

采用改进快速变幂次趋近律的滑模控制方法

李艳^{1,2}, 孙蕊^{1,2}, 夏宇¹, 古婵¹

(1. 陕西科技大学电气与控制工程学院, 710021, 西安; 2. 陕西农产品加工技术研究院, 710021, 西安)

摘要: 针对基于传统幂次趋近律的滑模控制方法在使用中抖振现象突出、趋近速度慢、时间长等问题,提出一种改进快速变幂次趋近律的滑模控制方法。首先,采用快速双幂次趋近律并加以改进,在原快速双幂次趋近律的基础上加入变指数项,使系统状态在不同趋近阶段中针对性地调节速度,大大地提高了系统动态响应过程的趋近速度,限制了抖振现象的产生,同时具有有限时间收敛性。对改进后的快速变幂次趋近律的数值分析结果表明:当系统状态的绝对值小于1时,系统相当于快速幂次趋近律,系统可平滑进入滑模段,消除抖振;当系统状态的绝对值大于等于1时,又相当于快速双幂次趋近律,系统的动态响应速度有所提高,趋近时间缩短。然后,将改进的快速变幂次趋近律用于滑模控制中,构成改进快速变幂次趋近律的滑模控制方法。采用所提滑模控制方法对履带机器人轨迹进行跟踪控制,实验结果表明:与几种基于传统的幂次趋近律控制方法相比,所提控制系统在趋近平衡零点时几乎无抖振现象的产生,具备更优的性能,且收敛时间最短,最短时间仅为其他方法的69.4%。

关键词: 滑模控制;幂次趋近律;轨迹跟踪;稳态误差;机器人轨迹

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202212012 **文章编号:** 0253-987X(2022)12-0118-09

A Sliding Mode Control Method with Improved Rapid Power Approximation Law

LI Yan^{1,2}, SUN Rui^{1,2}, XIA Yu¹, GU Chan¹

(1. School of Electrical and Control Engineering, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an 710021, China;

2. Shaanxi Agricultural Products Processing Technology Research Institute, Xi'an 710021, China)

Abstract: As sliding mode control methods based on the traditional power approximation law have many problems such as prominent jitter, slow speed and long time, a sliding mode control method with improved rapid power approximation law is proposed. First, the rapid double power approximation law is adopted and improved, and the variable exponential term is added on the basis of the original rapid double power approximation law, so that the system state adjusts the speed in different approximation stages, which greatly improves the approximation speed of the dynamic response process of the system, limits the generation of jitter phenomenon, and has finite time convergence. The numerical analysis of the improved rapid power approximation law shows that when the absolute value of the system state is less than 1, the system is equivalent to the rapid power approximation law, and the system can smoothly enter the sliding mode segment and eliminate jitter. When the absolute value of the system state is not less than 1, it is

equivalent to the rapid double power approximation law, and the dynamic response speed of the system is improved, and the approximation time is shortened. Then, the improved rapid power approximation law is used in sliding mode control to constitute the proposed method. The experimental results show that compared with several control methods based on traditional power approximation law, the proposed control system has almost no jitter phenomenon when approaching the zero point of equilibrium, and has better performance and the shortest convergence time-only 69.4% of other methods.

Keywords: sliding mode control; power approximation law; trajectory tracking; steady-state error; robot trajectory

滑模变结构控制算法,是一类特殊的非线性控制,主要体现在控制的不连续性,它可以在动态过程中根据系统当前的状态偏差有目的性的不断变化,迫使其按预定状态轨迹运动^[1-3]。滑模控制因其响应速度快、动态性能好、实现简单、对系统参数摄动及外界扰动不灵敏等优点被广泛应用于机器人、电机、航空航天等不确定系统的控制问题中^[4-7]。

传统的滑模控制方法由于切换装置的不连续开关性及其动作的迟滞性,导致系统产生抖振现象。抖振现象的存在会激发系统的未建模动态,破坏执行机构,消耗巨大能量,导致系统失稳引发振荡。因此,如何减弱甚至消除滑模控制系统的抖振现象一直是人们的研究热点^[8-11]。针对抖振问题,研究学者采用准滑模法^[12]、智能控制结合法^[13-15]、基于趋近律控制法^[16]等削弱抖振现象。其中趋近律就是削弱滑模控制中抖振的一种方法,其可以极大地改善系统趋近过程的动态品质。1996 年高为炳^[17]分析抖振产生的原因,提出等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律和一般趋近律 4 种趋近律,通过调节趋近律的参数来削弱抖振,改善了系统趋近过程的动态品质,为后续趋近律的发展提供基础,但他所提的经典趋近律可调节参数少且较为固定,在实际过程中控制性能受限,因此众多学者致力于研究改变幂次项和趋近律阶次,来提高系统鲁棒性及响应速度、同时削弱抖振。

林洪振等^[18]提出一种快速幂次趋近律的全局滑模跟踪控制器,并应用于水田植保机的路径跟踪控制系统中,使得滑模算法的抖振降低,同时解决趋近模态对扰动灵敏的问题。张国山等^[19]在传统幂次趋近律的基础上对函数进行改进处理,同时引入新型函数,设计出一种新型滑模幂次趋近律控制法,解决了系统抖振过大的问题,保证其快速收敛。陈闯等^[20]设计出一种改进滑模指数趋近律的观测器,并用于电机的转速控制问题。该控制器可以对系统

做自适应控制,有效削弱抖振现象。廖瑛等^[21]改进了传统快速幂次趋近律,设计了一种双幂次组合函数趋近律,在 $[0, \delta]$ 范围内大大提高收敛速度,组合函数的连续性避免了抖振的产生,但是 fal 函数两项的收敛速率差异过大,同时趋近律不能自适应改变速度。Pan 等^[22]结合双幂次趋近律与等速趋近律构造出一种新型双幂次趋近律积分滑模算法,提高了变结构控制的响应速度,但是等速趋近律的加入导致抖振问题在滑模面上具有间断性。杨新岩等^[23]采用分段函数设计了一种分段滑模幂次趋近律,不仅可以针对不同阶段设计不同趋近律,而且收敛速度快,在滑模面上无抖振现象的产生,但是其调节参数较多,要求控制器的计算能力较高。

基于上述研究,本文针对传统幂次趋近律中抖振现象突出,收敛速度慢、趋近时间长的问题,设计了一种改进快速滑模变幂次趋近律。该趋近律在一般幂次趋近律的基础上增加了变指数幂次项,可以对系统的速率进行分阶段针对性调节,提高了系统全程趋近的速率,并且可以保证系统的有限时间收敛性。当受到外界干扰时,系统状态及一阶导数依旧可以在有限时间内收敛至平衡点附近的稳态误差界内。通过仿真对比验证本文所提改进快速变幂次趋近律相对于现有几种趋近律,具有更快的收敛速度及响应时间,其动态品质也较高。

1 改进快速变幂次趋近律设计

1.1 相关工作基础

抖振问题的存在严重阻碍着滑模控制应用及其进一步发展,因此解决控制系统的抖振成为提高滑模控制性能的关键,其中趋近律就是削弱滑模控制中抖振的一种方法^[24]。

快速幂次趋近律和双幂次趋近律为

$$\begin{cases} \dot{s} = -k_1 s - k_2 |s|^a \operatorname{sgn}(s), s(0) = s_0 \\ \dot{s} = -k_1 |s|^{a_1} \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^{a_2} \operatorname{sgn}(s) \end{cases} \quad (1)$$

$$s(0) = s_0 \quad (2)$$

式中: $k_1 > 0; k_2 > 0; 0 < \alpha < 1; \alpha_1 > 1; 0 < \alpha_2 < 1; s$ 为滑模控制中所选取的滑模变量。简单分析可知, 两种趋近律本质上连续, 当系统状态抵达滑模面时, 即 $s=0$ 时, $\dot{s}=0$, 趋近速度缓慢减小至 0, 完成光滑过渡, 控制了抖振现象的产生。

1.2 改进快速变幂次趋近律

结合上述两种幂次趋近律的基础, 对于连续时间系统而言, 本文提出一种改进的快速变幂次趋近律, 即

$$\dot{s} = -k_1 |s|^\gamma \text{sgn}(s) - k_2 |s|^b \text{sgn}(s) - k_3 s \quad (3)$$

$$\gamma = \begin{cases} a, & |s| \geq 1 \\ 1, & |s| < 1 \end{cases} \quad (4)$$

式中 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, a > 1, 0 < b < 1$ 。

由指数函数的性质可以得到, 当系统状态条件为 $|s| < 1$ 时, 趋近律形式写为 $\dot{s} = -k_1 |s| - k_2 |s|^b \text{sgn}(s) - k_3 s$, 等同于快速幂次趋近律, 保证趋近速度的同时使系统平滑进入滑模段, 消除抖振; 当系统状态条件为 $|s| \geq 1$ 时, 趋近律形式写为 $\dot{s} = -k_1 |s|^a \text{sgn}(s) - k_2 |s|^b \text{sgn}(s) - k_3 s$, 等同于快速双幂次趋近律, 与快速幂次趋近律和双幂次趋近律相比具有更快的趋近速度, 缩短了趋近时间。

2 改进快速变幂次趋近律特性分析

2.1 滑动模态存在性及可达性证明

定理 1 对于滑模幂次趋近律(3), 滑模变量 s 可以在其作用下运动至平衡点 $s=0$ 。

证明 由式(3)可知

$$s\dot{s} = -k_1 |s|^{\gamma+1} - k_2 |s|^{b+1} - k_3 s^2 \leq 0 \quad (5)$$

当且仅当 $s=0$ 时, 有 $s\dot{s}=0$ 。

由系统的连续性、滑模趋近律存在及可达性知^[25], 若满足 $s\dot{s} \leq 0$, 则该种设计的趋近律满足存在及可达性条件, 即滑模变量 s 在式律(3)的作用下可以收敛至平衡点 $s=0$ 。

2.2 稳态抖振分析

对于传统指数趋近律

$$\dot{s}_\sigma = -k_\sigma s - \epsilon_\sigma \text{sgn}(s) \quad (6)$$

式中 $k_\sigma > 0, \epsilon_\sigma > 0$, 其极限形式为

$$\lim_{s_\sigma \rightarrow 0} \dot{s}_\sigma = \begin{cases} -\epsilon_\sigma, & s_\sigma \rightarrow 0^+ \\ \epsilon_\sigma, & s_\sigma \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (7)$$

可以看出, 系统没有稳定于平衡点位置, 而在平衡点附近作幅值为 ϵ_σ 的抖振运动。

对于改进的快速变幂次趋近律, 当滑动模态 $s_\sigma \rightarrow 0^+$ 和 $s_\sigma \rightarrow 0^-$ 时, 式(3)均有 $\dot{s}=0$, 说明系统接近稳

态时, 抖振现象未产生。

2.3 趋近速率分析

定理 2 对于改进快速变幂次趋近律(3), 若设 s 的初始状态为 s_0 , 则与之对应的滑模变量 s 和 $\dot{s}$ 均可以在有限时间内抵达滑模面并收敛至 0, 收敛时间小于 $T_1 + T_2 + T_3$, 其中

$$T_1 = \frac{1}{(1-a)k_3} \left[\ln \left(a^{1-a} + \frac{k_1}{k_3} \text{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(s_0^{1-a} + \frac{k_1}{k_3} \text{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (8)$$

$$T_2 = \frac{1}{(b-1)k_3} \left[\ln \left(b^{1-b} + \frac{k_2}{k_3} \text{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(1 + \frac{k_2}{k_3} \text{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (9)$$

$$T_3 = \frac{1}{(b-1)k_1 + k_3} \left[\ln \left(1 + \frac{k_2}{k_1 + k_3} \text{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(b^{1-b} + \frac{k_2}{k_1 + k_3} \text{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (10)$$

证明 假设 $s_0 > a > 1$, 系统趋近过程可以分为 3 个阶段。系统从 s_0 到 $s(t_1)=1$, 此时式(3)可以写为

$$\dot{s} = -k_1 s^a - k_2 s^b - k_3 s \quad (11)$$

求解上述方程, 因存在 2 个幂次项方程, 使得求解过程具有一定难度, 所以将其考虑成 $\dot{s} + k_3 s = -k_1 s^a$ 和 $\dot{s} + k_3 s = -k_2 s^b$, 分别对其进行求解, $\dot{s} + k_3 s = -k_1 s^a$ 表示系统只受 $-k_1 |s|^a \text{sgn}(s)$ 影响所需趋近时间, $\dot{s} + k_3 s = -k_2 s^b$ 表示系统只受 $-k_2 |s|^b \text{sgn}(s)$ 影响所需趋近时间。由此可见, 式(11)的趋近时间必小于上述 2 个方程任一解。首先求解 $\dot{s} + k_3 s = -k_1 s^a$, 其过程如下

$$s^{-a} \frac{ds}{dt} + k_3 s^{1-a} = -k_1 \quad (12)$$

假设存在中间变量 $y = s^{1-a}$, 式(11)可写成

$$\frac{dy}{dt} + (1-a)k_3 y = -(1-a)k_1 \quad (13)$$

求解式(13), 令 $y = u(t) \exp(-\int (1-a)k_3 dt)$, $u = u(t)$ 表示 t 的连续函数, 代入式(13)可得

$$\frac{du}{dt} = -(1-a)k_1 \exp(-\int (1-a)k_3 dt) \quad (14)$$

对式(14)两边进行积分可得

$$u = -\int (1-a)k_1 \exp(-\int (1-a)k_3 dt) dt + C_1 \quad (15)$$

求解式(13), 即

$$y = \left[-\int (1-a)k_1 \exp(-\int (1-a)k_3 dt) dt + C_1 \right] \exp(-\int (1-a)k_3 dt) =$$

$$C_1 \exp\left(-\int (1-a)k_3 dt\right) - [k_1 \exp\left(-\int (1-a)k_3 dt\right) - a)k_3 dt]/k_3] \exp\left(-\int (1-a)k_3 dt\right) = C_1 \exp\left(-\int (1-a)k_3 dt\right) - \frac{k_1}{k_3} \quad (16)$$

$$s^{1-a} = C_1 \exp\left(-\int (1-a)k_3 dt\right) - \frac{k_1}{k_3} \quad (17)$$

当时间 $t=0$ 时, $s=s_0$, 可得常数

$$C_1 = s_0^{1-a} \frac{k_1}{k_3} \quad (18)$$

由式(17)、(18)可求解式(12), 得系统从 s_0 运动到 $s(t_1)$ 所需时间

$$T_1 = \frac{1}{(1-a)k_3} \left[\ln\left(a^{1-a} + \frac{k_1}{k_3}\right) - \ln\left(s_0^{1-a} + \frac{k_1}{k_3}\right) \right] \quad (19)$$

可知系统从 s_0 运动到 $s(t_1)$ 所需时间小于 T_1 。同理可求得系统从 $s(t_1)=1$ 运动到 $s(t_2)=b$ 和从 $s(t_2)=b$ 运动到 $s(t_3)=0$ 的时间 T_2 、 T_3 , 即

$$T_2 = \frac{1}{(b-1)k_3} \left[\ln\left(b^{1-b} + \frac{k_2}{k_3}\right) - \ln\left(1 + \frac{k_2}{k_3}\right) \right] \quad (20)$$

$$T_3 = \frac{1}{(b-1)(k_1+k_3)} \left[\ln\left(1 + \frac{k_2}{k_1+k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) - \ln\left(b^{1-b} + \frac{k_2}{k_1+k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) \right] \quad (21)$$

所以, 系统从 $s(t_1)=1$ 运动到 $s(t_2)=b$ 所需要的时间小于 T_2 , 从 $s(t_2)=b$ 运动到 $s(t_3)=0$ 所需要的时间小于 T_3 。

综上所述, 收敛时间可写为

$$T_1 = \frac{1}{(1-a)k_3} \left[\ln\left(a^{1-a} + \frac{k_1}{k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) - \ln\left(s_0^{1-a} + \frac{k_1}{k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) \right] \quad (22)$$

$$T_2 = \frac{1}{(b-1)k_3} \left[\ln\left(b^{1-b} + \frac{k_2}{k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) - \ln\left(1 + \frac{k_2}{k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) \right] \quad (23)$$

$$T_3 = \frac{1}{(b-1)(k_1+k_3)} \left[\ln\left(b^{1-b} + \frac{k_2}{k_1+k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) - \ln\left(1 + \frac{k_2}{k_1+k_3} \operatorname{sgn}(s_0)\right) \right] \quad (24)$$

此外, 系统的收敛时间小于 $T_1+T_2+T_3$ 。

2.4 干扰稳态误差界分析

通过上文的分析可知改进的快速变幂次趋近律可以使系统在有限时间内运动至平衡点。而当系统受外界不确定扰动时, 该趋近律只能让系统抵达平衡点附近的一个邻域内, 这个邻域就被称为干扰稳

定界。

对于不确定非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d \quad (25)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态; $u \in \mathbf{R}$ 为系统的控制输入; f, g 均为已知的平滑向量场; d 为外界扰动。为限制系统的运动状态在限定时间内到达滑模面, 即 $s=0$, 选取滑模面 $s(x)=0$ 。可知 s 的导数为

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} f + \frac{\partial s}{\partial x} g u + \frac{\partial s}{\partial x} d \quad (26)$$

若 $\frac{\partial s}{\partial x} g$ 非奇异, 令 $d' = \frac{\partial x}{\partial s} d$, 可得

$$u = \left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \left(s - \frac{\partial s}{\partial x} f - \frac{\partial s}{\partial x} d\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \left(s - \frac{\partial s}{\partial x} f - d'\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial x} g\right)^{-1} \left(-\frac{\partial s}{\partial x} f + u_s\right) \quad (27)$$

$$u_s = s - d' =$$

$$-k_1 |s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^b \operatorname{sgn}(s) - k_3 s \quad (28)$$

可得

$$\dot{s} = u_s + d' = -k_1 |s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^b \operatorname{sgn}(s) - k_3 s + d' \quad (29)$$

引理 1 假设系统状态 $x \in D \subset \mathbf{R}^n$, 且 $\dot{x} = f(x)$, $f \in \mathbf{R}^n$, D 为平衡点邻域。假设存在一个连续函数 V 并且满足 V 正定, $\dot{V}$ 除平衡点外均负定; 存在邻域 $M \subset D$ 和实数 $\varphi > 0$, $0 < \psi < 1$, 使 $\dot{V} + \varphi V^\psi \leq 0$ 。那么 $\dot{x} = f(x)$ 可以在有限时间内收敛至平衡点^[26]。

定理 3 考虑存在不确定的外加干扰系统(29), 如果满足 $|d'| \leq \delta$, δ 为大于 0 的常数, 则该系统的状态可以在有限时间内收敛到以下区域

$$|s| \leq \min\left\{\left(\frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left(\frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}}, \frac{\delta}{k_3}\right\} \quad (30)$$

$$|s| \leq \min\left\{\delta, \left(k_1 \frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{\gamma}{b}}, \left(k_1 \frac{\delta}{k_3}\right)^{\gamma}\right\} + \min\left\{\delta, \left(k_2 \frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{b}{\gamma}}, \left(k_2 \frac{\delta}{k_3}\right)^b\right\} + \min\left\{\delta, \left(k_3 \frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left(k_3 \frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}}\right\} + \delta \quad (31)$$

证明 选择 Lyapunov 函数

$$V = 0.5s^2 \quad (32)$$

求导可得

$$\dot{V} = ss' = -k_1 |s|^{\gamma+1} - k_2 |s|^{b+1} - k_3 s^2 + sd' \leq -k_1 |s|^{\gamma+1} - k_2 |s|^{b+1} - k_3 s^2 + \delta |s| \quad (33)$$

式(33)可以变形为

$$\dot{V} + k_3 s^2 \leq -k_1 |s|^{\gamma+1} - k_2 |s|^{b+1} + \delta |s| \quad (34)$$

$$|s| \leq \left(\frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (35)$$

$$|s| \leq \left(\frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}} \quad (36)$$

由引理1可知,滑模变量 s 可以在限定时间内收敛至区域(34)内,代入式(33)可得

$$\begin{aligned} |\dot{s}| &= k_1 |s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) + k_2 |s|^b \operatorname{sgn}(s) + k_3 s + d \leq \\ &k_1 |s|^\gamma + k_2 |s|^b + k_3 s + d \leq \\ &k_1 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left(\frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}} \right\}^\gamma + \\ &k_2 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left(\frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}} \right\}^b + \\ &k_3 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left(\frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}} \right\} + \delta = \\ &\min \left\{ \delta, \left(k_1 \frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{\gamma}{b}}, \left(k_1 \frac{\delta}{k_3}\right)^\gamma \right\} + \\ &\min \left\{ \delta, \left(k_2 \frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{b}{\gamma}}, \left(k_2 \frac{\delta}{k_3}\right)^b \right\} + \\ &\min \left\{ \delta, \left(k_3 \frac{\delta}{k_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \left(k_3 \frac{\delta}{k_2}\right)^{\frac{1}{b}} \right\} + \delta \end{aligned} \quad (37)$$

3 仿真结果及分析

3.1 单输入单输出系统仿真对比

考虑系统

$$\dot{s} = u + d(t) \quad (38)$$

式中: u 为控制输入; $d(t)$ 为总扰动且有界。分别使用本文所提改进快速变幂次趋近律 u_1 、快速幂次趋近律 u_2 、双幂次趋近律 u_3 、文献[14]所提新型双幂次组合函数趋近律 u_4 及文献[16]所提分段滑模幂次趋近律 u_5 , 来设计控制输入 u , 同时进行仿真对比, 其中 $k_1=1, a=0.5$ 。

对于式(38), 当外界不存在干扰时, 假设滑模初值为1.2, 滑模变量 s 及其一阶导数绝对值 $|\dot{s}|$ 的收敛曲线如图1、图2所示。

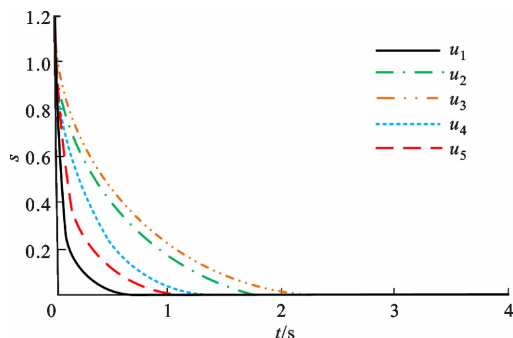


图1 s 随时间收敛曲线对比图

Fig. 1 Comparison plot of the s convergence curve over time

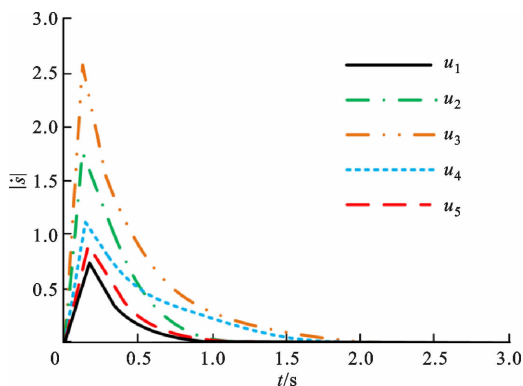


图2 $|\dot{s}|$ 随时间收敛曲线对比图

Fig. 2 Comparison plot of the $|\dot{s}|$ convergence curve over time

由图1、图2可知,改进快速变幂次趋近律相比于其他趋近律具有更快的趋近速度,其最大幅值明显低于其他趋近律;同时,改进快速变幂次趋近律可以使 s 、 $|\dot{s}|$ 均在限定时间内趋于零点,且无抖振现象的产生。由此验证了本文所提趋近律对于简单非线性单输入单输出系统更具备优越性及有效性。

3.2 干扰稳态误差界仿真

假设对于不确定系统及所受外界总扰动统一用 $d(t)$ 表示,将滑模初值设为8,同时用各趋近律的稳态误差界进行仿真对比。

干扰上界 $\delta=8, d=2\cos t + \sin 2t$ 。 s 及 $\dot{s}$ 的收敛曲线仿真结果如图3、图4所示。

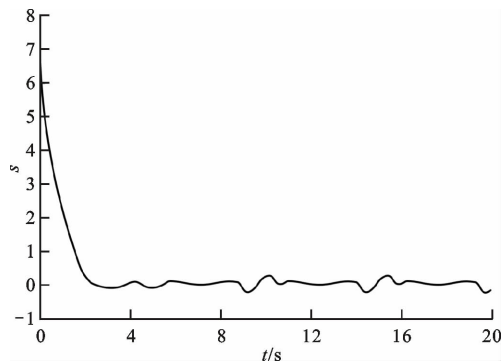


图3 外加干扰下 s 收敛曲线

Fig. 3 s convergence curve under added interference

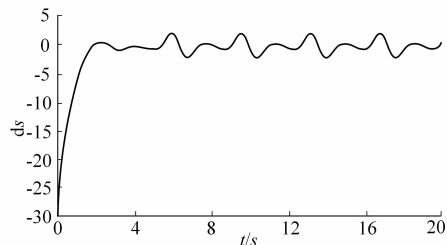


图4 外加干扰下 $\dot{s}$ 收敛曲线

Fig. 4 $\dot{s}$ convergence curve under added interference

由图 3、图 4 可知,系统在受到扰动时,其状态可以在有限时间内抵至稳态误差界范围内,收敛时间约为 2.75 s。该范围与定理 3 所给的范围界一致, $|s| \leq 0.373$, $|s| \leq 3.039$ 。对各趋近律控制信号 u 误差范围进行对比,如图 5 所示。

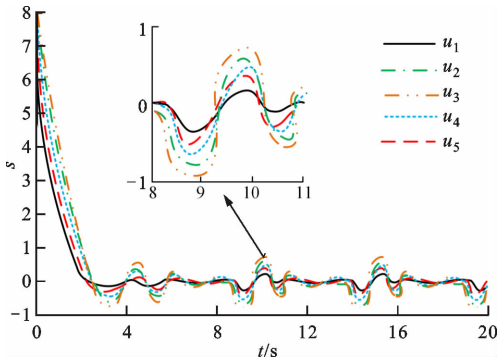


图 5 不同趋近律下控制信号 u 收敛曲线对比

Fig. 5 Comparison of control signal u convergence curves under different approach laws

由图 5 可知,本文所提改进快速变幂次趋近律对于外界扰动具最优的稳态性质且稳态误差界最小。同时,当系统存在外界扰动或不确定因素时,滑模变量在有限时间内收敛至平衡点邻域附近。所以在实际情况中,可以使用非线性观测器进行状态估计,控制系统达到最有效果。

3.3 趋近律在履带移动机器人轨迹跟踪控制中的应用

3.3.1 仿真模型

履带机器人运动学模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (39)$$

式中: x, y 为机器人实际位置; θ 为机器人实际前进的偏移角; v, ω 分别为机器人的实际线速度、角速度。

理想条件下其轨迹跟踪误差模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (40)$$

式中: $[x_e \ y_e \ \theta_e]^T$ 表示机器人的位置偏差量; $[x_r \ y_r \ \theta_r]^T$ 表示机器人位置期望量。

对式(40)求导并结合式(39)可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_e \omega + v_r \cos\theta_e - v \\ -x_e \omega + v_r \sin\theta_e - d\omega \\ \omega_r - \omega \end{bmatrix} \quad (41)$$

式中 v_r, ω_r 为机器人期望线速度、角速度。履带机器人的轨迹跟踪目标是设计合适的控制输入 v, ω , 使得机器人的轨迹跟踪误差 x_e, y_e 和 θ_e 均可在有限时间内快速收敛至 0, 确保机器人精确跟踪参考轨迹。

由此设计滑模控制中的滑模面结构为

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ k_1 x_e - k_2 \omega_r y_e \end{bmatrix} \quad (42)$$

式中 $\omega_r \neq 0$ 且为常数。

改进快速变幂次趋近律公式为

$$\dot{s} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_{11} s_1 - \mu_{12} |s_1|^{\lambda_1} \text{sgn}(s_1) - \mu_{13} |s_1|^b \text{sgn}(s_1) \\ -\mu_{21} s_2 - \mu_{22} |s_2|^{\lambda_2} \text{sgn}(s_2) - \mu_{23} |s_2|^b \text{sgn}(s_2) \end{bmatrix} \quad (43)$$

式中 $\lambda = \begin{cases} \alpha, & |s| < 1 \\ |s|, & |s| \geq 1 \end{cases}$; $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{13}, \mu_{23}$ 均大于 0; $0 < \alpha < 1$ 。

由式(41)、(42)、(43)可得轨迹跟踪运动控制器的表达式

$$\omega = \omega_r + \mu_{11} s_1 + \mu_{12} |s_1|^{\lambda_1} \text{sgn}(s_1) + \mu_{13} |s_1|^b \text{sgn}(s_1) \quad (44)$$

$$v = y_e \omega_r + v_r + \frac{1}{n_1} [n_2 \omega_r^2 x_e + \mu_{21} s_2 + \mu_{22} |s_2|^{\lambda_2} \text{sgn}(s_2) + \mu_{23} |s_2|^b \text{sgn}(s_2)] \quad (45)$$

3.3.2 仿真实验研究

使用 Matlab 软件验证履带移动机器人轨迹跟踪控制问题。取参考速度 $v_r = 2.3 \text{ m/s}$, $\omega_r = 0.8 \text{ rad/s}$ 。机器人的期望初始位姿为 $[3 \ 1 \ -1]^T$, 其轨迹的参考初始位姿为 $[2 \ 1 \ 2]^T$ 。参数设置为 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 6, a = 0.5, b = 1.5$ 。

无上界干扰时,分别使用上述趋近律对机器人进行仿真对比。图 6、图 7 分别为不同趋近律下滑

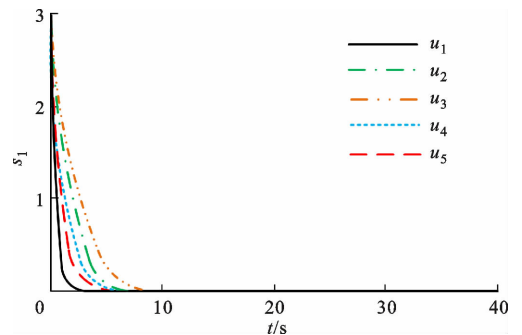


图 6 不同趋近律下 s_1 随时间变化情况

Fig. 6 s_1 changes over time under different approach laws

模动态 s_1 、 s_2 随时间的变化曲线,图 8、图 9 分别为不同趋近律下角速度、线速度随时间的变化曲线。为了保证比较的一致性,各趋近律参数由输入初始条件计算确定。

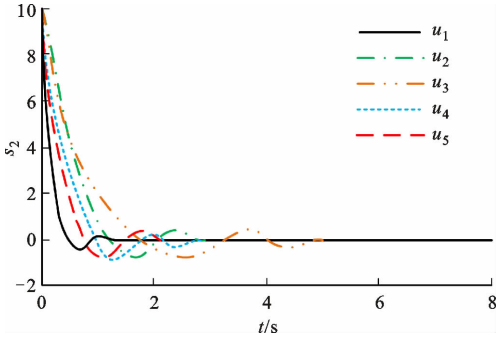


图 7 不同趋近律下 s_2 随时间变化情况

Fig. 7 s_2 changes over time under different approach laws

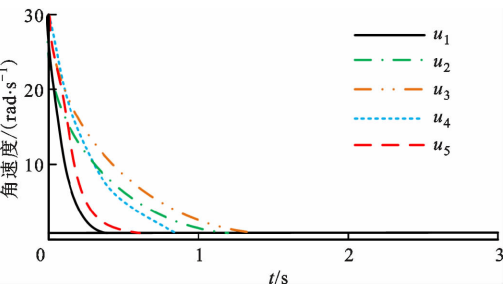


图 8 不同趋近律下角速度随时间变化情况

Fig. 8 Angular velocity under different approximation laws over time

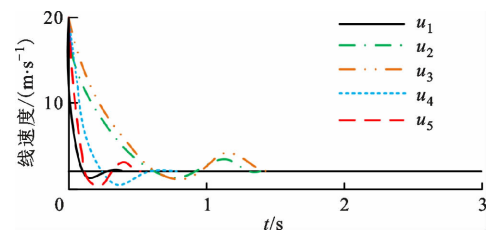


图 9 不同趋近律下线速度随时间变化情况

Fig. 9 The downline speed of different approaching laws changes over time

表 1 不同趋近律仿真结果对比

Table 1 Comparison of simulation results of different approach laws

控制律	s_1 收敛 时间/s	s_2 收敛 时间/s	ω 收敛 时间/s	v 收敛 时间/s
u_1	2.48	1.26	0.38	0.37
u_2	6.93	2.74	1.23	1.37
u_3	8.12	4.78	1.36	1.44
u_4	5.64	2.73	0.87	0.84
u_5	5.13	2.15	0.63	0.56

由图 6~9 及表 1 可知,本文所提改进快速变幂次趋近律收敛时间最短、速度最快,且系统在趋近平衡零点时几乎无抖振现象的产生,相比于其他趋近律具备更优的性能。

3.3.3 实际环境运行结果

为充分验证改进快速变幂次趋近律滑模轨迹跟踪控制器的准确性,将对实际环境中的履带小做轨迹跟踪实验。以树莓派为硬件系统的核心控制器,以 WHEELTEC IMU 惯性导航模块为接收设备,速度精度、位置测量精度分别为 0.02 m/s、0.01 m,角度分辨率小于 0.01°,角度重复性小于 0.1°。用 Matlab 2019 对其进行仿真环境的搭建。机器人的跟踪路径取为圆形,表达式为

$$\begin{cases} x_r(t) = \cos(\omega_r t) \\ y_r(t) = \sin(\omega_r t) \\ \theta_r(t) = \omega_r t \end{cases} \quad (46)$$

假设期望速度不变且机器人没有负载,运行结果如图 10~12 所示。由图 10~12 可知,基于改进快速变幂次趋近律的履带小车能较为平滑地跟踪圆形给定轨迹。

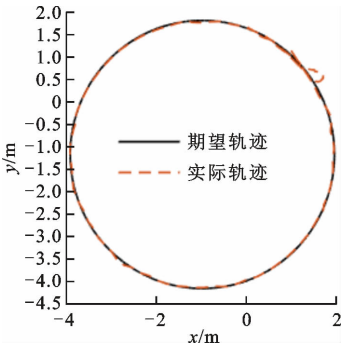


图 10 原始速度下的圆形轨迹跟踪曲线

Fig. 10 Circular trajectory tracking curve

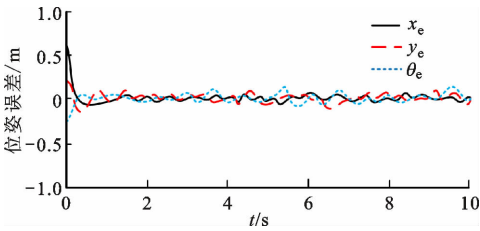


图 11 原始速度下的轨迹跟踪误差曲线

Fig. 11 Trajectory tracking error curve

若增加机器人的负载,也即增大线速度和角速度,选取参考速度为 $v_r=5.2$ m/s, $\omega_r=4$ rad/s,运行结果如图 13~15 所示。

由图 13~15 可知,其他条件不变,当速度增大

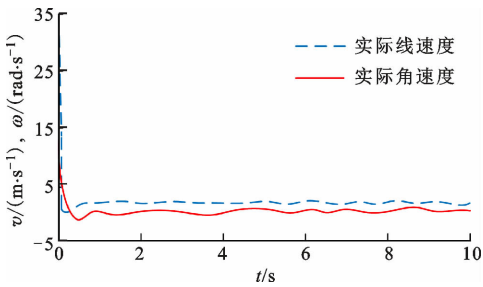


图 12 原始速度下的实际速度变化曲线
Fig. 12 Actual velocity change curve

时,轨迹跟踪误差范围增大,速度波动起伏增大,但基于改进快速变幂次趋近律的履带小车仍然能够跟踪圆形给定轨迹。研究结果更加准确地验证了本文所提趋近律具有很好的跟踪效果。

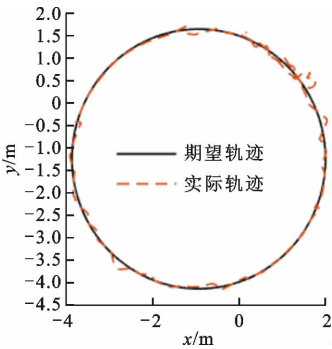


图 13 速度增长后的圆形轨迹跟踪曲线
Fig. 13 Circular trajectory tracking curve

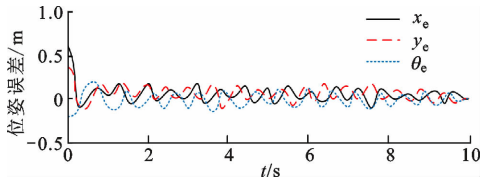


图 14 速度增长后的轨迹跟踪误差曲线
Fig. 14 Trajectory tracking error curve

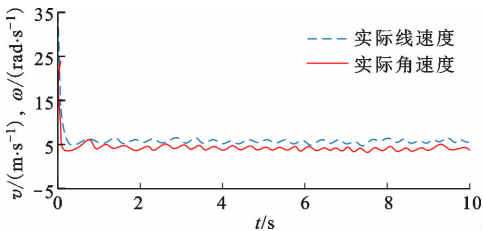


图 15 速度增长后的实际速度变化曲线
Fig. 15 Actual velocity change curve

4 结 论

本文提出了一种改进的快速变幂次趋近律,相比于一般的快速幂次趋近律和双幂次趋近律具有更

快的收敛速度和更短的趋近时间,同时在一定程度上削弱抖振。理论证明了该趋近律的可达性及存在性,给出了稳态误差界和趋近速率,同时详细推导了固定时间及干扰稳定界的表达式。当系统存在外界扰动和不确定性时,其状态可以收敛至平衡零点的有界邻域内,仿真结果验证了所提理论的准确有效性。此外,本文所提趋近律理论上也可以应用于滑模面的设计及履带移动机器人的轨迹跟踪控制中。

参考文献:

[1] LIN C J, SIE T Y, CHU Wenlin, et al. Tracking control of pneumatic artificial muscle-activated robot arm based on sliding-mode control [J]. Actuators, 2021, 10(3): 66.

[2] 冯旭刚, 鲍立昌, 章家岩, 等. 热风炉拱顶温度模糊自适应滑模控制策略 [J]. 西安交通大学学报, 2021, 55(6): 150-157.

FENG Xugang, BAO Lichang, ZHANG Jiayan, et al. Fuzzy adaptive sliding mode control strategy for vault temperature of hot blast stove [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2021, 55(6): 150-157.

[3] XIAO Lingfei, MA Leiming, HUANG Xinhao. Intelligent fractional-order integral sliding mode control for PMSM based on an improved cascade observer [J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2022, 23(2): 328-338.

[4] KUMAR S, AJMERI M. Optimal variable structure control with sliding modes for unstable processes [J]. Journal of Central South University, 2021, 28(10): 3147-3158.

[5] ZAKARYA O, KHALID H, WANG Xingsong, et al. Delay compensation observer with sliding mode controller for rotary electro-hydraulic servo system [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2021, 38(S1): 49-56.

[6] DI Fuqiang, LI Aijun, GUO Yong, et al. Event-triggered sliding mode attitude coordinated control for spacecraft formation flying system with disturbances [J]. Acta Astronautica, 2021, 188: 121-129.

[7] MA Zhiqiang, HUANG Panfeng, KUANG Zhian. Fuzzy approximate learning-based sliding mode control for deploying tethered space robot [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 29(9): 2739-2749.

[8] YUAN Lin, LI Jinna. Consensus of discrete-time nonlinear multiagent systems using sliding mode control based on optimal control [J]. IEEE Access, 2022, 10: 47275-47283.

- [9] SHARMA A K, BHUSHAN B. Comparison of various fuzzy sliding mode based controller on single link inverted pendulum [J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2022, 42(2): 679-688.
- [10] 赵峰, 罗雯, 高峰阳, 等. 考虑滑模抖振和扰动补偿的永磁同步电机改进滑模控制 [J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(6): 28-35.
ZHAO Feng, LUO Wen, GAO Fengyang, et al. An improved sliding mode control for pmsm considering sliding mode chattering and disturbance compensation [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2020, 54(6): 28-35.
- [11] JIANG Junfeng, ZHOU Xiaojun, ZHAO Wei, et al. A fast integral sliding mode controller with an extended state observer for position control of permanent magnet synchronous motor servo systems [J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2020, 21(8): 1239-1250.
- [12] LATOSIŃSKI P, BARTOSZEWICZ A. Zero-width quasi-sliding mode band in the presence of non-matched uncertainties [J]. *Energies*, 2021, 14(11): 3011.
- [13] DONG Chencheng, YU Zhangguo, CHEN Xuechao, et al. Adaptability control towards complex ground based on fuzzy logic for humanoid robots [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(6): 1574-1584.
- [14] SABELHAUS A P, ZHAO Huajing, ZHU E L, et al. Model-predictive control with inverse statics optimization for tensegrity spine robots [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2021, 29(1): 263-277.
- [15] GUO Jianping. Application of a novel adaptive sliding mode control method to the load frequency control [J]. *European Journal of Control*, 2021, 57: 172-178.
- [16] CHEN Xigang, LI Yangmin, MA Haifeng, et al. A novel variable exponential discrete time sliding mode reaching law [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems: Express Briefs*, 2021, 68(7): 2518-2522.
- [17] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1996: 241-254.
- [18] 林洪振, 李彦明, 袁正华, 等. 水田植保机自主作业滑模抗干扰路径跟踪方法 [J]. *农业机械学报*, 2021, 52(9): 383-388.
LIN Hongzhen, LI Yanming, YUAN Zhenghua, et al. Sliding mode anti-interference path tracking method for autonomous operation of paddy field plant protection machine [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2021, 52(9): 383-388.
- [19] 张国山, 李现磊. 一种滑模控制新型幂次趋近律的设计与分析 [J]. *天津大学学报(自然科学与工程技术版)*, 2020, 53(11): 1112-1119.
ZHANG Guoshan, LI Xianlei. Design and analysis of a new power reaching law for sliding mode control [J]. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2020, 53(11): 1112-1119.
- [20] 陈闯, 王勃, 于泳, 等. 基于改进指数趋近律的感应电机滑模转速观测器研究 [J]. *电工技术学报*, 2020, 35(z1): 155-163.
CHEN Chuang, WANG Bo, YU Yong, et al. An improved exponential reaching law based-sliding mode observer for speed-sensorless induction motor drives [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2020, 35(z1): 155-163.
- [21] 廖瑛, 杨雅君, 王勇. 滑模控制的新型双幂次组合函数趋近律 [J]. *国防科技大学学报*, 2017, 39(3): 105-110.
LIAO Ying, YANG Yajun, WANG Yong. Novel double power combination function reaching law for sliding mode control [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2017, 39(3): 105-110.
- [22] PAN Jian, LI Wei, ZHANG Haipeng. Control algorithms of magnetic suspension systems based on the improved double exponential reaching law of sliding mode control [J]. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2018, 16(6): 2878-2887.
- [23] 杨新岩, 廖育荣, 倪淑燕. 滑模控制快速分段幂次趋近律设计与分析 [J]. *系统工程与电子技术*, 2019, 41(5): 1127-1132.
YANG Xinyan, LIAO Yurong, NI Shuyan. Rapid piecewise power reaching law of sliding mode control design and analysis [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2019, 41(5): 1127-1132.
- [24] ROHITH G. Fractional power rate reaching law for augmented sliding mode performance [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2021, 358(1): 856-876.
- [25] ZHANG Yanqing, YIN Zhonggang, ZHANG Yanping, et al. A novel sliding mode observer with optimized constant rate reaching law for sensorless control of induction motor [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(7): 5867-5878.
- [26] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(5): 678-682.

(编辑 赵炜 刘杨)