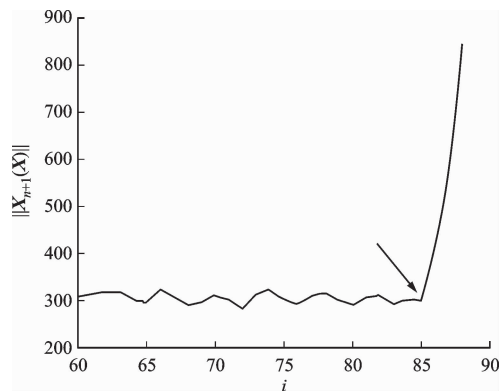
$$i \in [1, 116] \cup [179] \cup [245, 360]$$

多出了下标为 $i=116, 245, 179$ 的 3 个点。维数低容易误分, 降低容差则容易丢失一些点。

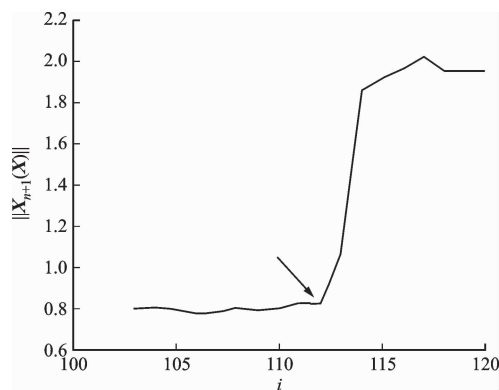
2.2.2 高维又积映射的数据分割 先以圆锥曲线为测试元素, 其数据子集为 $\{P_i, P_{i+s}, P_{i+2s}, P_{i+3s}, P_{i+4s}, P_{i+5s}\}$, 数据步长 $s=6$ 。对应的特征向量序列 $X_i = \{b_1, \dots, b_5\}$, 以 $X^r = X_1$ 设计映射矩阵, 用式(5)进行映射, 结果见图 3a。图中显示在下标 $i \in [1, 85]$ 范围内的圆锥曲线特征向量是恒定的, 从 $i=86$ 开始为其他特征向量。由于 X_{86} 对应的数据子集为 $\{P_{86}, P_{92}, P_{98}, P_{104}, P_{110}, P_{116}\}$, 可知 P_{116} 为下一个数据段的第 1 个点。所以下标 $i \in [1, 115]$ 的数据段为一段圆锥曲线。

以圆弧为测试元素, 其数据子集为 $\{P_i, P_{i+s},$

$P_{i+2s}, P_{i+3s}\}$, $s=1$, 对应的特征向量为 $X_i = \{x_c, y_c, r\}$ 。以 $X^r = X_1, X^N = X_{116}$ 设计映射矩阵, 再进行特征向量序列的映射, 见图 3b, 下标为 $i \in [1, 112]$ 范围的特征向量是恒定的; $i=113$ 处出现拐点, 而对应的数据子集为 $\{P_{113}, P_{114}, P_{115}, P_{116}\}$, 可知 P_{116} 属于下一元素的点。同样可得知, 下标 $i \in [1, 115]$ 范围内的数据段为一段圆弧。另外, 图 3a 中 $i=86$ 的拐点由特征向量的变化产生的, 其后的特征向量相对于参考向量变化较大, 缓慢过度则可能无法形成清晰的拐点; 图 3b 中虽然水平噪声相同, 但是两个参考向量的比例系数不同, 使 $i \leq 113$ 与 $i \geq 115$ 分别形成了两种噪声形态; 两个邻域之间过度区出现的阶跃是由两边特征向量的差异造成。因此, 噪声形态差异与特征向量差异均显示出数据分割点。



(a) 测试元素为圆锥曲线



(b) 测试元素为圆弧

图3 两种测试元素的映射局部放大图

Fig. 3 Detailed views of testing conic and arc

用相似方法实施整个数据序列的分割, 得到 4 个元素对应的分割点与它们实际值完全一致。

数据分割受很多因素影响, 其中包括数据中的噪声与误差。虽然增大数据子集或数据步长可在一定程度上减小噪声影响, 但会加大过渡区而不易精确定位分割点。此外, 数据子集转换为特征向量时,

不同元素的转换精度也不同。Bezier 曲线比圆弧的转换更易受噪声影响。

3 实物对象的元素识别与分割拟合

用坐标测量机等弧长采样^[4,17]图 4 中的凸轮轮廓,得 196 个点。与前面仿真不同的是,其轮廓的元素类型与数量均未知,可能包含圆弧、椭圆弧以及自由曲线等,其中后者可较好地逼近前二者^[18]。以 C^1 连续为约束,分割拟合为二阶 Bezier 曲线序列,并用拟合误差平方和 $\sum e_y^2 = \sum [y(t_i) - \hat{y}(t_i)]^2$ 作拟合优度。



图 4 凸轮原型

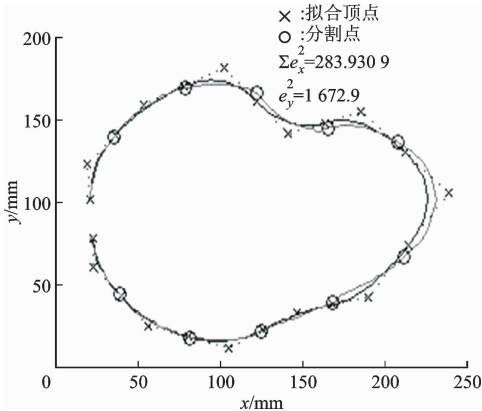
Fig. 4 A physical cam for the verification

图 5 为两种传统数据分割的拟合效果,图 5a 为近似按平均点数分割点集为 11 段,而图 5b 采用主观识别的点云分割。图 5a 中,由于采用弧长均匀采样,曲率大的曲线段偏差较大。图 5b 中,部分节点与分割点不重合,说明分割不合理。这两种拟合效果均不理想。

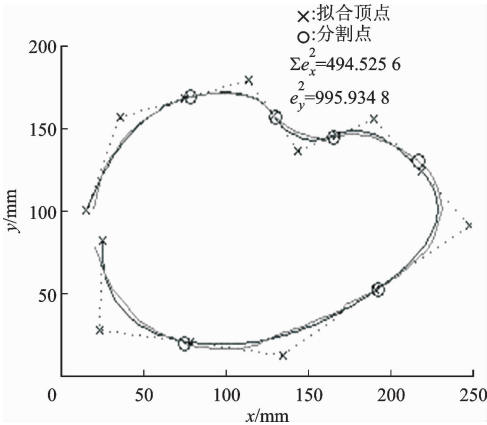
在图 6a~6c 中,取数据子集 $\{P_i, P_j, P_k\}$ 并用 CCL 参数化法^[19]获得 Bezier 曲线控制点特征

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} 1/L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i^2 \\ L_j^2 \\ L_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_j \\ \mathbf{P}_k \end{Bmatrix}$$

式中: $L_k = \sum \| \mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1} \|$, $j = 1, \dots, k$, 即 P_k 对应参数 $t_k \approx L_k/L$, L 为所在曲线的累计弦长。利用式(5)



(a) 均匀分割



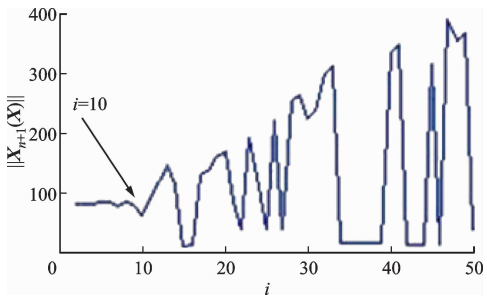
(b) 主观分割

图 5 两种传统分割的 Bezier 曲线拟合效果

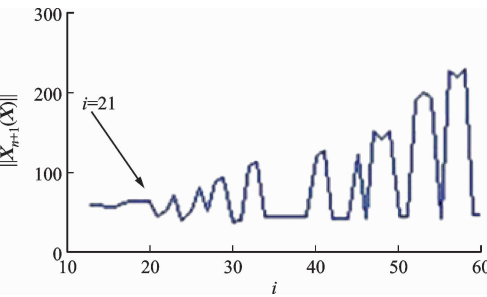
Fig. 5 Two Bezier fittings with traditional segmentations

映射为积向量模,辨识得到测量序列的前 3 个分割点。如此逐段辨识其他各分割点,得其下标构成的向量

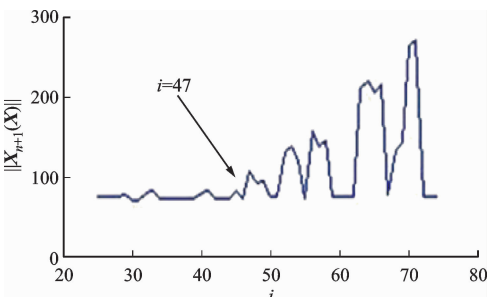
$$i = \{13, 24, 50, 83, 98, 109, 129, 146, 173\}$$



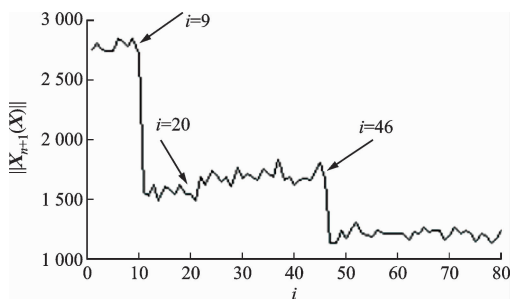
(a) 从 $i=1$ 开始 CCL 识别



(b) 从 $i=13$ 开始 CCL 识别



(c) 从 $i=24$ 开始 CCL 识别



(d) 从 $i=1$ 开始抛物线识别(局部)

图6 用二阶 Bezier 曲线特征识别测量序列

Fig. 6 Testing the cam contour with second order Bezier curve

总共 9 个分割点把数据序列分成 10 段 Bezier 曲线。图 6d 取数据子集 $\{P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}\}$, 用式(2)计算抛物线特征向量 $X_i = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, 图中分割点基本与 CCL 法一致, 但只需一次映射即可显示所有拐点和分割点。若只用一个数据段(例如第 1 段或第 2 段)的参照特征设计映射矩阵 E , 可以获得较清晰的积向量模拐点, 而其他段的拐点则可能不够清晰, 而且抛物线的特征鲁棒性比 CCL 及圆弧等的差。图 7 显示了识别分割的拟合效果, 其中两个坐标的误差平方和均小于前 2 种分割拟合。

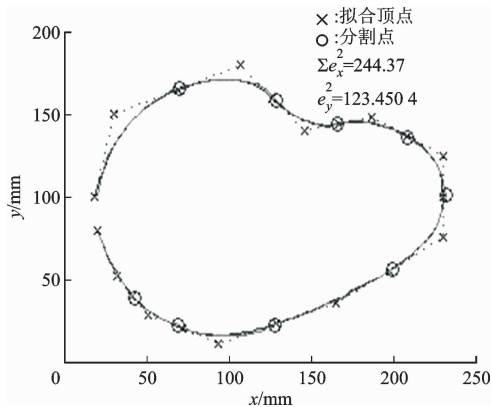


图7 辨识分割的 Bezier 拟合

Fig. 7 The Bezier fittings after recognizing segmentation

4 结 论

(1) 对拟合不确定度影响最大的因素是拟合元素选择的正确与否以及相应数据分割准确程度。拟合算法与数据噪声等因素也影响拟合精度, 但远不及前二者。

(2) 由数据噪声等因素产生的拟合误差分布为正态形状; 错用元素的拟合准确性降低而分割误差则会使拟合误差分布呈现多峰、栏栅效应等复杂形态, 不确定度大大增加。

(3) 基于 GPC 鲁棒性, 将任意维特征向量映射到标量并观察其恒定性及范围, 可有效识别元素类型与其边界, 从而降低了拟合不确定度。

(4) 与仿真不同, 实际零件元素及其数量未知, 其 GPC 映射除了会受测量精度、噪声, 还受拟合算法的鲁棒性、数据子集步长等因素影响。多种测试元素的映射均有恒定性时, 可取恒定性范围最大的作为识别结果。除了圆弧等简单元素, 二阶 Bezier 曲线拟合具有通用性, 可获得较好效果。

(5) Bezier 的 CCL 法特征无局部性, 其积向量模拐点也可能比较模糊, 需逐段辨识各分割点; 抛物线特征具有局部性, 可以一次识别多个分割点, 利于降低拟合不确定度。

参考文献:

- [1] 唐浩, 邓朝晖, 万林林, 等. 基于交替隔点插值的凸轮升程拟合方法在磨削加工中的应用 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(23): 191-199.
TANG Hao, DENG Zhaohui, WAN Linlin, et al. Application of cam lift fitting method based on alternative-point interpolation in grinding process [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(23): 191-199.
- [2] FORBES A B. Parameter estimation based on least squares methods [M]// Data Modeling for Metrology and Testing in Measurement Science. Boston, USA: Birkhäuser Boston, 2009: 1-30.
- [3] YU Jianwu, LUO Hong, HU Junzhi, et al. Reconstruction of high-speed cam curve based on high-order differential interpolation and shape adjustment [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 356: 272-281.
- [4] LU Lizheng, ZHAO Shiqing. High-quality point sampling for B-spline fitting of parametric curves with feature recognition [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 345: 286-294.
- [5] PEI S C, HORNG J H. Circular arc detection based on Hough transform [J]. Pattern Recognition Letters, 1995, 16(6): 615-625.
- [6] 贺文骅, 刘志镜, 屈鉴铭. 利用全局约束霍夫模型的目标跟踪算法 [J]. 西安交通大学学报, 2014, 48(12): 69-73.
HE Wenhua, LIU Zhijing, QU Jianming. A visual tracking method based on global constrained Hough model [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(12): 69-73.
- [7] ROTH G, LEVINE M D. Geometric primitive extrac-

- tion using a genetic algorithm [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(9): 901-905.
- [8] 胥光申, 高晓丁, 许卫星. 摆动平底从动件凸轮廓线曲率半径计算的新方法 [J]. 机械科学与技术, 2002, 21(2): 204-206.
- XU Guangshen, GAO Xiaoding, XU Weixing. A new method for computing the radius of curvature of a cam profile with oscillating flat-faced follower [J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21(2): 204-206.
- [9] TIRANDAZ H, NASRABADI A, HADDADNIA J. Curve matching and character recognition by using B-spline curves [J]. International Journal of Engineering and Technology, 2011, 3(2): 183-186.
- [10] GÁLVEZ A, IGLESIAS A. Memetic improved cuckoo search algorithm for automatic B-spline border approximation of cutaneous melanoma from macroscopic medical images [J]. Advanced Engineering Informatics, 2020, 43: 101005.
- [11] LIU Feng, ZHANG D, SHEN Linlin. Study on novel curvature features for 3D fingerprint recognition [J]. Neurocomputing, 2015, 168: 599-608.
- [12] 国家质量监督检验检疫总局. 测量不确定度评定与表示: JJF1059.1—2012 [S]. 北京: 中国质检出版社, 2013.
- [13] 国家质量监督检验检疫总局. 用蒙特卡洛法评定测量不确定度: JJF1059.2—2012 [S]. 北京: 中国质检出版社, 2013.
- [14] ALEXANDRU M B. Fitting data using optimal Hermite type cubic interpolating splines [J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25: 2047-2051.
- [15] WEI Jinwen. The dimensionality reduction of feature vectors by generalized cross product [C]// 2008 International Symposium on Computer Science and Computational Technology. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2008: 281-284.
- [16] 傅欢, 梁力, 王飞, 等. 采用局部凸性和八叉树的点云分割算法 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(10): 60-65.
- FU Huan, LIANG Li, WANG Fei, et al. A point cloud segmentation algorithm using local convexity and octree [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(10): 60-65.
- [17] 韦进文. 坐标测量机动力学刚度估计与加速度误差补偿 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(1): 47-51.
- WEI Jinwen. Estimating dynamic stiffness of coordinate measuring machine for compensation of acceleration error [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(1): 47-51.
- [18] BLIDIA A, MOURRAIN B. Geometrically smooth spline bases for data fitting and simulation [J]. Computer Aided Geometric Design, 2020, 78: 101814.
- [19] 刘鼎元, 胡康生. Bézier 曲面拟合 [J]. 应用数学学报, 1984, 7(2): 250-256.
- LIU Dingyuan, HU Kangsheng. Fitting of Bézier surfaces [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1984, 7(2): 250-256.

(编辑 杜秀杰)