

考虑微凸体侧接触的结合面法向接触刚度建模

王世军¹, 杨昭¹, 吴敬伟², 李鹏阳¹

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 710048, 西安;

2. 西安昆仑工业(集团)有限责任公司技术部, 710043, 西安)

摘要: 提出了一种考虑微凸体侧接触影响的结合面法向刚度建模方法。通过采样获取接触表面轮廓数据后,用统计方法研究了接触表面上微凸体之间的水平距离分布,发现微凸体之间的水平距离分布近似呈正态分布。基于微凸体侧接触理论和微凸体连续变形理论,建立微凸体的法向接触刚度模型后,根据微凸体水平距离的分布规律,利用统计理论,构建了结合面法向接触刚度模型。分析结果表明:在两个接触表面平均间距相同时,提出模型的法向接触载荷大于 KE 模型,小于高志强(GZQ)模型;在间距较小时,提出模型接触刚度小于 KE(Kogut L 和 Etsion I)模型接触刚度,在间距较大时,提出模型接触刚度大于 KE 模型接触刚度,并且提出模型的法向接触刚度总是小于 GZQ 模型接触刚度;基于提出模型的有限元分析获得的前三阶模态与试验结果一致,固有频率与试验结果最大相差 8.2%,说明提出的模型能够比较准确地预测结合面的法向动态特性。

关键词: 微凸体水平距离;正态分布;侧接触;法向刚度

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202202013 **文章编号:** 0253-987X(2022)02-0118-12



OSID 码

Modeling of Normal Contact Stiffness of Interface Considering Side Contact of Asperity

WANG Shijun¹, YANG Zhao¹, WU Jingwei², LI Pengyang¹

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. Technology Department of Xi'an Kunlun Industry (Group) Co. Ltd., Xi'an 710043, China)

Abstract: A modeling approach for the normal stiffness of the lateral contact interface considering the horizontal distance distribution between asperities is proposed. After the information of contact plane are acquired by sampling, the distribution of the horizontal distances among asperities on the contact plane are investigated statistically. It is found that the distribution of the horizontal distances among asperities is approximately the normal distribution. Once a normal stiffness of asperities is determined based on side contact theory between asperities and continuous deformation theory of asperities, according to the distribution law of the horizontal distances between asperities, a new normal contact stiffness model of contact interface is constructed following probability and statistics theory. The simulation indicates that the normal contact load of the new model is greater than the load of KE model and less than GZQ model when the average distance between contact surfaces is given. Meanwhile, when the distance is small, the normal contact stiffness of the new model always less than that of KE model. When

the distance is large, the contact stiffness of this new model is greater than that of KE model, and the normal contact stiffness of the new model is always is less than that of GZQ model. And the top three-order vibration type acquired based on the finite element simulation of the new model coincides well with the test outcome, and the maximum natural frequency error reaches 8.2%, which verifies that this newly proposed model can forecast the normal dynamic performance of the joint plane more exactly.

Keywords: horizontal distance of asperities; normal distribution; lateral contact; normal stiffness

在结合面的接触刚度研究中,通常将微凸体之间的接触视为峰对峰的正接触,这种方法的缺点是不能充分考虑到微凸体侧接触对于整个结合面接触刚度的影响。结合面中的微凸体之间的接触,大多为侧接触,而非正接触^[1],通过只考虑微凸体正接触获得的两个结合面之间的接触刚度模型,与实际有一定差别。

在微凸体侧接触研究中,Gorbatikh 假设了接触角度 θ 的分布函数^[1]。Sepehri 和 Farhang(SF 模型)将微凸体假设为椭球体,研究了微凸体之间侧接触对结合面接触特性的影响^[2-3]。庄艳和朱林波补齐了微凸体接触状态中的弹塑性阶段,并对基于不同模型下的微凸体侧接触状态进行了对比^[4-5]。ZHAO 等基于微凸体侧接触模型,通过模拟微凸体真实接触,再结合统计方法,得到两个接触面的法向接触刚度^[6]。高志强(GZQ 模型)基于 Gorbatikh 提出的接触角度分布规律,构建了结合面间的接触能耗模型^[7]。

上述研究都存在一个问题:如图 1 所示的微凸体侧接触模型,微凸体中心水平距离 s 和接触角 θ 并不是单独存在,两者之间应该有一定的关系。在目前的研究中,都是将参数设为固定值来研究结合面之间的接触特性,这显然不符合实际。在结合面中的微凸体中心水平距离 s 并不是定值分布,接触角度 θ 也不是定值,而是跟 s 的变化有关系。虽然 Gorbatikh 假设了接触角度 θ 的分布函数,并没有给

出理论依据,也未曾做过试验来证明假设的分布函数的合理性和正确性。

综上,本文采集了接触试样的表面轮廓,分析了微凸体水平距离的分布规律,并提出了一种考虑微凸体水平距离分布的侧接触结合面的法向刚度建模方法。

1 微凸体中心水平距离分布规律

通过图 2 所示的 Keyence 的超景深三维显微系统 VHX-5000 获取磨削试样的三维轮廓数据,采样间隔在 x 、 y 方向均为 $1\text{ }\mu\text{m}$,对获取的数据进行处理,使得高度方向的均值为 0,图 3 和图 4 为样本表面的轮廓。



图 2 超景深显微系统 VHX-5000

Fig. 2 Ultra-depth of field microscopy system VHX-5000

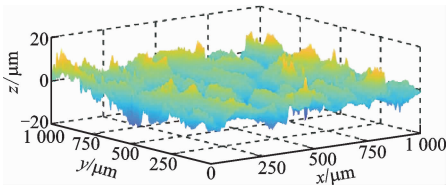


图 3 上试样表面轮廓图

Fig. 3 Surface profile of the upper sample

根据获取的三维轮廓数据,在上、下试样分别选取 6 个断面上的二维轮廓数据点,采样长度为 1 000

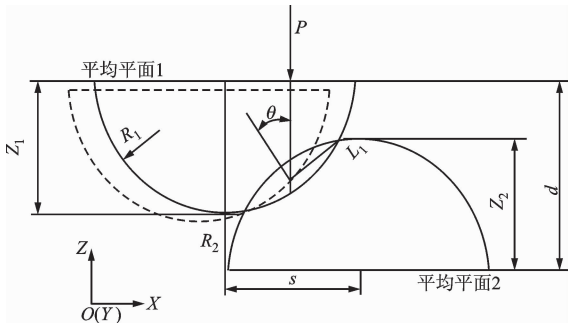


图 1 微凸体侧接触模型

Fig. 1 Side contact model of asperities

μm ,如图5~图16所示。

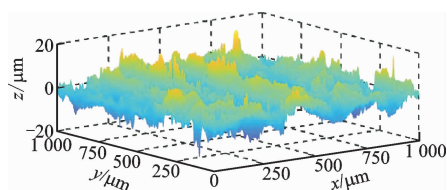


图4 下试样表面轮廓图

Fig. 4 Surface profile of lower sample

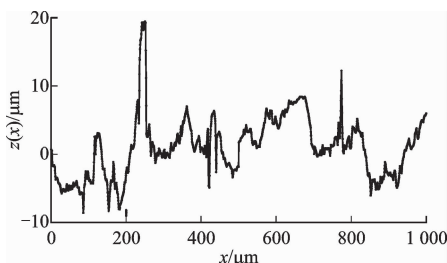


图5 上试样第1组随机二维轮廓线

Fig. 5 First set of random two-dimensional contours of upper sample

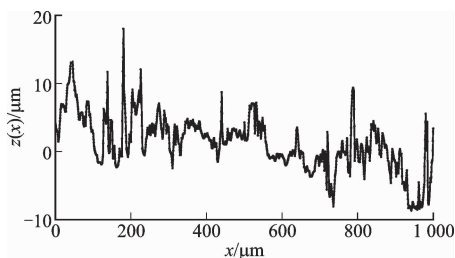


图6 下试样第1组随机二维轮廓线

Fig. 6 First set of random two-dimensional contours of lower sample

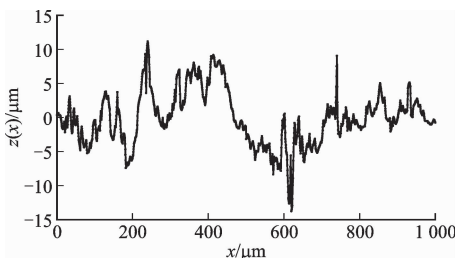


图7 上试样第2组随机二维轮廓线

Fig. 7 Second set of random two-dimensional contours of upper sample

采用“一峰对两峰”的形式,获取微凸体中心水平距离,如图17所示。

采用“三点峰”^[8]的形式读取各断面上的二维轮廓峰值点及其坐标。以上试样的峰为基准,采取下、上试样离该峰最近的一左一右的两个峰值点及其坐标,则上试样峰与下试样的两个峰之间的横坐标差

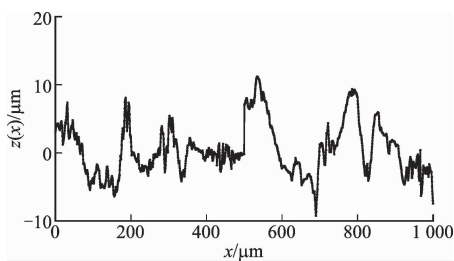


图8 下试样第2组随机二维轮廓线

Fig. 8 Second set of random two-dimensional contours of lower sample

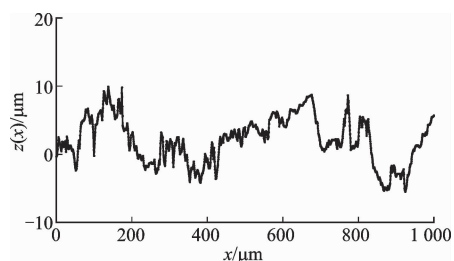


图9 上试样第3组随机二维轮廓线

Fig. 9 Third set of random two-dimensional contours of upper sample

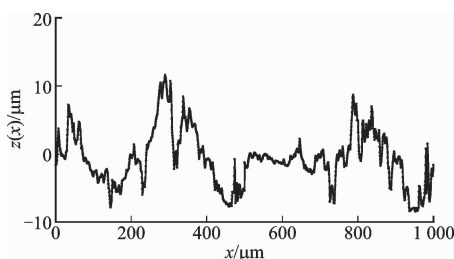


图10 下试样第3组随机二维轮廓线

Fig. 10 Third set of random two-dimensional contour lines of lower sample

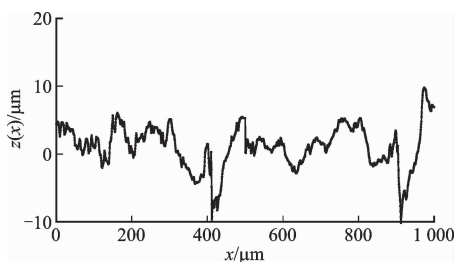


图11 上试样第4组随机二维轮廓线

Fig. 11 Fourth set of random two-dimensional contours of upper sample

值就是两个微凸体中心的水平距离。根据3个峰的坐标点数,左边两个微凸体之间的水平距离 s_1 为正值,右边的微凸体距离 s_2 为负值,正、负号只代表距离方向。

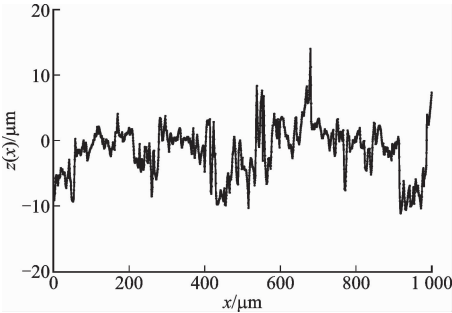


图 12 下试样第 4 组随机二维轮廓线

Fig. 12 Fourth set of random two-dimensional contours of lower sample

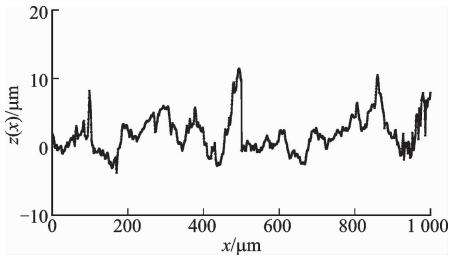


图 13 上试样第 5 组随机二维轮廓线

Fig. 13 Fifth group of random two-dimensional contours of upper sample

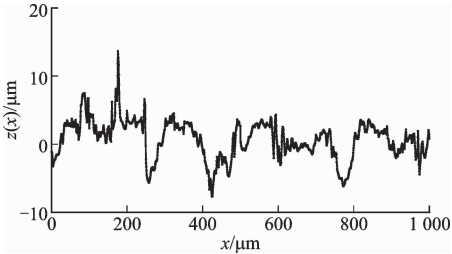


图 14 下试样第 5 组随机二维轮廓线

Fig. 14 Fifth group of random two-dimensional contours of lower sample

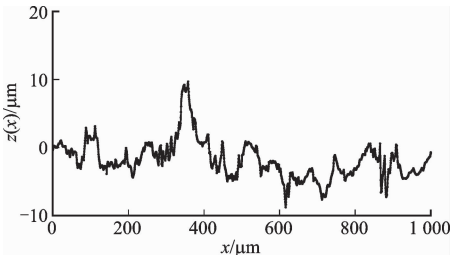


图 15 上试样第 6 组随机二维轮廓线

Fig. 15 Sixth group of random two-dimensional contours of upper sample

得到 6 组微凸体中心距离之后,对距离分布图进行数据拟合,发现近似呈正态分布,如图 18~图 23 所示。

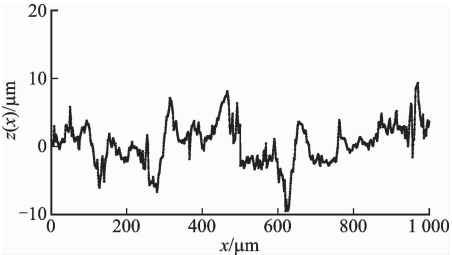


图 16 下试样第 6 组随机二维轮廓线

Fig. 16 Sixth group of random two-dimensional contours of lower sample

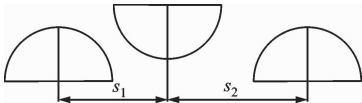


图 17 采用“一峰对两峰”的形式获取微凸体中心水平距离

Fig. 17 The horizontal distance of the center of the micro convex body is obtained in the form of “one peak to two peaks”

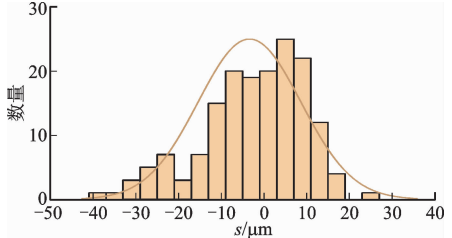


图 18 第 1 组微凸体中心距离分布

Fig. 18 Center distance distribution of first group of asperities

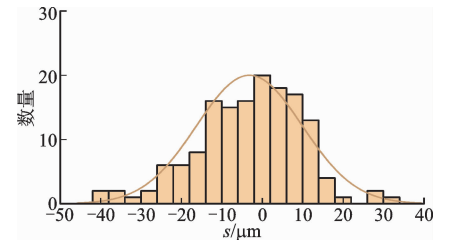


图 19 第 2 组微凸体中心距离分布

Fig. 19 The distance distribution of the center of the second group of asperities

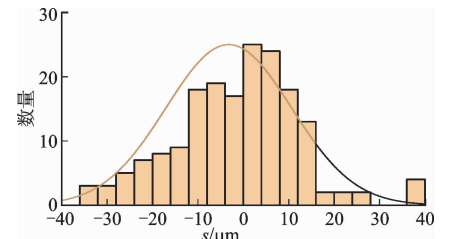


图 20 第 3 组微凸体中心距离分布

Fig. 20 Third group of micro convex center distance distribution

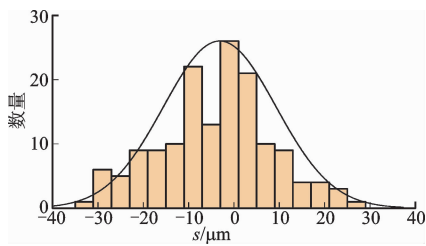


图 21 第 4 组微凸体中心距离分布

Fig. 21 Center distance distribution of fourth group of asperities

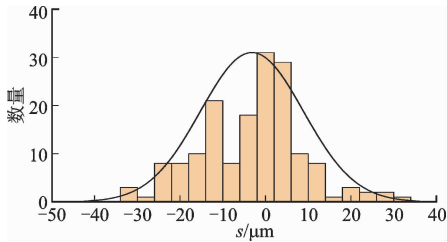


图 22 第 5 组微凸体中心距离分布

Fig. 22 The center distance distribution of the fifth group of asperities

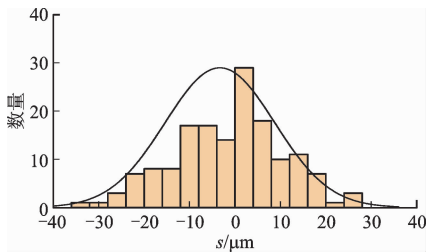


图 23 第 6 组微凸体中心距离分布

Fig. 23 Center distance distribution of sixth group of micro-convex bodies

正态分布的概率密度函数为^[9]

$$\phi(s) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s - \mu'}{2\sigma'^2}\right) \tag{1}$$

式中： σ' 为微凸体中心水平距离的标准偏差，分布曲线的幅度由其决定； μ' 为微凸体中心水平距离的均值，决定着分布曲线的位置。

从图 18~图 23 可以看出，微凸体中心水平距离分布并不是呈左右对称的，而是向某一侧有偏斜，这种不对称用偏斜度 R_{sk} 来度量，计算公式^[10]如下

$$R_{sk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_s}{\sigma_s} \right)^3 \tag{2}$$

式中： n 为样本个数； σ_s 为微凸体中心水平距离的标准偏差； μ_s 为微凸体中心水平距离平均值。

偏斜度 R_{sk} 可以为正值也可以为负值，如果偏斜度为 0，说明微凸体水平距离分布对称且均匀。

如果粗糙表面侧接触的微凸体水平距离分布不对称或者不均匀，微凸体水平距离的分布曲线的偏斜度 R_{sk} 就是正值或负值。

峰度是反映一组数据的平均值所处的峰值高低，公式^[9]为

$$R_{ku} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_s}{\sigma_s} \right)^4 \tag{3}$$

峰度和偏斜度是检验一组分布数据跟正态分布之间的偏离程度，也是判断该组数据是否近似正态分布的重要判断依据。

偏度系数和峰度系数检验公式如下^[11]

$$z_{sk} = R_{sk} / \sqrt{6/n} \tag{4}$$

$$z_{ku} = R_{ku} / \sqrt{24/n} \tag{5}$$

当 z_{sk} 、 z_{ku} 绝对值小于 1.96 时，即显著等于 0，也就是该组数据呈正态分布，正态分布假设得到验证。

由式(4)(5)计算得出，采样间隔为 $1 \mu\text{m}$ 的微凸体水平距离分布曲线的偏斜度系数和峰度系数如表 1 所示。由表中数据可以看到偏度系数为 0.634，峰度系数为 0.576，因此可以认为微凸体中心水平距离分布近似呈正态分布。

表 1 采样间隔为 $1 \mu\text{m}$ 微凸体中心水平距离分布统计

Table 1 Statistical parameters of horizontal distance distribution of asperity center (sampling interval $1 \mu\text{m}$)						
组别	$s/\mu\text{m}$	$\sigma'/\mu\text{m}$	R_{sk}	S_{ku}	z_{sk}	z_{ku}
1	1.641	13.202	-0.184	3.243	1.108	0.736
2	1.302	14.693	0.084	3.170	0.509	0.518
3	2.817	13.239	-0.183	2.746	1.150	0.803
4	1.878	12.949	0.025	2.704	0.144	0.860
5	2.657	13.419	0.043	3.176	0.259	0.533
6	2.155	13.568	0.109	2.998	0.633	0.005
平均值	2.075	13.512	-0.017	3.006	0.634	0.576

2 微凸体侧接触模型

将结合面的微凸体等效为球体，在法向力 P 作用下，接触情况如图 24 所示。其中 Z_1 和 Z_2 为两微凸体的高度， R_1 和 R_2 为两微凸体的曲率半径， s 为两微凸体的中心水平距离， θ 为微凸体之间的接触角， d 为结合面的平均间距。将两个微凸体的接触表面作为一个基准，建立 $OX'Y'Z'$ 坐标系，以 Z' 方向为法向，以 Y' 方向为切向，则法向作用力可以分解为沿 Z' 方向的 P_n 和沿 X' 方向的 P_τ 。在 P_n 作用下，微凸体在 Z' 方向发生变形，变形量为 $\delta_{z'}$ ；在 P_τ

作用下,微凸体在 X' 方向发生滑移,滑移量为 $\zeta_{X'}$ 。将结合面当做一个基准,建立 $OXYZ$ 坐标系,令结合面法向为 Z 轴,结合面切向为 X 轴。 ζ_Z 为 $\zeta_{X'}$ 相对在 Z 轴上的变形量, δ_Z 为 δ_Z 相对在 Z 轴上的变形量,则在 Z 轴的总变形量为 δ 。

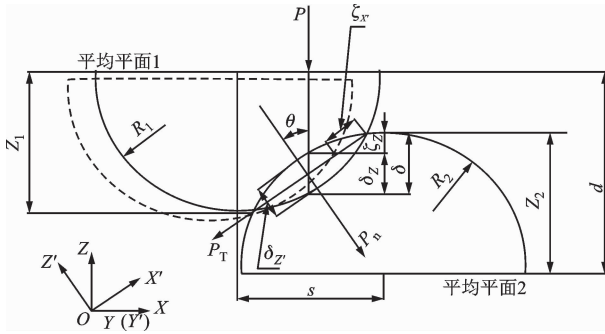


图 24 微凸体侧接触示意图

Fig. 24 Schematic diagram of side contact of asperity

根据几何关系,可知

$$\cos\theta = (1 + s^2/R_s^2)^{-1/2} \quad (6)$$

$$\sin\theta = (1 + R_s^2/s^2)^{-1/2} \quad (7)$$

$$\delta_Z = \delta_Z \cos\theta \quad (8)$$

$$\zeta_Z = \zeta_{X'} \sin\theta \quad (9)$$

$$\delta = Z_1 + Z_2 - d - \frac{s^2}{2R_s} \quad (10)$$

式中: $R_s = R_1 + R_2$ 。微凸体上的受力满足

$$P_\tau = P_n \tan\theta \quad (11)$$

$$P = P_n \cos\theta + P_\tau \sin\theta \quad (12)$$

2.1 弹性阶段

在 Z' 方向,当微凸体变形量 $0 \leq \delta_Z' < \delta_{Z'ec}$ 时,进入弹性阶段, $\delta_{Z'ec}$ 为临界变形量,表达如下

$$\delta_{Z'ec} = \left(\frac{\pi KH}{2E} \right)^2 R \quad (13)$$

式中: E 为当量弹性模量; $K = 0.454 + 0.41\nu$,其中 ν 为泊松比; H 为硬度。 E 、 H 都取材料中相对较软的一方的值。

根据赫兹理论^[12],法向分力 P_n 与 Z' 方向上变形量 δ_Z' 之间的关系为

$$P_{ne} = \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} \quad (14)$$

切向分力 P_τ 为

$$P_{\tau e} = P_{ne} \tan\theta = \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} \tan\theta \quad (15)$$

则法向合力为

$$P_e = P_{ne} \cos\theta + P_{\tau e} \sin\theta = \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} (\cos\theta + \tan\theta \sin\theta) \quad (16)$$

根据 $P_n = P \cos\theta$,可获得弹性阶段 Z' 轴方向的变形量相对与 Z 轴方向的总变形量 $\delta_{Z'e} = \delta_e \cos^{3/2}\theta$,则法向合力为

$$\begin{aligned} P_e &= P_{ne} \cos\theta + P_{\tau e} \sin\theta = \\ &= \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} (\cos\theta + \tan\theta \sin\theta) = \\ &= \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] = \\ &= \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} \cos\theta \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] = \\ &= \frac{4}{3} ER^{1/2} \delta_Z'^{3/2} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

微凸体在该阶段内接触刚度为

$$\begin{aligned} K_{ne} &= dP/d\delta = 2ER^{1/2} \delta^{1/2} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \cdot \\ &\quad \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

2.2 塑性阶段

根据文献[12]可知,当微凸体变形量 $\delta_Z' < 110\delta_{Z'ec}$,进入塑性阶段。此时,单对微凸体的法向分力与变形之间的关系为

$$P_{np} = 2\pi HR \delta_Z' \quad (19)$$

切向分力为

$$P_{\tau p} = P_{np} \tan\theta = 2\pi HR \delta_Z' \tan\theta \quad (20)$$

法向合力为

$$\begin{aligned} P_p &= P_{np} \cos\theta + P_{\tau p} \sin\theta = \\ &= 2\pi HR \delta_Z' (\cos\theta + \tan\theta \sin\theta) \end{aligned} \quad (21)$$

根据 $P_n = P \cos\theta$,可获得弹性阶段 Z' 轴方向的变形量相对与 Z 轴方向变形量的关系 $\delta_{Z'p} = \delta_p \cos\theta$,则法向合力为

$$\begin{aligned} P_p &= P_{np} \cos\theta + P_{\tau p} \sin\theta = \\ &= 2\pi HR \delta_Z' (\cos\theta + \tan\theta \sin\theta) = \\ &= 2\pi HR \delta \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

则在塑性阶段微凸体的接触刚度为

$$\begin{aligned} K_{ne} &= \frac{dP}{d\delta} = 2\pi HR \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

2.3 弹塑性阶段

根据 KE 模型^[13],当微凸体变形量 $\delta_{Z'ec} \leq \delta_Z' < 110\delta_{Z'ec}$,微凸体进入弹塑性阶段。

文献[13]中,当 $\delta_{Z'ec} \leq \delta_{Z'} < 6\delta_{Z'ec}$ 时,弹塑性区分为 I 区,有

$$P_{nep1} = \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.03 \left(\frac{\delta_{Z'}}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \quad (24)$$

当 $6\delta_{Z'ec} \leq \delta_{Z'} < 110\delta_{Z'ec}$ 时,弹塑性区又可分为 II 区,有

$$P_{nep2} = \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.40 \left(\frac{\delta_{Z'}}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.263} \quad (25)$$

本文弹塑性 I 区,法向分力为

$$P_{nep1} = \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.03 \left(\frac{\delta_{Z'}}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \quad (26)$$

$$P_{rep1} = P_{nep1} \tan \theta =$$

$$\frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.03 \left(\frac{\delta_{Z'}}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \tan \theta \quad (27)$$

则在弹塑性 I 区的法向合力为

$$\begin{aligned} P_{ep1} &= P_{nep1} \cos \theta + P_{rep1} \sin \theta = \\ &\left[\frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.03 \left(\frac{\delta_{Z'}}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \right] \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

根据 $P_n = P \cos \theta$, 可获得弹性阶段 Z' 轴方向的变形量相对 Z 轴方向变形量的关系 $\delta_{Z'ep} = \delta_{ep} \cos^{1/1.425} \theta$, 则法向合力

$$\begin{aligned} P_{ep1} &= P_{nep1} \cos \theta + P_{rep1} \sin \theta = \\ &\left[\frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.03 \left(\frac{\delta \cos^{1/1.425} \theta}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \right] \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] = \\ &\frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \times 1.03 \left(\frac{\delta}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

弹塑性 I 区的接触刚度为

$$\begin{aligned} K_{nep1} &= \frac{dP_{ep1}}{d\delta} = 1.425 \times \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \cdot \\ &1.03 \left(\frac{1}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \delta^{0.425} \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \right. \\ &\left. \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

同理,可得弹塑性 II 区的接触刚度为

$$\begin{aligned} K_{nep2} &= \frac{dP_{ep2}}{d\delta} = 1.236 \times \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \cdot \\ &1.40 \left(\frac{1}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.236} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \cdot \\ &\delta^{0.236} \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

3 结合面间的法向接触刚度

根据研究表明^[10],粗糙峰高度 z 在接触面上近似呈正态分布

$$\phi(z) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma_s^2} \right) \quad (32)$$

则结合面间接触的微凸体数量为

$$n = N \int_d^\infty \phi(z) dz = A_n \eta \int_d^\infty \phi(z) dz \quad (33)$$

式中: $N = A_n \eta$; η 为粗糙峰密度; A_n 为名义接触面积。

两粗糙表面接触时,微凸体水平距离 s 分布可以近似看成正态分布,即

$$\phi(s) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{s^2}{2\sigma'^2} \right) \quad (34)$$

则根据统计理论,可以得到结合面间所有微凸体在 3 种不同接触状态下的法向接触力,分别为

$$\begin{aligned} P_e &= N \int_0^{R_s} \int_d^{d+\delta_{ec}} \frac{4}{3} E R^{1/2} \delta^{3/2} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \phi(z) \phi(s) dz ds \end{aligned} \quad (35)$$

$$\delta_{ec} = \left(\frac{\pi KH}{2E} \right)^2 R \quad (36)$$

$$\begin{aligned} P_{ep1} &= N \int_0^{R_s} \int_{d+\delta_{ec}}^{d+6\delta_{ec}} \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{bc} \cdot \\ &1.03 \left(\frac{\delta}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.425} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \phi(z) \phi(s) dz ds \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} P_{ep2} &= N \int_0^{R_s} \int_{d+6\delta_{ec}}^{d+110\delta_{ec}} \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec} \cdot \\ &1.03 \left(\frac{\delta}{\delta_{Z'ec}} \right)^{1.263} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \phi(z) \phi(s) dz ds \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} P_p &= N \int_0^{R_s} \int_{d+110\delta_{ec}}^\infty 2\pi H R \delta \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} \cdot \\ &\left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2} \right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2} \right)^{-1/2} \frac{s}{R_s} \right] \phi(z) \phi(s) dz ds \end{aligned} \quad (39)$$

则总的接触载荷 P 为

$$P = P_e + P_{ep1} + P_{ep2} + P_p \quad (40)$$

结合面在不同状态下的法向接触刚度为

$$K_e = N \int_0^{R_s} \int_d^{d+\delta_{ec}^*} 2ER^{1/2} \delta^{1/2} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \cdot \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{R_s}{s}\right] \phi(z) \phi(s) dz ds \quad (41)$$

$$K_{ep1} = N \int_0^{R_s} \int_{d+\delta_{ec}^*}^{d+6\delta_{ec}^*} 1.425 \times \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec}^* \cdot 1.03 \left(\frac{1}{\delta_{Z'ec}^*}\right)^{1.425} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \delta^{0.425} \cdot \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s}\right] \phi(z) \phi(s) dz ds \quad (42)$$

$$K_{ep2} = N \int_0^{R_s} \int_{d+6\delta_{ec}^*}^{d+110\delta_{ec}^*} 1.236 \times \frac{2}{3} KH \pi R \delta_{Z'ec}^* \cdot 1.40 \left(\frac{1}{\delta_{Z'ec}^*}\right)^{1.236} \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \delta^{0.236} \cdot \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s}\right] \phi(z) \phi(s) dz ds \quad (43)$$

$$K_p = N \int_0^{R_s} \int_{d+110\delta_{ec}^*}^{\infty} 2\pi HR \left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} \cdot \left[\left(1 + \frac{s^2}{R_s^2}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^2}{s^2}\right)^{-1/2} \frac{s}{R_s}\right] \phi(z) \phi(s) dz ds \quad (44)$$

总的接触刚度 K 为

$$K = K_e + K_{ep1} + K_{ep2} + K_p \quad (45)$$

为了方便后期模型的计算及验证,需要对建立的新模型进行无量纲化。无量纲化接触载荷 P^* 为

$$P^* = \frac{P}{EA_n} = \frac{4}{3} \beta \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{1/2} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*}^{d^*+\delta_{ec}^*} \delta^{*3/2} \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* + \frac{2}{3} \pi \beta K \frac{H}{E} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*+\delta_{ec}^*}^{d^*+6\delta_{ec}^*} \delta_{Z'ec}^* \times 1.03 \left(\frac{\delta^*}{\delta_{Z'ec}^*}\right)^{1.425} \cdot \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* + \frac{2}{3} \pi \beta K \frac{H}{E} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*+6\delta_{ec}^*}^{d^*+110\delta_{ec}^*} \delta_{Z'ec}^* \times 1.40 \left(\frac{\delta^*}{\delta_{Z'ec}^*}\right)^{1.263} \cdot \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* + 2\pi \beta \frac{H}{E} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*+110\delta_{ec}^*}^{\infty} \delta^* \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* \quad (46)$$

$$\left(\frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*} \right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* \quad (46)$$

$$K^* = \frac{K}{(A_n E)/\sigma} = 2\beta \left(\frac{\sigma}{R}\right)^{1/2} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*}^{d^*+\delta_{ec}^*} \delta^{*1/2} \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* + 1.425 \times \frac{2}{3} \times 1.03 \pi \frac{\beta KH}{E} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*+\delta_{ec}^*}^{d^*+6\delta_{ec}^*} \left(\frac{\delta^*}{\delta_{Z'ec}^*}\right)^{0.425} \cdot \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* + 1.425 \times \frac{2}{3} \times 1.03 \pi \frac{\beta KH}{E} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*+6\delta_{ec}^*}^{d^*+110\delta_{ec}^*} \left(\frac{\delta^*}{\delta_{Z'ec}^*}\right)^{0.263} \cdot \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* + \frac{2\pi \beta H}{E} \int_0^{R_s^*} \int_{d^*+110\delta_{ec}^*}^{\infty} \left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} \left[\left(1 + \frac{s^{*2}}{R_s^{*2}}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{R_s^{*2}}{s^{*2}}\right)^{-1/2} \frac{s^*}{R_s^*}\right] \phi(z^*) \phi(s^*) dz^* ds^* \quad (47)$$

式中

$$R_s^* = \frac{R_s}{\sigma} \quad \delta^* = \frac{\delta}{\sigma} \quad s^* = \frac{s}{\sigma} \quad \delta_{Z'ec}^* = \frac{\delta_{Z'ec}}{\sigma} \quad (48)$$

$$\phi(z^*) = \frac{\sigma}{\sigma_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^{*2}}{2\sigma_s^2}\right) \quad (49)$$

$$\phi(s^*) = \frac{\sigma}{\sigma_r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 s^{*2}}{2\sigma_r^2}\right) \quad (50)$$

4 理论结果与分析

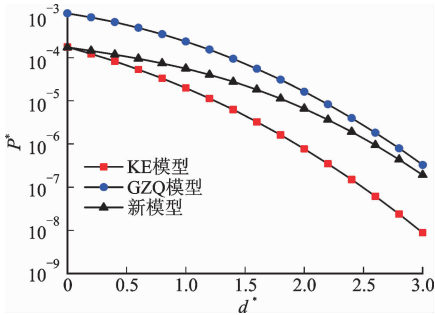
对式(46)(47)进行仿真,并且与 GZQ 模型和 KE 模型对比。表面形貌参数 $\beta, \sigma/R$ 都与塑性指数 $\psi^{[14]}$ 相关,塑性指数 ψ 是判断微凸体接触变形的重要依据。假设接触面为两钢制物体,所用材料参数^[15]分别为 $E_1 = E_2 = 207 \text{ GPa}$, $H = 1.96 \text{ GPa}$, $v_1 = v_2 = 0.29$;表面形貌参数为 $R = 2.5 \text{ } \mu\text{m}$, $\sigma' = 1.2 \text{ } \mu\text{m}$, ψ 与参数 $\beta, \sigma/R$ 之间的关系见表 2^[16]。

如图 25 所示,各模型在 3 种塑性指数下的趋势都是一样的,因为随着 d^* 的增大,两接触表面的距离增大,结合面间接触微凸体数量会减少,因此 P^* 会变小。

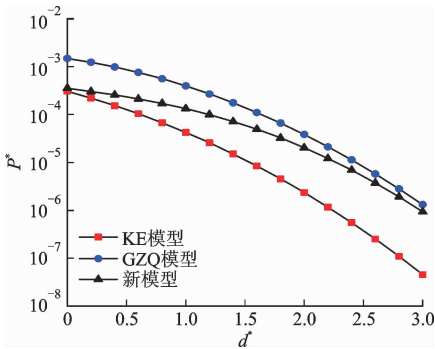
表 2 表面形貌参数和可塑性指数

Table 2 Surface topography parameters and plasticity index

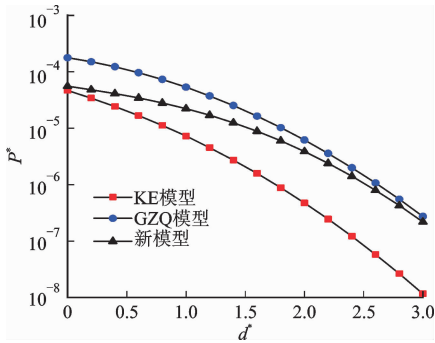
$\sigma \cdot R^{-1}$	ψ	β
1.6×10^{-4}	0.033 9	0.7
3.0×10^{-4}	0.041 4	1.0
6.5×10^{-4}	0.047 6	1.5
1.1×10^{-3}	0.054 1	2.0
1.7×10^{-3}	0.060 1	2.5



(a) $\psi=0.7$



(b) $\psi=1$



(c) $\psi=1.5$

图 25 不同塑性指数下 P^* 与 d^* 的关系

Fig. 25 Relationship between P^* and d^* under different plasticity indices

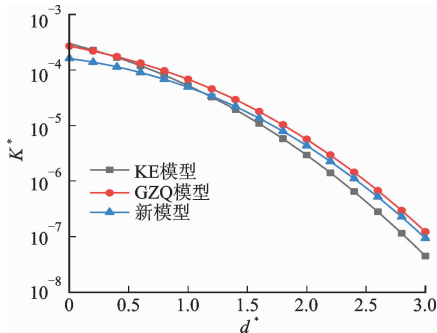
GZQ 模型、KE 模型和本文模随着 ψ 的增加, P^* 也随之增大。这是因为 ψ 的增加,越来越多的微凸体会处于弹塑性和完全塑性状态,致使 P^* 增加,

这跟实际情况相符。从图 25 还可以看出,随着结合面平面间距 d^* 的增加,本文模型和 KE 模型的无量纲法向接触载荷相差越来越大,而在结合面平均间距较少时,两者相差越来越小。这是因为:间距较小时,结合面间接触的微凸体变多,而且接触状态也大多都进入了弹塑性和塑性阶段;随着接触状态由弹性向塑性过渡,微凸体接触角度会越来越接近 90° ,角度对接触载荷的影响在下降,表现出的就是在间距为 0 时,两者的接触载荷相差较小。

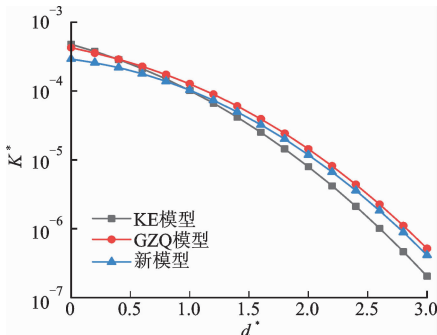
GZQ 模型和本文模型与没有考虑微凸体侧接触的 KE 模型比较,无量纲接触载荷 ψ^* 都较大。这是因为侧接触中,微凸体接触面不仅存在法向载荷,还存在切向载荷,两者合力为结合面法向接触总载荷。在塑性指数 $\psi=1.5$ 、 $d^*=0.8$ 时,本文模型、GZQ 模型和 KE 模型预测的 P^* 分别为 2.817×10^{-4} 、 7.364×10^{-3} 和 1.127×10^{-4} ,可以看出,本文模型的预测结果比 KE 模型别大了 149%,比 GZQ 模型小了 161%。

如图 26 所示,随着 d^* 的增大, K^* 越来越小,各模型在不同塑性指数下的趋势都是一样的,结合面间接触微凸体数量会减少,结合面的无量纲法向接触刚度变小。

在不同塑性指数下,本文模型、GZQ 模型都与 KE 模型在不同的 d^* 下的无量纲接触刚度 K^* 相等。这是因为 GZQ 模型和本文模型考虑了微凸体



(a) $\psi=0.7$



(b) $\psi=1$

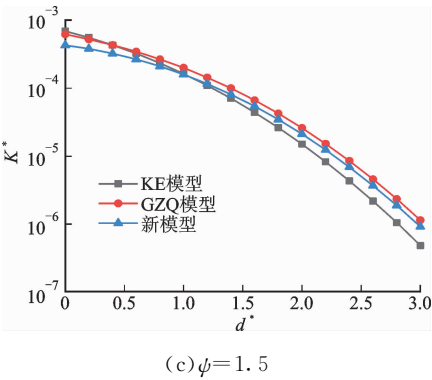


图 26 不同塑性指数下 K^* 与 d^* 关系
Fig. 26 Relationship between K^* and d^* under different plasticity indices

侧接触,微凸体侧接触是跟角度和微凸体中心水平距离有关系的,在 90° 和中心水平距离为 R_s 时,微凸体侧接触跟微凸体正接触表现一样。即在某个 d^* 下,无量纲接触刚度 K^* 相等。与 KE 模型相比, GZQ 模型和本文模型在 d^* 较小时,接触刚度小于 KE 模型的接触刚度;在 d^* 较大时,呈现出接触刚度大于 KE 模型的接触刚度。

在塑性指数 $\phi = 1.5$ 、 $d^* = 1.6$ 时,本文模型、GZQ 模型和 KE 模型预测的 K^* 分别为 5.43×10^{-5} 、 6.666×10^{-5} 和 4.430×10^{-5} ,可以看出,本文模型的预测结果分别比 KE 模型别大了 22.5%,比 GZQ 模型小了 22.6%。

5 有限元仿真与试验验证

试验装置如图 27 所示,由两个半环试样组成。两个半环试样在端面上通过 M10 螺栓联接起来,形成一个完整的圆环,端面的法向接触压力由螺栓预紧力提供。两个半环试样尺寸相同,内径为 275 mm,厚度为 35 mm。试验过程中,在两个试样的外圆上布置加速度传感器,通过锤击法获得结构的振型及固有频率。

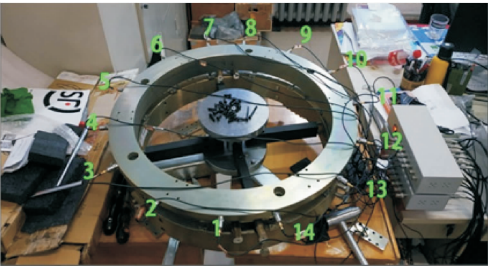


图 27 结合面固有频率测定试验装置
Fig. 27 Test device for natural frequency measurement of joint surface

在端部结合面上分别施加法向接触载荷 0.6、0.8 和 1 MPa,然后记录试样在 3 种不同接触载荷下的前三阶振型和固有频率。

图 28 为通过 ANSYS 软件建立的有限元模型。为了引入新的接触刚度解析模型,应用虚拟材料法^[17-21]模拟结合面之间的接触特性,在半环的接触区域构建一个含有虚拟材料的薄层。半环试样模型选取 solid185 单元,总数为 99 866 个。由不同的理论接触模型计算出接触刚度,再通过参数设计语言 APDL 语言导入虚拟材料中,供有限元分析使用。有限元分析中的材料参数和试验材料参数保持一致,如表 3 所示。

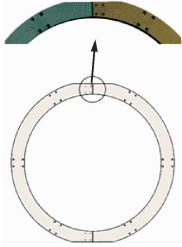


图 28 包含结合部的有限元模型
Fig. 28 Model including joints

表 3 接触试样的材料参数

Table 3 Material parameters of contact specimen	
材料参数	数值
弹性模量/GPa	207
泊松比 ν	0.28
密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	7 850
屈服强度/MPa	355
硬度/MPa	432

根据文献[22-24]方法得到的接触表面的轮廓统计参数为:表面轮廓高度偏差 $\sigma = 1.01 \mu\text{m}$,曲率半径 $R = 4.3 \mu\text{m}$,微凸体中心水平距离分布偏差 $\sigma' = 12.1 \mu\text{m}$,塑性指数 $\phi = 40$ 。根据这些统计参数和所施加的法向面压力,利用本文模型就可以计算出表 4 所示的法向接触刚度 K_n 。为了对比,表 4 中也列出了 KE 模型和 GZQ 模型的法向接触刚度。

表 4 结合面接触刚度

Table 4 Contact stiffness of joint surface				
法向面压力 /MPa	文献[25] K_{τ}	$K_n/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$		
		KE 模型	GZQ 模型	本文模型
0.6	9.60×10^8	3.33×10^8	1.01×10^9	8.73×10^8
0.8	1.50×10^9	4.24×10^8	1.26×10^9	1.09×10^9
1.0	2.10×10^9	5.38×10^8	1.58×10^9	1.37×10^9

采用文献[25]所建立的切向刚度模型获得切向接触刚度 K_{τ} 。通过功率谱密度法获取本文试样表面轮廓的分形参数,试样的分形参数 D 为 1.809, G 为 1.302×10^{-11} , 将其代入文献[25]的切向刚度模型,即可获得表 4 所示的切向刚度 K_{τ} 。

法向面压力为 0.6 MPa 时,本文模型与试验模型固有频率的对比见图 29。

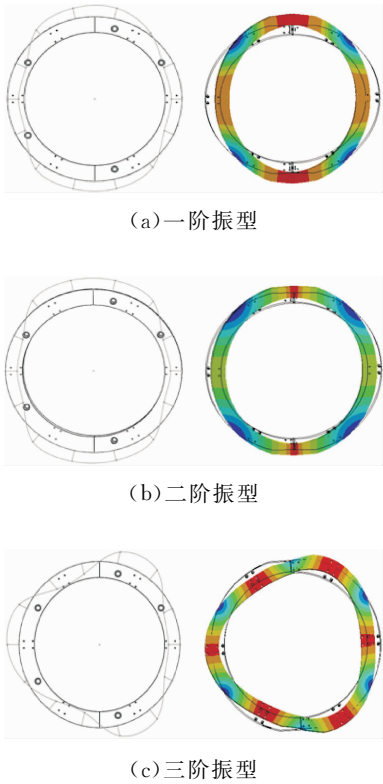


图 29 包含结合部的有限元模型

Fig. 29 Finite element model including joints

表 5 不同模型的仿真和试验固有频率对比
Table 5 Comparison between simulated and experimental natural frequencies of different models

法向面 压力 /MPa	模态 阶数	固有频率/Hz			试验
		KE 模型 仿真	GZQ 模型 仿真	本文模型 仿真	
0.6	1	210	250	228	238
	2	296	355	314	330
	3	890	930	911	920
0.8	1	230	275	234	242
	2	320	380	325	351
	3	920	990	942	960
1.0	1	241	295	245	260
	2	330	408	342	372
	3	937	1 022	961	980

如表 5 所示,在不同法向面压力下,本文模型仿真得到的固有频率与试验固有频率之间的最大相对误差为 8.2%,GZQ 模型仿真的最大相对误差为 17.64%,KE 模型仿真的最大相对误差为 18.9%。

6 结 论

(1)微凸体侧接触中,微凸体中心水平距离分布规律影响着最终扩展到结合面上的接触特性。本文对接触表面的微观形貌进行的研究表明,微凸体中心水平距离近似呈正态分布。

(2)基于统计理论和微凸体水平分布规律建立的本文模型与其他两种模型进行的对比发现,本文模型相较于 KE 模型,法向接触刚度呈现出先减小后增加的趋势,相较于 GZQ 模型,法向接触刚度则小于 GZQ 模型。

(3)有限元分析和试验结果显示,本文模型与 GZQ 模型和 KE 模型相比,固有频率与试验值的相对误差最小,证明本文模型更符合实际,能更准确地预测结合面间的法向接触特性。

参考文献:

[1] GORBATIKH L, POPOVA M. Modeling of a locking mechanism between two rough surfaces under cyclic loading [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48(9): 1014-1020.

[2] SEPEHRI A, FARHANG K. On elastic interaction of nominally flat rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 2008, 130(1): 011014.

[3] SEPEHRI A, FARHANG K. Closed-form equations for three dimensional elastic-plastic contact of nominally flat rough surfaces [J]. Journal of Tribology, 2009, 131(4): 041402.

[4] 庄艳, 李宝童, 洪军, 等. 一种结合面法向接触刚度计算模型的构建 [J]. 上海交通大学学报, 2013, 47(2): 180-186.

ZHUANG Yan, LI Baotong, HONG Jun, et al. A normal contact stiffness model of the interface [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2013, 47(2): 180-186.

[5] 朱林波, 庄艳, 洪军, 等. 一种考虑侧接触的微凸体弹塑性接触力学模型 [J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(11): 48-52, 104.

ZHU Linbo, ZHUANG Yan, HONG Jun, et al. Elastic-plastic model for contact of two asperities considering shoulder-shoulder contact [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47(11): 48-52,

- 104.
- [6] ZHAO Bin, ZHANG Song, MAN Jia, et al. A modified normal contact stiffness model considering effect of surface topography [J]. *Journal of Engineering Tribology*, 2015, 229(6): 677-688.
- [7] 高志强. 机械结合面接触刚度及阻尼的理论模型研究 [D]. 西安: 西安理工大学, 2018: 13-31.
- [8] GREENWOOD J A, JOHNSON K L. A unified theory of surface roughness [J]. *Mathematical and Physical Sciences*, 1984, 393(1804): 133-157.
- [9] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P, BOWDEN F P. Contact of nominally flat surfaces [J]. *Mathematical and Physical Sciences*, 1966, 295(1442): 300-319.
- [10] 李伯奎. 三维表面偏斜度与陡度的规律研究 [J]. *计量技术*, 2008(10): 3-6.
- LI Bokui. Study on the rule of surface skewness and surface kurtosis [J]. *Measurement Technique*, 2008(10): 3-6.
- [11] 邱皓政. 量化研究与统计分析 [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2009: 137-139.
- [12] 王世军, 李志涛, 韩子锐, 等. 基于微凸体连续变形理论的结合面切向刚度模型 [J]. *西安理工大学学报*, 2019, 35(4): 401-410.
- WANG Shijun, LI Zhitao, HAN Zirui, et al. Tangential stiffness model for joint surface based on asperity continuous deformation theory [J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2019, 35(4): 401-410.
- [13] KOGUT L, ETSION I. A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. *Tribology Transactions*, 2003, 46(3): 383-390.
- [14] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. *Journal of Tribology*, 1987, 109(2): 257-263.
- [15] JOHNSON K L. *Contact mechanics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 45-50.
- [16] NURI K A, HALLING J. The normal approach between rough flat surfaces in contact [J]. *Wear*, 1975, 32(1): 81-93.
- [17] 赵金娟, 王世军, 杨超, 等. 基于横观各向同性假定的固定结合部本构关系及有限元模型 [J]. *中国机械工程*, 2016, 27(8): 1007-1011.
- ZHAO Jinjuan, WANG Shijun, YANG Chao, et al. A constitutive law based on transverse isotropic hypothesis and finite element model of fixed joints [J]. *China Mechanical Engineering*, 2016, 27(8): 1007-1011.
- [18] 王世军, 赵金娟. 机械工程中的有限元方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2019: 239-241.
- [19] 张学良, 范世荣, 温淑花, 等. 基于等效横观各向同性虚拟材料的固定结合部建模方法 [J]. *机械工程学报*, 2017, 53(15): 141-147.
- ZHANG Xueliang, FAN Shirong, WEN Shuhua, et al. Modeling method of fixed joint interfaces based on equivalent transversely isotropic virtual material [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(15): 141-147.
- [20] 贾文峰, 张学良, 温淑花, 等. 基于虚拟材料的结合面建模与参数获取方法 [J]. *太原科技大学学报*, 2013, 34(5): 347-351.
- JIA Wenfeng, ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, et al. A method for modeling and parameter acquisitions of joints based on virtual materials [J]. *Journal of Taiyuan University of Science and Technology*, 2013, 34(5): 347-351.
- [21] 田红亮, 刘芙蓉, 方子帆, 等. 引入各向同性虚拟材料的固定结合部模型 [J]. *振动工程学报*, 2013, 26(4): 561-573.
- TIAN Hongliang, LIU Furong, FANG Zifan, et al. Immobile joint surface's model using isotropic virtual material [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(4): 561-573.
- [22] 杨超. 磨削表面形貌分析与接触特性研究 [D]. 西安: 西安理工大学, 2016: 16-17.
- [23] NAYAK P R. Random process model of rough surfaces [J]. *Journal of Tribology*, 1971, 93(3): 398-407.
- [24] MCCOOL J I. Predicting microfracture in ceramics via a microcontact model [J]. *Journal of Tribology*, 1986, 108(3): 380-385.
- [25] 李志涛, 王世军, 韩子锐, 等. 应用改进分形理论及连续变形理论的机械结合面切向刚度建模 [J]. *西安交通大学学报*, 2020, 54(6): 107-114.
- LI Zhitao, WANG Shijun, HAN Zirui, et al. Modeling of tangential stiffness of mechanical joint surface using improved fractal theory and continuous deformation theory [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2020, 54(6): 107-114.

(编辑 杜秀杰)