

雅可比旋量的装配体并联结构公差分析方法研究

戴宏玮，陈琨，于慧，杜欣霏，高建民，高智勇
(西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室，710049，西安)

摘要：针对使用雅可比旋量模型进行公差分析时，装配体局部并联结构累积公差难以计算的问题，提出了一种考虑配合表面接触状态的分步计算方法。该方法构建了局部并联结构的功能要求形成连接图，对装配结果的形成过程进行了描述，进一步建立了零部件的雅可比旋量模型，计算了配合表面在零部件坐标系下的变动旋量。设计了配合平面空间位置关系检测算法，保证了配合平面间正确的物理接触；使用差分进化算法，以正确装配后被装配零部件重心最低为优化目标，计算了局部并联结构的公差累积结果。在充分利用设计信息的基础上，完成了含局部并联链的装配连接关系图向单一串联链的转化。以汽轮机通流间隙的建模和计算为例，验证所提方法的可行性。结果表明：所提方法对相关公差和配合信息进行了合理的平衡，能够显著提高模型的精确性和可靠性。
关键词：雅可比旋量模型；装配体局部并联结构；空间面片相交检测算法；差分进化算法；汽轮机通流间隙

中图分类号：TH124 文献标志码：A
DOI: 10.7652/xjtuxb202205016 文章编号：0253-987X(2022)05-0156-10



Tolerance Analysis of Partial Parallel Assemblies Based on
Jacobian-Torsor Model

DAI Hongwei, CHEN Kun, YU Hui, DU Xinfei, GAO Jianmin, GAO Zhiyong
(State Key Laboratory of Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In tolerance analysis of partial parallel assemblies based on the Jacobian-Torsor model, it is difficult to calculate their cumulative tolerance. To solve this problem, a calculation method of fractional steps is proposed in this paper. This method is used to establish functional requirements for these assemblies to produce connection diagrams, describe the process of generating the assembling results, create the Jacobian-Torsor model of parts and components, and calculate variable spinor of the mating surface in the coordinate system of the parts and components. Moreover, a detection algorithm for the spatial relationship of the mating surface is designed, correct physical contact of mating planes is ensured. To attain the optimization goal of the gravity center of assembled parts or components being the lowest, the differential evolution algorithm is used to calculate the cumulative tolerance of partial parallel assemblies design information is fully based to transform from a partial parallel chain to a single series chain in connection diagram. The feasibility of the proposed method is verified through modeling and calculation of steam turbine flow gap. The results show that the proposed method can balance the tolerance and fit information and significantly improve model accuracy and reliability.

Keywords: unified Jacobian-Torsor model; partial parallel assemblies; intersection test algorithm for spatial facets; differential evolution algorithm; stream turbine flow gap

随着机械产品向复杂化、精密化等方向发展,服役环境越来越恶化和极限化,装配精度要求越来越高、装调难度越来越大,产品整机装配性能也越来越难保证^[1]。使用装配体公差分析技术,对产品重要装配尺寸进行计算和仿真,对于保证和提高产品的装配成功率以及装配精度有着重要的意义^[2]。作为一种三维公差分析模型,雅可比旋量模型^[3-4]在三维空间中表示和传播公差,一方面可以体现装配体空间结构在公差传播过程中的几何杠杆作用,另一方面可以全面考虑尺寸公差、形位公差,以及尺寸公差和形位公差之间的耦合结果。在计算方面,雅可比旋量模型有着简洁的数学表达式和相对成熟的算法,非常适合由多个零件构成、含有大量公差信息的复杂装配体^[5],但传统的雅可比旋量模型不能很好地实现对装配体局部并联结构的计算。

对于装配体局部并联结构,传统的建模方法只取其局部并联链中的一条支链用于建立雅可比旋量模型,丢失了一部分公差和配合信息,降低了计算结果的精度和可靠性。Chen 等^[6]给出了一种雅可比旋量模型中局部并联结构的公差分析方法,通过对旋量参数的组合运算,完成了对由圆柱面接触副与平面接触副构成的局部并联结构的公差建模。统计结果显示该方法显著提高了模型的精度。Zeng 等^[7]对常见的局部并联结构进行了分类,针对具有几何结构杠杆效应的局部并联结构,提出了基于 CICL 和分析线法的分析计算方法,但是该方法得到的是极值形式的结果,不适用于统计分析。Jin 等^[8]使用雅可比矩阵进行了航空发动机转子的偏差分析,针对由确定性偏差引起的局部并联链的问题,使用精密测量仪器确定了接触点的偏差,结合定位基准的主次关系,建立了偏差传递函数并计算获得了最终的累积偏差。Liu 等^[9]使用相对定位法结合二次规划算法实现了装配体串、并联链的统一计算,该方法基于肤面模型的点云数据,根据内部尺寸约束、外部配合约束,计算当前特征的变动旋量,然后使用雅可比矩阵进行了变动旋量的累积计算。

上述工作中,有的只针对不受几何结构影响的一类局部并联结构;有的只能得到并联结果的边界值,无法进行统计分析;有的需要通过相关测量来获得配合表面的接触点信息,适用场景有限。肤面模型与雅可比矩阵相结合的建模和计算方法则需要

建立装配体各个零件的三维模型用于提取网格数据,计算流程也相对复杂^[10]。本文针对由平面接触副构成的受几何结构影响的装配体局部并联结构,建立了零部件的雅可比旋量模型,将空间面片相交检测算法和差分进化算法相结合,提出了一种可以进行统计分析的装配体局部并联结构建模和累积公差计算方案。以汽轮机某级隔板通流间隙为例,介绍了所提方法的计算过程,验证了方法的可行性。

1 局部并联结构的雅可比旋量模型

1.1 雅可比旋量模型

雅可比旋量模型将装配体中零件上的点、线、面统称为功能要素(F_E),来自同一零件的具有尺寸或公差关系的两个功能要素构成内部副(I_{F_E}),来自不同零件的具有直接或者潜在接触关系的两功能要素构成接触副(C_{F_E})。装配体中两个来自不同零件的功能要素需要满足的条件称为功能要求(F_R)。本文中,具有两种含义,一是根据设计要求两功能要素需要满足的位置关系,二是功能要素相对全局坐标系的累积变动旋量。

雅可比旋量模型由雅可比矩阵和旋量模型构成。旋量模型由沿 X 、 Y 、 Z 轴的平动矢量 u 、 v 、 w , 以及绕 X 、 Y 、 Z 轴的转动矢量 α 、 β 、 γ 组成,用于表示具有理想几何形状的实际特征在公差域内相对于名义特征的变动。单个雅可比矩阵是根据当前功能要素与功能要求之间的空间关系建立的 6×6 矩阵,用于实现功能要素的变动旋量到功能要求的传递和累积^[11]。在装配体中建立全局坐标系 $\{0\}$,并在各个功能要素上建立局部坐标系,将单个功能要素 i 的变动映射为目标功能要素 n 的变动的雅可比矩阵如下

$$J_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^i & \mathbf{M} & \mathbf{W}_i^n \times \mathbf{R}_0^i \\ L & L & M & L & L & L \\ 0 & \mathbf{M} & \mathbf{R}_0^i \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, J_i 为功能要素 i 到目标要素 n 的雅可比矩阵; $\mathbf{R}_0^i$ 为 $\{i\}$ 到 $\{0\}$ 的 3×3 坐标变换矩阵,由坐标系 $\{i\}$ 3 个坐标轴方向的单位矢量在坐标系 $\{0\}$ 中的投影构成; $\mathbf{W}_i^n$ 为与向量相关的斜对称矩阵,计算式为

$$\mathbf{W}_i^n = \begin{bmatrix} 0 & dz_i^n & -dy_i^n \\ -dz_i^n & 0 & dx_i^n \\ dy_i^n & -dx_i^n & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $[dx_i^n \ dy_i^n \ dz_i^n]^T$ 为全局坐标系 $\{0\}$ 下坐标系 $\{i\}$ 原点 to 坐标系 $\{n\}$ 原点的矢量; $dx_i^n = dx_n - dx_i$, $dy_i^n = dy_n - dy_i$, $dz_i^n = dz_n - dz_i$; $[dx_i \ dy_i \ dz_i]^T$ 、 $[dx_n \ dy_n \ dz_n]^T$ 为坐标系 $\{i\}$ 、 $\{n\}$ 的坐标原点在全局坐标系 $\{0\}$ 下的位置矢量。

当 $\{i\}$ 的方向与公差分析的方向不一致时,如功能要素 i 为一倾斜平面时,前述雅可比矩阵需要进行修改,如下式所示

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^i \times \mathbf{R}_{PTi} & M & \mathbf{W}_i^n \times (\mathbf{R}_0^i \times \mathbf{R}_{PTi}) \\ L & L & M & L & L & L \\ \mathbf{O}_3 & M & \mathbf{R}_0^i \times \mathbf{R}_{PTi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{R}_{PTi}$ 为投影矩阵,由公差分析方向的单位矢量在坐标系 $\{i\}$ 中的投影构成。

公差及配合引入的变动旋量沿装配连接关系图中的箭头方向进行累积。沿装配连接关系图,将相关功能要素的雅可比矩阵以及旋量值分别按序叠加,两叠加矩阵相乘即为装配体雅可比旋量模型的表达式如下

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{F_R} = [\mathbf{J}_{F_{E_1}} \ \cdots \ \mathbf{J}_{F_{E_n}}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{F_{E_1}} \cdots \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{F_{E_n}}^T \quad (4)$$

式中: $\mathbf{F}_R$ 为功能要求的累积变动旋量; $\mathbf{J}$ 为对应功能要素的雅可比矩阵; n 为装配连接关系图中相关功能要素的个数。

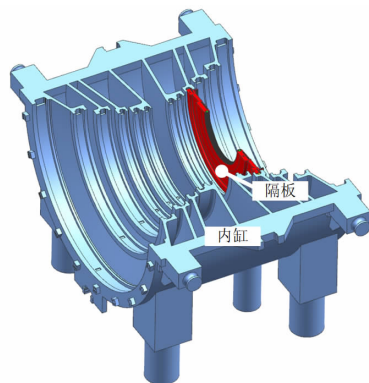
在旋量模型方面,Desrochers^[12]给出了所有标准公差域的清单,以及相应的旋量形式和几何约束;Zhang等^[13]将加载时工作零件的变形量化为旋量修正量,对实际工况下的旋量模型进行了扩充与修正;陈华^[14]对组合公差下旋量分量之间的约束关系进行了梳理,并给出了改进后的雅可比旋量模型。在计算方案方面,Desrochers等^[4]将雅可比旋量模型与区间算法相结合,使用各旋量的变动区间替换上述功能要素的旋量值进行了基于公差域的计算,计算结果是功能要求的上下边界值;Ghie等^[15]提出了雅可比旋量模型的统计计算方法,根据公差或者配合间隙的分布情况,使用蒙特卡罗仿真生成旋量数据并带入模型进行计算,得到了功能要求的数值分布情况。

1.2 装配体局部并联结构

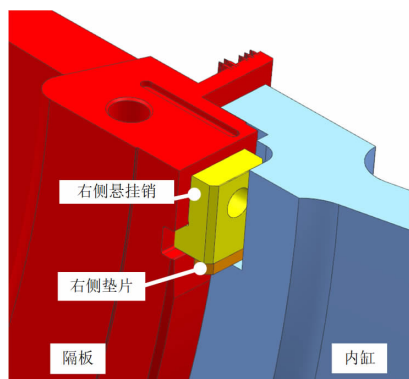
使用雅可比旋量模型的第一步是识别相关功能要素,并绘制描述功能要求形成过程的装配连接关系图。若闭合的装配连接关系图含有一些闭合的支链,将这些闭合的支链称为局部并联链。

局部并联链对应于装配体中的局部并联结构,局部并联结构通常由两对或多对接触副构成^[16]。在装配体局部并联结构中,被装配零部件的装配结果是在多对接触副接触后形成的,由多对接触副中各功能要素的相对位姿变动所共同决定。在式(1)中,总的雅可比矩阵是沿装配连接关系图,所有相关功能要素的单个雅可比变换矩阵的顺次叠加,对于含有支链的装配连接关系图则难以直接处理,因而传统的雅可比旋量模型难以进行装配体中的并联结构的计算。

在汽轮机产品中,隔板-内缸的装配构成局部并联结构^[17]。半缸状态下某级隔板-内缸装配如图1(a)所示,隔板通过左、右两侧的悬挂销和垫片安装到内缸上,图1(b)为隔板-内缸右侧配合结构的示意图。安装在隔板上的两侧垫片下表面与两侧内缸



(a) 隔板-内缸装配三维图



(b) 隔板-内缸装配结构

图1 隔板-内缸装配示意图

Fig. 1 Clapboard-inner cylinder assembly diagram

注窝表面分别接触,共同完成隔板在竖直方向的定位。在建立公差分析模型时,传统方案只考虑单侧隔板-内缸配合结构中的公差和配合信息(如:内缸-左侧垫片-左侧悬挂销-隔板),忽略另一侧,结果可信度低,因此需要设计一种能够考虑完整公差信息的建模方案。

对隔板-内缸装配的局部并联结构进行简化,将隔板、两侧悬挂销、两侧垫片视为一体,图 1 中的局部并联结构可以使用图 2 进行描述:被装配零件 2 在重力作用下,通过两侧的平面接触副安装到零件 1 上,实现竖直方向的定位。图中零件左右两侧的尺寸及公差分别相等。在各功能要素的几何中心建立局部坐标系,各局部坐标系的方向一致。

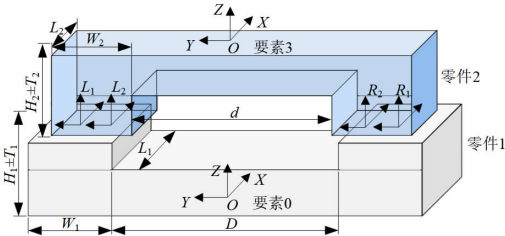


图 2 两平面接触副构成的局部并联结构

Fig.2 Local parallel structure composed of two plane contact pairs

1.3 P_{FR} 形成连接图

图 2 所示结构的局部并联链如图 3(a)所示,其中箭头方向表示公差和配合变动的传递方向,该方向与装配体的装配连接关系图的方向一致。

为了方便分析和计算,将沿装配连接关系图的局部并联链第一个节点称为并联起始节点,最后一个节点称为并联终止节点。图中局部并联链的并联起始节点为功能要素 0,并联终止节点为功能要素 3。定义局部并联结构的功能要求 P_{FR} ,其含义为局部并联结构的并联终止节点相对于并联起始节点的累积变动旋量。基于 P_{FR} 的形成过程,建立局部并联结构的 P_{FR} 形成连接图,如图 3(b)所示。

P_{FR} 形成连接图中,并联起始节点和并联终止

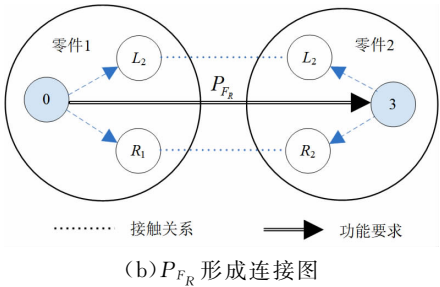
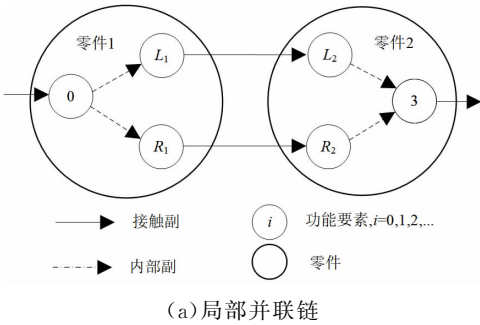


图 3 装配体局部并联结构的并联链与 P_{FR} 形成连接图

Fig.3 Parallel chain with partial parallel structure of assembly and form a connection diagram with P_{FR}

节点分别位于两相邻的零件或零部件中,箭头分别从并联起始节点和并联终止节点指向所在零部件的配合表面,描述了装配之前,各自零部件中配合表面变动旋量的累积过程。装配时,对应配合表面分别接触,使用虚线对配合表面之间的接触关系进行表示;装配完成后,被装配零部件的空间位姿被确定, P_{FR} 最终形成。 P_{FR} 形成连接图具有下述特点。

(1)在零部件内部, P_{FR} 形成连接图中箭头的方向,与零部件加工及装配顺序相一致。图 2 中,零件 2 的平面 L_2 和 R_2 加工时均以平面 3 为基准。与局部并联链相比, P_{FR} 形成连接图正确描述了配合表面变动旋量在零部件内部的累积路径。

(2)反映了 P_{FR} 的形成过程和影响因素。首先零部件内部公差和配合的累积,形成了零部件坐标系下配合表面的变动,然后两零部件对应配合表面相接触最终确定了被装配零部件的空间位姿以及 P_{FR} 。装配的结果由配合表面在各自零部件内的累积变动旋量以及相关配合设计(包括配合表面的几何形状与尺寸、配合表面的空间位置、配合表面的数量等)共同决定。

借助 P_{FR} 形成连接图求解局部并联结构的 P_{FR} ,使用 P_{FR} 替代装配连接关系图中的局部并联链,可以在不丢失公差、配合信息的前提下,将装配连接关系图化为串联链,进而完成建模和分析。

1.4 零部件的雅可比旋量模型

根据 P_{FR} 形成连接图,对装配体局部并联结构分两步计算。首先计算配合表面在各自零部件中的变动旋量,然后基于配合面的变动旋量与相关配合设计,计算被装配零部件的位姿变动以及 P_{FR} 。

分别以图 2 中功能要素 0 和功能要素 3 的局部坐标系作为零件 1 和零件 2 的零部件坐标系,建立零部件的雅可比旋量模型,计算配合表面在各自零部件内的变动旋量

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{R_{L_2}} = \mathbf{J}_{3 \rightarrow L_2} \times \mathbf{F}_{E_{3 \rightarrow L_2}} \\ \mathbf{F}'_{R_{R_2}} = \mathbf{J}_{3 \rightarrow R_2} \times \mathbf{F}_{E_{3 \rightarrow R_2}} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{R_{L_1}} = \mathbf{J}_{0 \rightarrow L_1} \times \mathbf{F}_{E_{0 \rightarrow L_1}} \\ \mathbf{F}'_{R_{R_1}} = \mathbf{J}_{0 \rightarrow R_1} \times \mathbf{F}_{E_{0 \rightarrow R_1}} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{F}'_{R_{L_2}}$ 为功能要素 L_2 在零件 2 中的累积变动旋量; $\mathbf{J}_{3 \rightarrow L_2}$ 为从功能要素 3 到功能要素 L_2 传递路径的总体雅可比矩阵; $\mathbf{F}_{E_{3 \rightarrow L_2}}$ 为从功能要素 3 到功能要素 L_2 的传递路径中相关功能要素的总体旋量向量。

本例中, 3 到 L_2 的传递路径中只有两个功能要素, 但实际零部件相应路径中可能有多个功能要素, 要将对应的 6×6 雅可比矩阵以及旋量分别按序叠加到 $\mathbf{J}_{3 \rightarrow L_2}$ 和 $\mathbf{F}_{E_{3 \rightarrow L_2}}$ 中。由于在装配过程作为基准的零件 1 不发生变动, 其配合表面变动旋量计算结果与在装配体全局坐标系下的旋量一致, 所以在式 (6) 中功能要求值没有加上标。式 (5) 和式 (6) 中其余变量的含义与上述一致。

零部件的雅可比旋量模型用于计算当被装配零部件位于名义位置时, 各配合表面的变动旋量。在装配过程中, 各对配合表面相接触, 被装配零部件将偏离名义位置。各配合表面的最终变动旋量是其在零部件中累积变动旋量与零部件坐标系变动旋量的叠加。

当零件 2 的整体变动为 P_{F_R} 时, 平面 L_2 和 R_2 的最终变动旋量计算如下

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{R_{L_2}} = \mathbf{F}_{R_{L_2}} + \mathbf{J}_{3/2L} \mathbf{F}_{R_3} \\ \mathbf{F}'_{R_{R_2}} = \mathbf{F}_{R_{R_2}} + \mathbf{J}_{3/2R} \mathbf{F}_{R_3} \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{J}_{3/2L}$ 为将功能要素 3 的变动传递到功能要素 L_2 的单个 6×6 雅可比矩阵; $\mathbf{J}_{3/2R}$ 的含义相同。

2 基于差分进化算法的局部并联结构公差分析

2.1 适应度函数与约束条件

基于建立的零部件的雅可比旋量模型, 使用含有 F_{R_3} 的表达式描述配合表面的空间位姿。根据各对配合表面需要满足的接触状态, 可将装配体局部并联结构的计算转化为约束优化问题, 考虑使用智能优化算法求解 P_{F_R} 。由于变动旋量描述的是功能要素在公差域内的微小变动, 要求算法具有较高的精度。差分进化算法是一种模拟自然界生物进化的群智能随机优化算法, 通过基于差分形式的变异操作和基于概率选择的交叉操作引导种群进化。差分进化算法的原理简单, 参数少, 鲁棒性好且收敛速度快, 已被证实为一种高效的全局启发式进化算法^[18-19]。

使用差分进化算法对装配后零件 2 的整体变动 $\mathbf{F}_{R_3} = [u_3 \ v_3 \ w_3 \ \alpha_3 \ \beta_3 \ \gamma_3]^T$ 进行求解。以被装配零件 2 的位姿变动为优化变量, 优化目标是零件 2 重心最低; 根据两对配合表面的接触状态, F_{R_3} 需要满足约束条件: 叠加该变动旋量后平面 L_2 、 R_2 在 L_1 、 R_1 上方, 且与 L_1 、 R_1 不相交。适应度函数和约束关系表示如下

$$F = w_3 \quad (8)$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \text{quad}(A_{L_2}, B_{L_2}, C_{L_2}, D_{L_2}) > \\ \text{quad}(A_{L_1}, B_{L_1}, C_{L_1}, D_{L_1}) > \\ \text{quad}(A_{R_2}, B_{R_2}, C_{R_2}, D_{R_2}) > \\ \text{quad}(A_{R_1}, B_{R_1}, C_{R_1}, D_{R_1}) > \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\text{quad}(A, B, C, D)$ 表示变动后的配合平面, 它是以 A, B, C, D 为顶点的空间四边形面片, 大于号表示前一面片位于后者的上方且与后者不发生相交或重合。

下面对配合平面顶点坐标进行计算, 图 4 为平面特征的公差域示意图。在 $\{L_2\}$ 中从 XY 平面第四象限开始, 将平面特征 L_2 的 4 个顶点沿逆时针方向依次设为 A_{L_2} 、 B_{L_2} 、 C_{L_2} 、 D_{L_2} 。

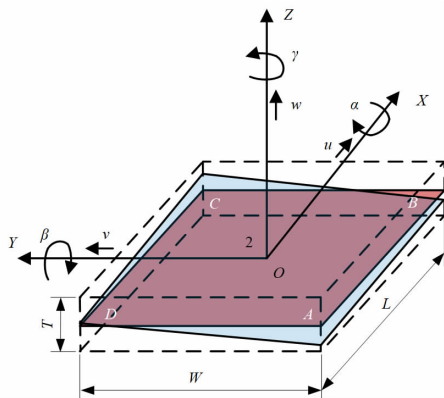


图 4 平面特征的公差域示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the tolerance zone of a plane feature

由式 (7) 计算得到 $\mathbf{F}'_{R_{L_2}} = [u_{L_2} \ v_{L_2} \ w_{L_2} \ \alpha_{L_2} \ \beta_{L_2} \ \gamma_{L_2}]^T$, 已知 $(x_{L_2}, y_{L_2}, z_{L_2})$ 为局部坐标系 $\{L_2\}$ 在装配体全局坐标系中的坐标, 则平面特征 L_2 的顶点在全局坐标系下的最终坐标为

$$A_{L_2}: \begin{bmatrix} x_{L_2} \\ y_{L_2} \\ z_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{L_2} \\ v_{L_2} \\ w_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_{L_2} \\ 0 & 1 & -\alpha_{L_2} \\ -\beta_{L_2} & \alpha_{L_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ -\frac{W}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$B_{L_2} : \begin{bmatrix} x_{L_2} \\ y_{L_2} \\ z_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{L_2} \\ v_{L_2} \\ w_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_{L_2} \\ 0 & 1 & -\alpha_{L_2} \\ -\beta_{L_2} & \alpha_{L_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ -\frac{W}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10b)$$

$$C_{L_2} : \begin{bmatrix} x_{L_2} \\ y_{L_2} \\ z_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{L_2} \\ v_{L_2} \\ w_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_{L_2} \\ 0 & 1 & -\alpha_{L_2} \\ -\beta_{L_2} & \alpha_{L_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{W}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10c)$$

$$D_{L_2} : \begin{bmatrix} x_{L_2} \\ y_{L_2} \\ z_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{L_2} \\ v_{L_2} \\ w_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_{L_2} \\ 0 & 1 & -\alpha_{L_2} \\ -\beta_{L_2} & \alpha_{L_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ \frac{W}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10d)$$

平面特征 L_1 、 R_2 、 R_1 的顶点坐标计算方法与式 (10) 相一致。通过计算配合平面的顶点最终坐标, 确定了两配合平面的空间位置和姿态。下一步需要基于配合平面的空间位姿, 对种群个体进行约束和筛选。

2.2 配合平面位置关系检测算法

设计配合平面的位置关系检测算法, 根据两配合平面的顶点坐标, 检测以 Z 轴方向为法向的两配合平面是否发生相交以及前者穿透并落入后者下方的情况, 进而判断两平面是否正确配合。

Devillers & Guigue 算法 (简称 Devillers 算法)^[20] 是一种综合性能较优的空间三角形相交检测算法, 它通过三角形各顶点构成行列式的正负, 来判断三角形中点、线、面之间的相对位置关系, 判断空间中的两三角形是否相交^[21]。已知空间中的 4 点 $a = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ 、 $b = [b_x \ b_y \ b_z]^T$ 、 $c = [c_x \ c_y \ c_z]^T$ 、 $d = [d_x \ d_y \ d_z]^T$, 定义行列式如下

$$[a, b, c, d] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix} = (a - d) \cdot [(b - d) \times (c - d)] \quad (11)$$

设三角形 T_1 的顶点为 p_1 、 q_1 、 r_1 , 三角形 T_2 的顶点为 p_2 、 q_2 、 r_2 , 若式 (12) 成立, 则两三角形相交

$$[p_1, q_1, p_2, q_2] \leq 0 \cap [p_1, r_1, r_2, p_2] \leq 0 \quad (12)$$

由于相交检测算法只能用于判断配合平面是否相交, 需要对 L_2 、 R_2 完全位于 L_1 、 R_1 下方的情况进行

行额外的检测和剔除。以 L_2 与 L_1 的检测为例: 如果 L_2 的某顶点 P 位于 L_1 所在平面 $\pi(L_1)$ 下方, 则将点 P 沿 Z 轴方向投影到平面 $\pi(L_1)$ 中。若该投影点落入四边形 $\text{quad}(A_{L_1}, B_{L_1}, C_{L_1}, D_{L_1})$ 中, 说明该点穿透四边形并落入 L_1 下方。该检测过程使用直线与三角形的相交测试来实现^[22]。

当 Devillers 算法检测结果显示 L_2 与 L_1 不相交时, 需要通过进一步检测 L_2 中是否存在满足上述条件的顶点, 判断 L_2 是否穿透并落入 L_1 下方。配合平面位置关系检测流程如下图 5 所示。按上下顺序向程序中输入两配合平面的顶点坐标, 当两平面相交或前一平面穿透并落入后一平面下方时, 程序输出 False, 否则输出 True。

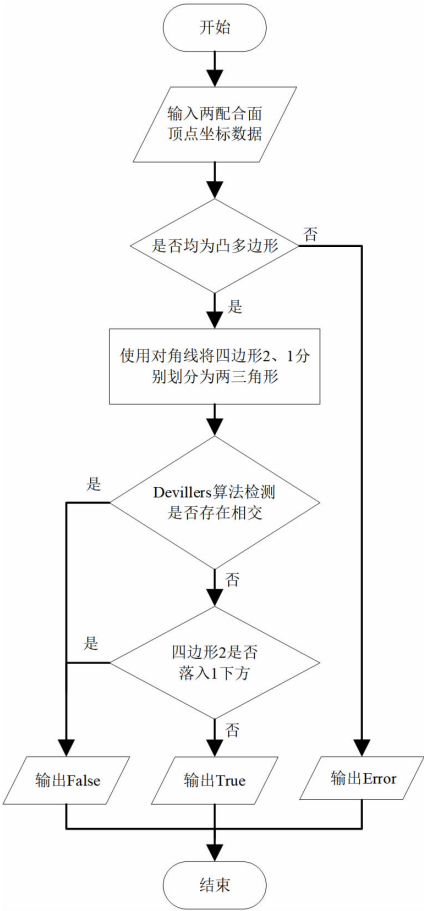


图 5 配合平面位置关系检测流程图
Fig. 5 Matching plane position relationship detection flow chart

将 L_2 、 L_1 与 R_2 、 R_1 的顶点坐标分别带入配合平面位置关系检测算法中, 如果两组配合平面均满足相应位置关系 (返回 False), 则该个体满足约束; 否则, 将该个体从种群中删除。

2.3 基于仿真数据的边界值设定

差分进化算法基于蒙特卡罗仿真数据进行。首先,根据各个功能要素的旋量模型,生成功能要素的旋量仿真数据;然后,根据式(5)和式(6)计算中各个配合表面在零部件中的变动旋量。使用差分进化算法计算每组旋量数据下,满足配合表面位置关系的最优 F_{R_3} ,最后对求得的所有结果进行统计分析。

对差分进化算法中 F_{R_3} 的边界值采用统一的设定,其大小与仿真计算得到的配合面的变动旋量 $F'_{R_{L2}}$ 、 $F'_{R_{R2}}$ 、 $F'_{R_{L1}}$ 、 $F'_{R_{R2}}$ 以及相关配合设计有关。这里对边界值进行粗略设定,其中

$$\begin{cases} w_{3,\max} = \max\{w_{L_1,\max}, w_{R_1,\max}\} - \min\{w'_{L_2,\min}, w'_{R_2,\min}\} \\ w_{3,\min} = \min\{w_{L_1,\min}, w_{R_1,\min}\} - \max\{w'_{L_2,\max}, w'_{R_2,\max}\} \end{cases} \quad (13)$$

式中: $w_{3,\max}$ 、 $w_{3,\min}$ 分别为差分进化算法中 w_3 上、下边界的设定值; $w'_{L_2,\max}$ 、 $w'_{L_2,\min}$ 分别为通过蒙特卡罗仿真计算得到的 w'_{L_2} 中的最大值和最小值,其余参数含义相同; $\max\{a, b\}$ 表示取 a 、 b 中的较大值, $\min\{a, b\}$ 表示取 a 、 b 中的较小值。

基于配合结构的相关几何尺寸,对剩余旋量分量的变动范围依次设置如下

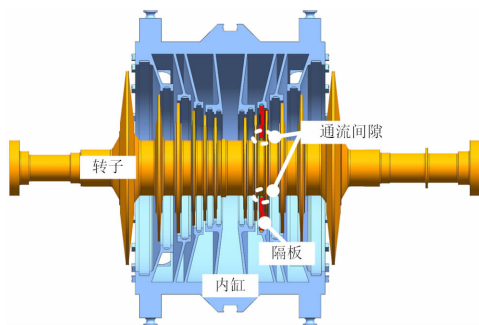
$$\begin{cases} u_3: [-\beta_{\max} \cdot H_2, \beta_{\max} \cdot H_2] \\ v_3: [-\alpha_{\max} \cdot H_2, \alpha_{\max} \cdot H_2] \\ \alpha_3: \left[-\frac{w_{\max} - w_{\min}}{d + 2W_2}, \frac{w_{\max} - w_{\min}}{d + 2W_2} \right] \\ \beta_3: \left[-\frac{w_{\max} - w_{\min}}{L_2}, \frac{w_{\max} - w_{\min}}{L_2} \right] \\ \gamma_3: [0, 0] \end{cases} \quad (14)$$

3 应用实例

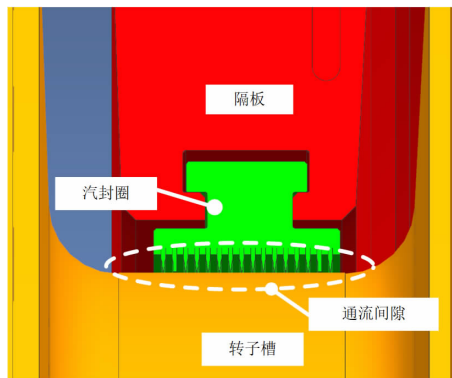
汽轮机通流间隙指的是汽轮机转动部件与静止部件之间的间隙,其大小不仅影响汽轮机的热效率,还直接影响机组的运行安全。在装配时,需要保证上、下、左、右4个位置的通流间隙分别在允许范围内^[23]。某型号汽轮机某级隔板下方通流间隙的允许范围为0.70~1.00 mm,下面通过对该通流间隙的求解和分析,说明前述方法的计算流程。

为简化建模和计算,不考虑外缸、轴承座的相关公差和配合,假定内缸和转子都处于名义位置,图6(a)为半缸状态下汽轮机的部分装配示意图。隔板通流间隙指转子槽和汽封圈齿尖之间的间隙,如图6(b)所示,其中汽封圈安装在隔板的T型槽内。

隔板-内缸装配结构如图1所示,悬挂销安装到隔板两侧的凹槽中,并使用螺栓固定到隔板上。垫



(a) 汽轮机装配示意图



(b) 隔板通流间隙示意图

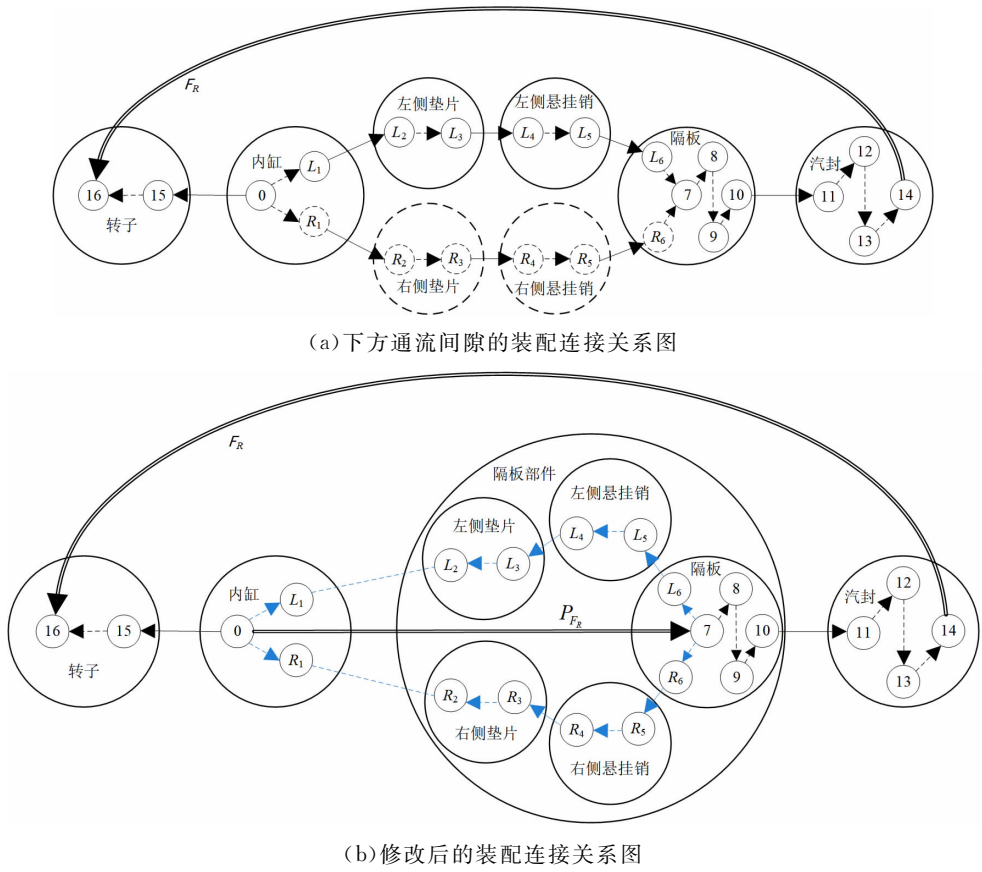
图6 汽轮机三维模型

Fig. 6 Three-dimensional model of steam turbine

片安装到悬挂销下方,同样使用螺栓进行固定。固定好后,将隔板安装到内缸上,左、右侧垫片下表面分别与内缸左、右侧洼窝表面相接触,实现隔板竖直方向的定位。使用雅可比旋量模型对隔板下方通流间隙进行计算和分析的流程如下。

(1)建立局部坐标系,绘制装配连接关系图。识别下方通流间隙形成过程中的相关功能要素,在各相关功能要素上建立局部坐标系,并将内缸轴线所在局部坐标系定为全局坐标系。建立下方通流间隙的装配连接关系图如图7(a)所示,其中从功能要素0到功能要素7存在局部并联链,传统建模方法的处理方案是忽略图中虚线节点,只将单侧支链上的节点加入雅可比旋量模型中进行计算。

(2)修改局部并联链,构建 P_{F_R} 形成连接图。将隔板、两侧垫片、两侧悬挂销划为隔板部件,隔板轴线7相对于内缸轴线0的旋量变动是待计算的局部并联结构的功能要求,用 P_{F_R} 进行标识。使用箭头从并联起始及终止节点指向零部件的配合表面,在图中对应为从隔板轴线7到左右垫片下表面 L_2 、 R_2 ,以及从内缸轴线0到左右洼窝表面 L_1 、 R_1 。使用虚线连接配合表面 L_2 与 L_1 、 R_2 与 R_1 。修改后的装配连接关系图如图7(b)所示。



0—内缸轴线; L_1 —内缸左侧注窝; L_2 —左侧垫片下表面; L_3 —左侧垫片上表面; L_4 —左侧悬挂销下表面; L_5 —左侧悬挂销上支撑面; L_6 —隔板左侧槽上支撑面; R_2 —左侧垫片下表面; R_3 —右侧垫片上表面; R_4 —右侧悬挂销下表面; R_5 —右侧悬挂销上支撑面; R_6 —隔板右侧槽上支撑面; 7 —隔板轴线; 8 —隔板最内侧圆柱面轴线; 9 —隔板内侧圆柱面下侧; 10 —隔板 T 形槽内侧接触面下侧; 11 —汽封内侧接触圆柱面下侧; 12 —汽封圈内侧接触圆柱面轴线; 13 —汽封齿尖轴线; 14 —汽封齿尖所在圆柱面下侧; 15 —转子轴线; 16 —转子隔板槽下侧。

图 7 装配连接关系图
Fig. 7 Assembly connection diagram

(3)建立各功能要素的旋量模型。装配连接关系图中相关功能要素主要有平面、圆柱面、圆柱轴线等,依次建立各功能要素的考虑分量之间约束关系的旋量模型。由于上述装配中除了垫片与内缸注窝的配合外,其他配合都通过螺栓进行了连接或者用弹簧进行了压紧,视为固定接触,相应的配合副的旋量置为 $[0]_{6 \times 1}$ 。

(4)建立零部件的雅可比旋量模型。隔板部件坐标系为隔板轴线 7 所在的局部坐标系,内缸的零件坐标系为隔板轴线 0 坐着的局部坐标系。装配前,隔板部件中两垫片下表面的变动旋量以及内缸中两侧注窝变动旋量的计算如下

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_{R_{L_2}} = [\mathbf{J}_{L_6/L_2} \quad \mathbf{J}_{L_5/L_2} \quad \mathbf{J}_{L_4/L_2} \quad \mathbf{J}_{L_3/L_2} \quad \mathbf{J}_{L_2/L_2}] \cdot \\ \quad [\mathbf{F}_{E_{L_6}} \quad \mathbf{F}_{E_{L_5}} \quad \mathbf{F}_{E_{L_4}} \quad \mathbf{F}_{E_{L_3}} \quad \mathbf{F}_{E_{L_2}}]^T \\ \mathbf{F}'_{R_{R_2}} = [\mathbf{J}_{R_6/R_2} \quad \mathbf{J}_{R_5/R_2} \quad \mathbf{J}_{R_4/R_2} \quad \mathbf{J}_{R_3/R_2} \quad \mathbf{J}_{R_2/R_2}] \cdot \\ \quad [\mathbf{F}_{E_{R_6}} \quad \mathbf{F}_{E_{R_5}} \quad \mathbf{F}_{E_{R_4}} \quad \mathbf{F}_{E_{R_3}} \quad \mathbf{F}_{E_{R_2}}]^T \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{R_{L_1}} = \mathbf{J}_{L_1/L_1} \cdot \mathbf{F}_{E_{L_1}} \\ \mathbf{F}_{R_{R_1}} = \mathbf{J}_{R_1/R_1} \cdot \mathbf{F}_{E_{R_1}} \end{cases} \quad (16)$$

当隔板部件在装配后偏离名义位置的变动旋量为 F_{R_i} 时,装配后两垫片下表面最终变动旋量

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{R_{L_2}} = \mathbf{F}'_{R_{L_2}} + \mathbf{J}_{7/L_2} \cdot \mathbf{F}_{R_7} \\ \mathbf{F}_{R_{R_2}} = \mathbf{F}'_{R_{R_2}} + \mathbf{J}_{7/R_2} \cdot \mathbf{F}_{R_7} \end{cases} \quad (17)$$

(5)使用差分进化算法求解 P_{F_R} 。在实际生产过程中,在加工条件、加工环境等因素的综合影响下,各功能要素的旋量分量呈一定的概率分布。当制造工序处于受控状态下时,各分量近似正态分布^[24]。假设各旋量分量初始值为正态分布,废品率为 0.27%,各旋量分量的独立变动范围为 $\pm 3\sigma$ ^[25],使用蒙特卡罗仿真生成满足分量间约束关系的旋量数据。根据隔板、内缸、转子的有限元分析结果,引入重力作用下的补充旋量作为修正量。建立零部件的雅可比旋量模型,计算得到各组仿真数据对应的 $F'_{R_{L_2}}$ 、 $F'_{R_{R_2}}$ 、 $F'_{R_{L_1}}$ 、 $F'_{R_{R_1}}$,进一步设置 F_{R_7} 的范围为

$$\begin{cases} u: [-7.086\ 39 \times 10^{-1}, 7.086\ 39 \times 10^{-1}] \\ \alpha: [-1.912\ 26 \times 10^{-4}, 1.912\ 26 \times 10^{-4}] \\ v: [-1.721\ 04 \times 10^{-2}, 1.721\ 04 \times 10^{-2}] \\ \beta: [-7.874\ 43 \times 10^{-3}, 7.874\ 43 \times 10^{-3}] \\ w: [-4.083\ 00 \times 10^{-1}, 3.266\ 76 \times 10^{-2}] \\ \gamma: [0, 0] \end{cases} \quad (18)$$

使用差分进化算法对 F_{R_7} 进行求解, 适应度函数 $F=w_7$ 。约束条件是两侧垫片下表面 R_2 、 L_2 分别位于洼窝表面 R_1 、 L_1 上方且不相交。设置编码方式为实数编码, 变异缩放因子 0.5, 交叉概率 0.5,

种群规模为 50, 最大遗传代数为 600。计算得到每组旋量仿真数据对应的 F_{R_7} 值, 即为 P_{F_R} 。

下面给出差分进化算法(DE)与其他两种常用的约束优化算法的比较。选择同一组旋量仿真数据, 独立运行 50 次。其中遗传算法(Genetic Algorithm, GA)变异概率为 0.5, 种群规模为 50, 最大遗传代数为 1 000; 粒子群算法(PSO)惯性因子为 0.8, 局部学习因子和全局学习因子均为 0.5, 种群规模为 50, 最大遗传代数为 1 000。算法的运行情况如表 1 所示。

表 1 不同算法的统计结果

Table 1 Statistical results of different algorithms

参数	GA	PSO	DE
最好值	$-2.187\ 68 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 91 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 91 \times 10^{-1}$
平均值	$-2.126\ 80 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 78 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 91 \times 10^{-1}$
中值	$-2.126\ 71 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 77 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 91 \times 10^{-1}$
最差值	$-2.046\ 92 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 63 \times 10^{-1}$	$-2.217\ 91 \times 10^{-1}$
标准差	$3.554\ 50 \times 10^{-3}$	$9.154\ 04 \times 10^{-6}$	$1.980\ 40 \times 10^{-7}$
平均耗时/s	5.91	1.88	5.21

在重复运行中, 粒子群算法耗时最短, 但是多次运行最优解的变动较大, 算法不够稳定; 与其他两种算法相比, 差分进化算法表现出了良好的精确性, 且多次运行都能收敛到同一个解, 后期可以考虑通过并行计算等方法提高整体的仿真速度。

(6)完成转化后的串联链的建模和计算。使用计算得到的 P_{F_R} 将带局部并联链的装配连接关系图转化为单一的串联链, 如图 7(b)中黑色链路所示。基于该串联链, 建立装配体的雅可比旋量模型对 F_R 进行计算

$$F_{R_{14}} = \begin{bmatrix} J_{7/14} & J_{8/14} & \cdots & J_{13/14} & J_{14/14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{F_R} & F_{E_8} & \cdots & F_{E_{13}} & F_{E_{14}} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

$$F_{R_{16}} = \begin{bmatrix} J_{15/16} & J_{16/16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{R_{15}} & F_{E_{16}} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

下方通流间隙 $F_R=(z_{16}+w_{16})-(z_{14}+w_{14})$ 。

(7)结果分析。5 000 组仿真数据的计算结果如图 8 所示。传统方法中, 大的半径尺寸使得内缸-隔板单侧配合结构处, 旋量转动分量对功能要求的杠杆作用非常大, 因而传统方法不适用于汽轮机通

流间隙的分析。本文提出的装配体局部并联结构的建模和分析方法对相关公差和配合信息进行了合理的平衡, 结果的可靠性和精度得到提高。将文中方法和传统方法得到的通流间隙计算结果进行比较, 结果如表 2 所示。可以看到, 在该实例中, 应用本文方法的计算结果精确度远高于传统方法。

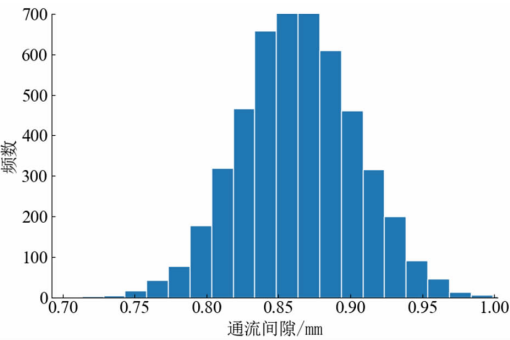


图 8 通流间隙的仿真结果

Fig. 8 Simulation results of the flow gap

表 2 不同方法计算结果的比较

Table 2 Comparison of calculation results of different methods

分析方法	KS 检验 P 值	平均值	标准差	$\mu \pm 3\sigma$
传统方法	0.958 9	0.848 9	0.813 8	$(-1.592\ 5, 3.290\ 3)$
文中方法	0.990 8	0.863 1	0.039 6	$(0.744\ 3, 0.981\ 9)$

4 结束语

本文提出了一种雅可比旋量模型中装配体局部并联结构的公差分析方法,定义了装配体局部并联结构的功能要求,方便了模型的描述和分析;提出并建立了零部件的雅可比旋量模型,为雅可比旋量模型的应用提供了新思路;设计了配合平面位置关系检测算法,使用带约束的差分进化算法完成了对装配体局部并联结构的功能要求的计算;最后,以汽轮机通流间隙为例,介绍了建模和计算过程,验证了该方案的可行性,结果显示该建模和分析方法能够显著提高模型的精确性和可靠性。本文提出的计算方法对包含文中所示局部并联结构的复杂装配体公差分析具有一定的适用性,对于包含其他类型的局部并联结构的装配体公差分析具有一定的指导意义。

参考文献:

- [1] 刘检华,孙清超,程晖,等. 产品装配技术的研究现状、技术内涵及发展趋势 [J]. 机械工程学报, 2018, 54(11): 1-28.
LIU Jianhua, SUN Qingchao, CHENG Hui, et al. The state-of-the-art, connotation and developing trends of the products assembly technology [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 1-28.
- [2] 张嘉锟,陈琨,于慧,等. 面向误差传递的复杂机械产品装配单元划分方法 [J]. 西安交通大学学报, 2021, 55(4): 86-94.
ZHANG Jiakun, CHEN Kun, YU Hui, et al. Assembly unit partitioning method of complex mechanical products for error propagation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2021, 55(4): 86-94.
- [3] LAPERRIÈRE L, GHIE W, DESROCHERS A. Statistical and deterministic tolerance analysis and synthesis using a unified Jacobian-Torsor model [J]. CIRP Annals, 2002, 51(1): 417-420.
- [4] DESROCHERS A, GHIE W, LAPERRIÈRE L. Application of a unified Jacobian-Torsor model for tolerance analysis [J]. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2003, 3(1): 2-14.
- [5] CHEN Hua, JIN Sun, LI Zhimin, et al. A comprehensive study of three dimensional tolerance analysis methods [J]. Computer-Aided Design, 2014, 53: 1-13.
- [6] CHEN Hia, JIN Sun, LI Zhimin, et al. A solution of partial parallel connections for the unified Jacobian-Torsor model [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 91: 39-49.
- [7] ZENG Wenhui, RAO Yunqing, WANG Peng, et al. A solution of worst-case tolerance analysis for partial parallel chains based on the unified Jacobian-Torsor model [J]. Precision Engineering, 2017, 47: 276-291.
- [8] JIN Sun, DING Siyi, LI Zhimin, et al. Point-based solution using Jacobian-Torsor theory into partial parallel chains for revolving components assembly [J]. Journal of Manufacturing Systems, 2018, 46: 46-58.
- [9] LIU Ting, ZHAO Qijian, CAO Yanlong, et al. A generic approach for analysis of mechanical assembly [J]. Precision Engineering, 2018, 54: 361-370.
- [10] 刘婷. 基于肤面模型的装配误差分析方法研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2019.
- [11] LAPERRIÈRE L, LAFOND P. Modeling tolerances and dispersions of mechanical assemblies using virtual joints [C]// ASME 1999 Design Engineering Technical Conferences. New York, NY, USA: ASME, 1999: 933-942.
- [12] DESROCHERS A. Modeling three dimensional tolerance zones using screw parameters [C]// ASME 1999 Design Engineering Technical Conferences. New York, NY, USA: ASME, 1999: 895-903.
- [13] 张为民,陈灿,李鹏忠,等. 基于雅可比旋量法的实际工况公差建模 [J]. 计算机集成制造系统, 2011, 17(1): 77-83.
ZHANG Weimin, CHEN Can, LI Pengzhong, et al. Tolerance modeling in actual working condition based on Jacobian-Torsor theory [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2011, 17(1): 77-83.
- [14] 陈华. 基于雅可比旋量模型的三维公差分析方法研究及在发动机装配中的应用 [D]. 上海: 上海交通大学, 2015.
- [15] GHIE W, LAPERRIÈRE L, DESROCHERS A. Statistical tolerance analysis using the unified Jacobian-Torsor model [J]. International Journal of Production Research, 2010, 48(15): 4609-4630.
- [16] CHEN Hua, JIN Sun, LI Zhimin, et al. A modified method of the unified Jacobian-Torsor model for tolerance analysis and allocation [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2015, 16(8): 1789-1800.
- [17] 林海盛. 汽轮机隔板装配质量预测及控制方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
- [18] 张庆科. 粒子群优化算法及差分进化算法研究 [D]. 济南: 山东大学, 2017.

(下转第 222 页)

- pulsion Technology, 2016, 37(10): 1839-1846.
- [19] BROWN K, GUILLOT S, NG W F, et al. Experimental investigation of gas turbine axial diffuser performance: part I parametric analysis of influential variables [C]// ASME Turbo Expo 2020: Turbomachinery Technical Conference and Exposition. New York, NY, USA: ASME, 2020: V02DT36A016.
- [20] BROWN K, GUILLOT S, NG W F, et al. Experimental investigation of gas turbine axial diffuser performance: part II effect of inlet flow profiles at on- and off-design conditions [C]// ASME Turbo Expo 2021: Turbomachinery Technical Conference and Exposition. New York, NY, USA: ASME, 2021: V02CT35A001.
- [21] UBERTINI S, DESIDERI U. Flow development and turbulence length scales within an annular gas turbine exhaust diffuser [J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2000, 22(1/2): 55-70.
- [22] UBERTINI S, DESIDERI U. Experimental performance analysis of an annular diffuser with and without struts [J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2000, 22(3/4): 183-195.
- [23] 董雨轩, 李志刚, 李军. 支撑板型线和径向倾斜设计对燃气轮机排气扩压器气动性能的影响 [J]. 推进技术, 2021, 42(6): 1245-1255.
- DONG Yuxuan, LI Zhigang, LI Jun. Effects of airfoil and radial tilt design of struts on aerodynamic performance of gas turbine exhaust diffuser [J]. Journal of Propulsion Technology, 2021, 42(6): 1245-1255.
- [24] VASSILIEV V, ROTHBRUST M, IRMISCH S. Refitting of exhaust diffuser of industrial gas turbine [C]// ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea, and Air. New York, NY, USA: ASME, 2008: 979-987.
- [25] SIOREK M P, GUILLOT S, SONG X, et al. A sensitivity study of gas turbine exhaust diffuser-collector performance at various inlet swirl angles and strut stagger angles [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2018, 140(7): 072602.

(编辑 荆树蓉 杜秀杰)

(上接第165页)

- [19] VESTERSTROM J, THOMSEN R. A comparative study of differential evolution, particle swarm optimization, and evolutionary algorithms on numerical benchmark problems [C]// Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No. 04TH8753). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2004: 1980-1987.
- [20] GUIGUE P, DEVILLERS O. Fast and robust triangle-triangle overlap test using orientation predicates [J]. Journal of Graphics Tools, 2003, 8(1): 39-52.
- [21] 邹益胜, 丁国富, 何邕, 等. 空间三角形快速相交检测算法 [J]. 计算机应用研究, 2008, 25(10): 2906-2910.
- ZOU Yisheng, DING Guofu, HE Yong, et al. Fast intersection algorithm between spatial triangles [J]. Application Research of Computers, 2008, 25(10): 2906-2910.
- [22] ERICSON C. Real-time collision detection [M]. San Francisco, USA: Morgan Kaufmann, 2005: 184-194.
- [23] 张嘉锟, 陈琨, 高建民, 等. 汽轮机通流间隙精度预测与修配规划方法研究 [J]. 西安交通大学学报, 2021, 55(12): 87-97.
- ZHANG Jiakun, CHEN Kun, GAO Jianmin, et al. Accuracy prediction and repair planning of steam turbine flow clearance [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2021, 55(12): 87-97.
- [24] 吴常林, 黄美发, 程彬彬, 等. 基于雅可比旋量模型的装配体公差统计分析 [J]. 机械设计与研究, 2015, 31(6): 97-100.
- WU Changlin, HUANG Meifa, CHENG Binbin, et al. Statistical tolerance analysis for assembly based on the Jacobian-Torsor model [J]. Machine Design & Research, 2015, 31(6): 97-100.
- [25] 吕程, 艾彦迪, 余治民. 蒙特卡罗与响应面法相结合的圆柱度公差模型求解 [J]. 西安交通大学学报, 2014, 48(7): 53-59.
- LV Cheng, AI Yandi, YU Zhimin. Cylindricity tolerance model solution combining Monte Carlo simulation with response surface method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(7): 53-59.

(编辑 荆树蓉 杜秀杰)