

考虑输出约束的机械臂命令滤波反步控制

林孟豪，张蕾，李鹏飞，王晓华，王文杰  
(西安工程大学电子信息学院，710048，西安)

**摘要：**为了提高双连杆柔性关节机械臂系统的轨迹跟踪响应速度与轨迹跟踪精度，提出一种具有输出约束和误差补偿的双连杆柔性关节机械臂命令滤波反步控制策略(BLF-CFBC)。首先，在反步控制设计中构造对数型障碍李雅普诺夫函数来替代常规的二次型李雅普诺夫函数，使得轨迹跟踪误差被约束在预先设定的误差范围内，从而在加快误差收敛速度的同时保证了轨迹跟踪精度；其次，采用命令滤波器输出子系统递推过程中所需的控制函数及其导数，以避免基于李雅普诺夫理论的常规反步控制方法中由于对控制变量的反复求导而导致的计算爆炸的问题，从而有效降低了计算维度；最后，引入误差补偿机制，利用控制变量与滤波器输出之间的误差来构造系统变量，以降低命令滤波器的误差对机械臂跟踪精度的影响。采用 Matlab 搭建系统模型进行仿真实验，结果表明，所提控制策略与不考虑输出约束和误差补偿的命令滤波反步控制策略(CFBC)相比，双连杆柔性关节机械臂关节 1、2 的轨迹跟踪响应速度分别提升了 20%、30%，轨迹跟踪误差分别降低了 4%、3.5%。

**关键词：**双连杆柔性关节机械臂；障碍李雅普诺夫函数；命令滤波；滤波误差

**中图分类号：**TP241 **文献标志码：**A

**DOI：**10.7652/xjtuxb202112009 **文章编号：**0253-987X(2021)12-0070-09



OSID 码

A Backstepping Control Strategy of Command Filtering for Two-Link Flexible Joint Manipulator

LIN Menghao, ZHANG Lei, LI Pengfei, WANG Xiaohua, WANG Wenjie  
(College of Electronics and Information, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** A backstepping control strategy of command filtering with output constraint and error compensation for two-link flexible joint manipulator (named BLF-CFBC) is proposed to achieve the control goal of improving the tracking response speed and tracking accuracy of the two-link flexible joint manipulator system. Firstly, a logarithmic barrier Lyapunov function is constructed to replace the conventional quadratic Lyapunov function in the backstepping control design, so that the trajectory tracking error is constrained within the preset range and the trajectory tracking accuracy is ensured while the error convergence speed is accelerated. Secondly, the control signal and its derivative are output from the command filter so as to avoid the problem of computational explosion caused by the repeated derivation of control variables in conventional backstepping control method based on Lyapunov theory, thus effectively reducing the calculation dimension. Finally, an error compensation mechanism is introduced to construct system variables by using

the errors between the control signal and the output of the filter, so as to reduce the influence of the error of command filter on the tracking accuracy of the manipulator. A two-link flexible joint manipulator system model is built and simulated in Matlab software. Results and a comparison with the command filter backstepping control strategy (CFBC) without considering output constraint and error compensation show that the proposed control strategy increases the trajectory tracking response speed of joint 1 and joint 2 by 20% and 30%, respectively, and the trajectory tracking error reduces by 4% and 3.5%, respectively.

**Keywords:** two-link flexible joint manipulator; barrier Lyapunov function; command filtering; filtering error

柔性关节机械臂具有高适应性、低能耗、质量轻等特点,能够代替人类在航天、高精度制造工艺、医疗等领域进行复杂、危险的工作<sup>[1-2]</sup>。然而,随着关节数量的增加,会导致柔性关节机械臂的响应速度、轨迹跟踪精度等问题变得更加复杂。另外,由于单连杆柔性关节机械臂灵敏度低、应用范围受限,因此降低了单连杆柔性关节机械臂控制策略研究的应用价值。因此,研究双连杆柔性关节机械臂的轨迹跟踪响应速度、轨迹跟踪控制精度等问题具有重要的理论意义和应用价值。

针对以上问题,文献[3]较早地设计出 PD 自适应控制器,提高了柔性关节机械臂的轨迹跟踪精度,但是并未考虑机械臂系统的稳定性问题。文献[4]提出了混合控制策略,优化控制器的设计,并生成混合轨迹,虽然提高了柔性关节机械臂系统的鲁棒性,但是没有考虑机械臂的轨迹跟踪精度。文献[5]提出一种模糊优化控制方法,设计出自适应鲁棒控制器,确保了柔性关节机械臂轨迹跟踪精度,并提高了鲁棒性,但是没有考虑机械臂的轨迹跟踪响应速度问题。文献[6]针对机械臂参数不确定影响轨迹跟踪性能的问题,采用两个 RBF 神经网络同时处理不确定参数,显著提高了轨迹跟踪性能,但并未考虑扰动误差对机械臂系统的影响。文献[7]通过设计一种基于奇异摄动理论的有界控制器,采用模糊逻辑控制参数自动调整,保证了柔性关节机械臂的轨迹跟踪精度和响应速度,但是却增加了机械臂系统的计算复杂度。然而,上述研究内容均未考虑柔性关节机械臂系统的输出约束与计算复杂等问题对提高机械臂系统轨迹跟踪响应速度与轨迹跟踪精度的影响。

为了保证机械臂系统的轨迹跟踪精度,需要将系统的跟踪误差约束在预先设定的范围内。目前针对此类研究的方法主要有模型预测控制<sup>[8]</sup>, Funnel 控制<sup>[9]</sup>和障碍李雅普诺夫函数(barrier Lyapunov function, BLF)<sup>[10]</sup>等。文献[11]基于常对数型障碍

李雅普诺夫函数,提出全状态反馈神经网络控制策略,保证了柔性关节机械臂的轨迹跟踪精度,提高了系统的鲁棒性,但并未考虑机械臂系统的轨迹跟踪响应速度问题。文献[12]基于时变正切型障碍李雅普诺夫函数,提出了一种自适应控制策略,解决了带有输出约束和模型不确定的柔性关节机械臂轨迹跟踪响应速度较慢的问题。然而,障碍李雅普诺夫函数的应用会造成系统的计算难度增大。文献[13]针对柔性关节机械臂计算量大、计算困难等问题,设计了命令滤波控制器,降低了计算难度,但是该方法并没有考虑到命令滤波器带来的滤波误差对整个控制系统的影响。

鉴于上述分析,本文提出一种具有输出约束和误差补偿的双连杆柔性关节机械臂命令滤波反步控制(barrier Lyapunov function with command-filtered backstepping control, BLF-CFBC)策略。首先采用常对数型障碍李雅普诺夫函数设计虚拟控制函数,约束机械臂系统的轨迹跟踪误差;接着采用命令滤波器得到滤波后的虚拟控制函数及其导数,降低反步法中的计算维度,并引用滤波补偿机制,减少滤波误差对整体系统的影响;最后,通过仿真实验,证明了本文所提控制策略能够达到提高双连杆柔性关节机械臂系统轨迹跟踪响应速度与轨迹跟踪精度的控制目标。本文主要创新点如下:

(1) 利用常对数型障碍李雅普诺夫函数解决了双连杆柔性关节机械臂系统的输出约束问题;

(2) 在双连杆柔性关节机械臂模型反步递推控制律过程中,采用命令滤波器降低了计算复杂度;

(3) 通过引入误差补偿机制减少了采用命令滤波器带来的误差,并证明了系统补偿后的跟踪误差有界性。

## 1 系统描述与控制目标

本文以双连杆柔性关节机械臂模型作为被控对

象,其结构示意图如图1所示。

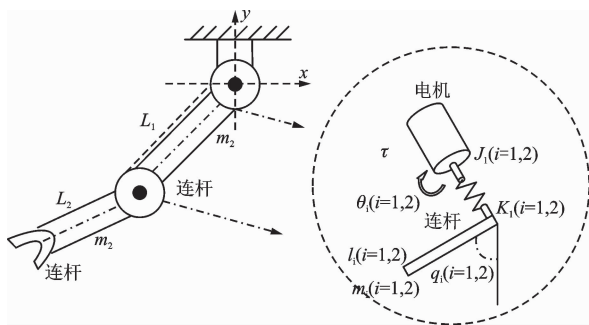


图1 双连杆柔性关节机械臂示意图

Fig. 1 Schematic diagram of a two-link flexible joint manipulator

根据文献[14],建立双连杆柔性关节机械臂系统的动力学模型如下

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{G}(\mathbf{g}_i) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_i - \mathbf{q}_i) \\ \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_i - \mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $i=1,2$ ;  $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i$  ( $i=1,2$ )  $\in \mathbf{R}^n$  分别表示为连杆转动角位移,速度和加速度;  $\boldsymbol{\theta}_i, \dot{\boldsymbol{\theta}}_i, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i$  ( $i=1,2$ )  $\in \mathbf{R}^n$  分别表示为驱动电动机角位移,速度和加速度;  $\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)$  ( $i=1,2$ )  $\in \mathbf{R}^{n \times n}$  为机械臂的惯性矩阵;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i$  ( $i=1,2$ )  $\in \mathbf{R}^{n \times n}$  为哥氏力与离心力矩阵;  $\mathbf{G}(\mathbf{q}_i)$  ( $i=1,2$ )  $\in \mathbf{R}^n$  为重力项;  $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示为对角正定的关节刚度矩阵;  $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示为电机转动惯量的对角矩阵;  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为电机控制力矩矩阵。

首先,定义二维状态变量  $\mathbf{x}_{1i} = \mathbf{q}_i$  ( $i=1,2$ ),  $\mathbf{x}_{2i} = \dot{\mathbf{q}}_i$  ( $i=1,2$ ),  $\mathbf{x}_{3i} = \boldsymbol{\theta}_i$  ( $i=1,2$ ),  $\mathbf{x}_{4i} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_i$  ( $i=1,2$ ), 则式(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{1i} = \dot{\mathbf{x}}_{2i} \\ \dot{\mathbf{x}}_{2i} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i})^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_{3i} - \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i})^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_{1i} - \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{x}_{2i})\mathbf{x}_{2i} - \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i})^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{x}_{1i}) \\ \dot{\mathbf{x}}_{3i} = \mathbf{x}_{4i} \\ \dot{\mathbf{x}}_{4i} = \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{x}_{1i} - \mathbf{x}_{3i}) \end{cases} \quad (2)$$

**假设1**<sup>[15]</sup> 矩阵  $\mathbf{M}(\mathbf{q}_i)$  ( $i=1,2$ )  $\in \mathbf{R}^{n \times n}$  为正定对称矩阵。

**假设2**<sup>[15]</sup> 期望轨迹  $\mathbf{q}_{di}$  ( $i=1,2$ ) 及其导数连续且有界。

本文的控制目标是设计一个具有输出约束和误差补偿的双连杆柔性关节机械臂命令滤波反步控制策略,在保证系统中所有信号有界的前提下,使得系统的输出  $\mathbf{q}_i$  ( $i=1,2$ ) 可以跟踪期望轨迹  $\mathbf{q}_{di}$  ( $i=1,2$ ),并且跟踪误差  $\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}$  ( $i=1,2$ ) 可以收敛到原点

附近的一个领域内。

## 2 命令滤波及障碍李雅普诺夫函数

本文所采用的二阶命令滤波器定义如下<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} \dot{z}_{i,1} = \omega_n z_{i,2} \\ \dot{z}_{i,2} = -2\zeta\omega_n z_{i,2} - \omega_n(z_{i,1} - \alpha_i) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $z_{i,2} = \alpha_{i,c}$ ,  $\dot{\alpha}_{i,c} = \omega_n z_{i,2}$  分别为命令滤波器的两个输出信号;  $\alpha_i$  为命令滤波器的输入信号; 滤波初始状态  $\alpha_i(0) = z_{i,1}(0)$ ,  $z_{i,2}(0) = 0$ 。当  $t \geq 0$  时,若输入信号  $\alpha_i$  满足  $|\dot{\alpha}_i| \leq \rho_1$ ,  $|\ddot{\alpha}_i| \leq \rho_2$ ,  $\rho_1, \rho_2$  为正常数,则对于任意的  $\mu > 0$ ,存在  $\zeta \in (0, 1]$ ,  $\omega_n \geq 0$ , 则有  $\alpha_{i,c} - \alpha_i$  ( $i=1,2,3$ )  $\leq \mu$ ,  $\dot{\alpha}_{i,c} - \dot{\alpha}_i$  ( $i=1,2,3$ )  $\leq \mu$ 。

本文所采用障碍李雅普诺夫函数定义如下。

**定义1**<sup>[17]</sup>  $V(x)$  为标量函数,是定义在包含原点的开区域  $D$  上的关于  $\dot{x} = f(x)$  的标量函数,它是连续且正定的,在  $D$  上的每个点都有连续的一阶偏导数,当  $x$  趋近于  $D$  的边界时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 并满足当  $x(0) \in D$  时,  $\forall t > 0$ ,  $V(x) \leq b$ ,  $b$  为正常数,则称这样的标量函数  $V(x)$  为障碍李雅普诺夫函数。

**定义2**<sup>[18]</sup> 传统对数型障碍李雅普诺夫函数表达式为

$$V_{in} = \frac{1}{2} \ln \frac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2 - v_i^2} \quad (4)$$

式中:  $\ln(\cdot)$  为自然对数,  $i=1,2,3,4$ ;  $v_i$  为系统误差变量;  $k_{bi} > 0$  为约束边界,满足  $|v(0)| < k_{bi}$ , 当  $k_{bi} \rightarrow \infty$  时,可得  $\ln(0) \rightarrow 0$ 。

**引理1**<sup>[19]</sup> 对任意常数  $k_{bi}$ , 若  $Z_1 = \{z_1 \in \mathbf{R}: -k_{b1} < z_1 < k_{b1}\} \in \mathbf{R}$ , 且  $M \in \mathbf{R}^{l+1}$  均为开集, 其中  $l$  为正常数,考虑如下系统

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{h}(t, \boldsymbol{\eta}) \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{\eta} = [\omega, z_1]^T \in M$ ,  $\omega \in \mathbf{R}^l$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $\mathbf{h}$  为在定义域中关于  $t$  分段连续且满足局部 Lipschitz 条件。假设存在函数  $U: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^+$  和  $V_1: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^+$  在各自定义域上连续可微且正定,那么:

$$V_1(z_1) \rightarrow \infty, z_1 \rightarrow -k_{b1} \text{ 或 } z_1 \rightarrow k_{b1} \quad (6)$$

$$\gamma_1(\|\omega\|) \leq U(\|\omega\|) \leq \gamma_2(\|\omega\|) \quad (7)$$

式中,  $\gamma_1(\cdot)$ ,  $\gamma_2(\cdot)$  为  $K_\infty$  函数。取  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) = V_1(z, t) + U(\omega)$ ,  $z_1(0) \in Z_1$ , 则

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{h} \leq 0 \quad (8)$$

成立,故  $z_1(t)$  有界,  $z_1 \in (-k_{b1}, k_{b1})$ ,  $\forall t \in [0, +\infty)$ , 系统的解  $\boldsymbol{\eta}(t)$  一致最终有界,并且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $z_i(t) \rightarrow 0$ , ( $i=1,2, \dots, n$ )。

**引理2**<sup>[20]</sup> 对任意正常数  $k_{bi}$  和向量  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3, \dots]$

$v_4]^T$  (其中  $v_i$  为系统误差变量,  $i=1,2,3,4$ ), 若

$$\|v_i\| < k_{bi}, \text{ 则 } \ln \frac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2 - v_i^T v_i} \leq \frac{v_i^T v_i}{k_{bi}^2 - v_i^T v_i}.$$

### 3 控制器设计

在本节中, 针对式(1)双连杆柔性关节机械臂模型, 设计具有输出约束和误差补偿的命令滤波反步控制(BLF-CFBC)策略, 使得双连杆柔性关节机械臂的输出轨迹能够精准跟踪期望轨迹。

控制器具体设计思路如下:

(1) 对双连杆柔性关节机械臂动力学模型式(1), 选取系统的状态变量并转换为四阶系统模型式(2), 再采用反步法对系统模型进行降阶, 选取状态变量作为虚拟控制输入, 设计系统误差变量;

(2) 在思路(1)的基础上对前两阶子系统引入障碍李雅普诺夫函数, 解决系统输出约束问题;

(3) 在思路(2)的基础上通过采用命令滤波器得到虚拟控制函数及其导数, 降低系统控制器的设计复杂度并引入误差补偿机制降低滤波误差对系统的影响。

定义系统误差变量为:  $z_{1i} = x_{1i} - x_{1di} (i=1,2)$ ,  $z_{2i} = x_{2i} - \alpha_{1i,c} (i=1,2)$ ,  $z_{3i} = x_{3i} - \alpha_{2i,c} (i=1,2)$ ,  $z_{4i} = x_{4i} - \alpha_{3i,c} (i=1,2)$ , 其中  $x_{1di} = g_{di} (i=1,2)$ ,  $\alpha_{xi} (x=1,2,3; i=1,2)$  为虚拟控制函数,  $\alpha_{xi,c} (x=1,2,3; i=1,2)$  为经过命令滤波器后的虚拟控制函数。由于命令滤波器的使用会产生滤波误差, 从而影响系统的整体性能。本文通过引入误差补偿变量来控制滤波误差对系统的整体影响。

由文献[21]可知, 定义补偿后的误差变量为

$$v_{1i} = z_{1i} - \zeta_{1i} (i=1,2), v_{2i} = z_{2i} - \zeta_{2i} (i=1,2)$$

$$v_{3i} = z_{3i} - \zeta_{3i} (i=1,2), v_{4i} = z_{4i} - \zeta_{4i} (i=1,2)$$

式中:  $\zeta_{xi} = \alpha_{xi,c} - \alpha_{xi} (x=1,2,3; i=1,2)$ ,  $\zeta_{4i} = 0 (i=1,2)$ , 满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta_{xi}\| \leq \frac{\mu \rho}{k_0} (x=1,2,3,4; i=1,2)$ ;  $\mu$ 、 $\rho$  和  $k_0$  为正常数;  $\Omega_v = \{ \|v_i\| < k_{bi}, i=1,2,3,4 \}$ 。

**引理 3**<sup>[22]</sup>  $\dot{M}(x_{1i}) - 2C(x_{1i}, x_{2i}) (i=1,2)$  为反对称矩阵, 使得  $\xi^T (\dot{M}(x_{1i}) - 2C(x_{1i}, x_{2i})) (i=1,2)$ ;  $\xi = 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ 。

本文采用反步法逆推地设计控制器, 设计过程分为以下 4 个步骤。

**第 1 步** 选取补偿后的误差变量为

$$v_{1i} = z_{1i} - \zeta_{1i} \quad (9)$$

对式(9)求导

$$\dot{v}_{1i} = \dot{x}_{1i} - \dot{v}_{1di} - \dot{\zeta}_{1i} \quad (10)$$

根据定义 1 和定义 2, 构造障碍李雅普诺夫函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}} \quad (11)$$

根据障碍李雅普诺夫函数的定义 1 与定义 2 可知, 系统的误差变量  $v_i (i=1,2,3,4)$  是有界的; 由假设 2 可知, 系统的期望轨迹  $q_{di} = x_{di} (i=1,2)$  及其导数连续有界。基于上述分析可知, 系统状态变量  $x_{1i} = q_i (i=1,2)$ ;  $x_{2i} = \dot{q}_i (i=1,2)$ ;  $x_{3i} = \theta_i (i=1,2)$ ;  $x_{4i} = \dot{\theta}_i (i=1,2)$  是有界的, 即机械臂系统中连杆转动角位移, 速度以及驱动电机角位移, 速度有界。

对式(11)求导, 得

$$\dot{V}_1 = \frac{v_{1i}^T \dot{v}_{1i}}{k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}} = \frac{v_{1i}^T}{k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}} (\dot{x}_{1i} - \dot{x}_{1di} - \dot{\zeta}_{1i}) \quad (12)$$

设计虚拟控制函数  $\alpha_{1i} (i=1,2)$  和误差补偿变量  $\zeta_{1i} (i=1,2)$  的导数为

$$\alpha_{1i} = -k_1 (k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}) v_{1i} - k_1 \zeta_{1i} + \dot{x}_{1di} \quad (13)$$

$$\dot{\zeta}_{1i} = -k_1 \zeta_{1i} + (\alpha_{1i,c} - \alpha_{1i}) + \zeta_{2i} \quad (14)$$

式中:  $k_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为正定对称常数矩阵。

将式(13)(14)代入式(12), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{v_{1i}^T}{k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}} (x_{2i} - \alpha_{1i} - k_1 (k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}) v_{1i} - \\ &k_1 \zeta_{1i} + \dot{x}_{1di} - \dot{\zeta}_{1i}) = -v_{1i}^T k_1 v_{1i} + \frac{v_{1i}^T}{k_{b1}^2 - v_{1i}^T v_{1i}} v_{2i} \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)可知, 当  $v_{2i} = 0 (i=1,2)$  时,  $\dot{V}_1 \leq 0$ 。

**第 2 步** 选取补偿后的误差变量

$$v_{2i} = z_{2i} - \zeta_{2i} \quad (16)$$

对式(16)求导

$$\dot{v}_{2i} = \dot{z}_{2i} - \dot{\zeta}_{2i} = \dot{x}_{2i} - \dot{\alpha}_{1i,c} - \dot{\zeta}_{2i} \quad (17)$$

构造李雅普诺夫函数为

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} v_{2i}^T M(x_{1i}) v_{2i} \quad (18)$$

对式(18)求导, 得

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \frac{1}{2} v_{2i}^T \dot{M}(x_{1i}) v_{2i} + v_{2i}^T M(x_{1i}) \dot{v}_{2i} \quad (19)$$

设计虚拟控制函数  $\alpha_{2i} (i=1,2)$  和误差补偿变量  $\zeta_{2i} (i=1,2)$  的导数为

$$\begin{aligned} \alpha_{2i} &= K^{-1} (-k_2 (k_{b1}^2 - z_{1i}^2) v_{2i} - \frac{z_{1i}^T}{k_{b1}^2 - z_{1i}^T z_{1i}} + \\ &M(x_{1i}) \dot{\alpha}_{1i,c} + C(x_{1i}, x_{2i}) (\alpha_{1i,c} + \alpha_{2i}) + G(x_{1i}) + \\ &Kx_{2i} - k_2 \zeta_{2i} + k_2 (k_{b1}^2 - z_{1i}^2) \zeta_{2i}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{\zeta}_{2i} = M(x_{1i})^{-1} (-k_2 \zeta_{2i} + K(\alpha_{2i,c} - \alpha_{2i}) + K\zeta_{3i}) \quad (21)$$

式中  $k_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为正定对称常数矩阵。

通过引理 3, 将式(20)(21)代入(19), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_2 &= \dot{\mathbf{V}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i}) \dot{\mathbf{v}}_{2i} = \\ &= -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} + \frac{\mathbf{v}_{1i}^T}{k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{2i}} \mathbf{v}_{2i} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} + \\ &= \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i}) (\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{a}}_{1,c} - \dot{\xi}_{2i}) = \\ &= -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}_{2i} (k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{K} \mathbf{v}_{3i} \end{aligned} \quad (22)$$

由式(22)可知, 当  $\mathbf{v}_{3i}=0 (i=1, 2)$  时,  $\dot{\mathbf{V}}_2 \leq 0$ 。

**第 3 步** 选取补偿后的误差变量为

$$\mathbf{v}_{3i} = \mathbf{z}_{3i} - \xi_{3i} \quad (23)$$

对式(23)求导, 得

$$\dot{\mathbf{v}}_{3i} = \dot{\mathbf{z}}_{3i} - \dot{\xi}_{3i} = \dot{\mathbf{x}}_{3i} - \dot{\mathbf{a}}_{2,c} - \dot{\xi}_{3i} \quad (24)$$

构造李雅普诺夫函数为

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{v}_{3i} \quad (25)$$

对式(25)求导, 得

$$\dot{\mathbf{V}}_3 = \dot{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{v}_{3i}^T \dot{\mathbf{v}}_{3i} = \dot{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{v}_{3i}^T (\dot{\mathbf{x}}_{3i} - \dot{\mathbf{a}}_{2,c} - \dot{\xi}_{3i}) \quad (26)$$

设计虚拟控制函数  $\alpha_{3i} (i=1, 2)$  和误差补偿变量  $\xi_{3i} (i=1, 2)$  的导数为

$$\alpha_{3i} = -\mathbf{k}_3 (\mathbf{v}_{3i} + \xi_{3i}) + \dot{\mathbf{a}}_{2,c} - \mathbf{K} \mathbf{v}_{2i} \quad (27)$$

$$\dot{\xi}_{3i} = -\mathbf{k}_3 \xi_{3i} + (\alpha_{3i,c} - \alpha_{3i}) + \xi_{4i} \quad (28)$$

式中,  $\mathbf{k}_3 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为正定对称常数矩阵。

将式(27)(28)代入(26)可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_3 &= \dot{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{v}_{3i}^T (\dot{\mathbf{x}}_{3i} - \dot{\mathbf{a}}_{2,c} - \dot{\xi}_{3i}) = \\ &= -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}_2 (k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{K} \mathbf{v}_{3i} + \\ &= \mathbf{v}_{3i}^T (\mathbf{v}_{4i} - \mathbf{k}_3 \mathbf{v}_{3i} - \dot{\mathbf{a}}_{2,c} - \mathbf{K} \mathbf{v}_{2i} - \dot{\xi}_{4i}) = \\ &= -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}_2 (k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} - \\ &= \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{v}_{3i} + \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{v}_{4i} \end{aligned} \quad (29)$$

由式(29)可知, 当  $\mathbf{v}_{4i}=0 (i=1, 2)$  时,  $\dot{\mathbf{V}}_3 \leq 0$ 。

**第 4 步** 选取补偿后的误差变量为

$$\mathbf{v}_{4i} = \mathbf{z}_{4i} - \xi_{4i} \quad (30)$$

对式(30)求导, 得

$$\dot{\mathbf{v}}_{4i} = \dot{\mathbf{z}}_{4i} - \dot{\xi}_{4i} = \dot{\mathbf{x}}_{4i} - \dot{\mathbf{a}}_{3,c} - \dot{\xi}_{4i} \quad (31)$$

构造李雅普诺夫函数为

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{4i}^T \mathbf{v}_{4i} \quad (32)$$

对式(32)求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_4 &= \dot{\mathbf{V}}_3 + \mathbf{J} \mathbf{v}_{4i}^T \dot{\mathbf{v}}_{4i} = \dot{\mathbf{V}}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{4i}^T \dot{\mathbf{J}} \mathbf{v}_{4i} + \mathbf{v}_{4i}^T \mathbf{J} (\dot{\mathbf{x}}_{4i} - \dot{\mathbf{a}}_{3,c} - \dot{\xi}_{4i}) \\ &= \end{aligned} \quad (33)$$

在这一步中出现了系统的真实控制函数, 设计

控制律  $\tau$  为

$$\tau = -\mathbf{k}_4 \mathbf{z}_{4i} - \mathbf{v}_{3i} - \mathbf{K}(\mathbf{x}_{1i} - \mathbf{x}_{3i}) + \mathbf{J} \dot{\mathbf{a}}_{3i,c} \quad (34)$$

根据文献[21]设计系统的误差补偿变量  $\xi_{4i} (i=1, 2)$  的导数为

$$\dot{\xi}_{4i} = 0 \quad (35)$$

式中,  $\mathbf{k}_4 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为正定对称常数矩阵。

将式(34)(35)代入(33), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_4 &= \dot{\mathbf{V}}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{4i}^T \dot{\mathbf{J}} \mathbf{v}_{4i} + \mathbf{v}_{4i}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{v}}_{4i} = \\ &= -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}_2 (k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} - \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{K} \mathbf{v}_{3i} + \\ &= \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{v}_{4i} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{4i}^T \dot{\mathbf{J}} \mathbf{v}_{4i} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{J} (\dot{\mathbf{x}}_{4i} - \dot{\mathbf{a}}_{3i,c}) = \\ &= -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}_2 (k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} - \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{v}_{3i} - \mathbf{v}_{4i}^T \mathbf{k}_4 \mathbf{v}_{4i} \end{aligned} \quad (36)$$

综上所述, 由式(36)可得  $\dot{\mathbf{V}}_4 \leq 0$ 。

## 4 稳定性证明

**引理 4**<sup>[23]</sup> 针对  $V: [0, +\infty) \in \mathbf{R}$ , 不等式方程  $\dot{V} \leq -\alpha V + f, \forall t \geq t_0 \geq 0$  的解为

$$V(t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} V(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-h)} f(h) dh \quad (37)$$

式中,  $\alpha$  为任意常数。

选取整个系统的李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= \frac{1}{2} \ln \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} + \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{v}_{3i} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{4i}^T \mathbf{J} \mathbf{v}_{4i} \end{aligned} \quad (38)$$

对式(38)求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_s &= \frac{\mathbf{v}_{1i}^T \dot{\mathbf{v}}_{1i}}{k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{2i}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{M}(\mathbf{x}_{1i}) \dot{\mathbf{v}}_{2i} + \\ &= \mathbf{v}_{3i}^T (\dot{\mathbf{x}}_{3i} - \dot{\mathbf{a}}_{2,c} - \dot{\xi}_{3i}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{4i}^T \dot{\mathbf{J}} \mathbf{v}_{4i} + \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{J} (\dot{\mathbf{x}}_{1i} - \dot{\mathbf{a}}_{3i,c}) \end{aligned} \quad (39)$$

通过引理 2, 将虚拟控制律(13)(20)(27)和控制律(34)代入式(39), 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_s &\leq -\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}^T \mathbf{k}_2 (k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}) \mathbf{v}_{2i} - \\ &= \mathbf{v}_{3i}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{v}_{3i} - \mathbf{v}_{4i}^T \mathbf{k}_4 \mathbf{v}_{4i} \end{aligned} \quad (40)$$

式中,  $\dot{\mathbf{V}}_s$  可进一步表示为

$$\dot{\mathbf{V}}_s \leq -\phi \mathbf{V} \quad (41)$$

其中  $\phi = 2 \min(k_1, \frac{\mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{k}_1}{k_{b1}^2 - \mathbf{v}_{1i}^T \mathbf{v}_{1i}}, k_2, k_2 M(\mathbf{x}_{1i})^{-1}, k_3, k_4, k_4 \mathbf{J}^{-1}) (i=1, 2)$ 。

由引理 4 可知, 式(41)的解为

$$\mathbf{V}_s(t) \leq e^{-\phi(t-t_0)} \mathbf{V}(t_0) \quad (42)$$

由式(42)可得,  $\mathbf{V}_s$  指数收敛至零, 收敛速度取

决于  $\varphi$ , 并且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{z}_{1i} \rightarrow 0 (i=1,2)$ ,  $\mathbf{z}_{2i} \rightarrow 0 (i=1,2)$ ,  $\mathbf{z}_{3i} \rightarrow 0 (i=1,2)$ ,  $\mathbf{z}_{4i} \rightarrow 0 (i=1,2)$ 。

由补偿后的误差变量定义可知

$$\mathbf{v}_{xi} = \mathbf{z}_{xi} - \boldsymbol{\zeta}_{xi} (x=1,2,3,4; i=1,2) \quad (43)$$

根据  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\zeta}_{xi}\| \leq \frac{\mu_0}{k_0} (x=1,2,3,4; i=1,2)$ , 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_{xi}\| \leq \frac{\mu_0}{k_0} (x=1,2,3,4; i=1,2) \quad (44)$$

根据  $k_0$  的定义以及引理 1 可知, 通过调节命令滤波参数与设计参数  $k_i (i=1,2,3,4)$  可以保证系统补偿后的跟踪误差  $\mathbf{v}_{1i} (i=1,2)$  有界, 且能够收敛到原点附近的一个领域内。

由控制律表达式 (34) 可知系统控制器输出有界, 根据假设 1 与假设 2, 通过调用引理 1, 可证得补偿后的机械臂系统所有闭环信号可保证一致最终有界。由于  $\mathbf{V}_s(t)$  有界,  $\forall t \geq 0$ , 根据定义 1 与定义 2 可得  $\mathbf{V}_1(\mathbf{z}_{1i}) \rightarrow \infty (i=1,2)$ ,  $|\mathbf{z}_{1i}| \rightarrow k_{b1} (i=1,2)$ ,  $|\mathbf{z}_{1i}| \neq k_{b1}$ , 即输出约束得到满足。

## 5 仿真验证

为了验证本文所提 BLF-CFBC 控制策略的有效性, 对图 1 所示的双连杆柔性关节机械臂模型进行数值仿真。并将仿真结果与不具有输出约束和误差补偿的双连杆柔性关节机械臂命令滤波反步控制策略(CFBC)的结果进行对比, 其中 CFBC 与 BLF-CFBC 策略的参数设计如下

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} \\ \mathbf{G}_{21} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2\cos(q_2) \\ \mathbf{M}_{12} &= \mathbf{M}_{21} = m_2(l_2^2 + l_1l_2\cos(q_2)) \\ \mathbf{M}_{22} &= m_2l_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{11} &= (m_1 + m_2)gl_1\cos(q_1) + m_2gl_2\cos(q_1 + q_2) \\ \mathbf{G}_{21} &= m_2l_2g\cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_{11} &= -2m_2l_1l_2\dot{q}_2\sin(q_2) \\ \mathbf{C}_{21} &= m_2l_1l_2\dot{q}_1\sin(q_2) \\ \mathbf{C}_{12} &= -m_2l_1l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_2) \\ \mathbf{C}_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

其中  $q_1, q_2$  为机械臂关节的旋转角度,  $g$  为重力加速度。

初始关节位置为  $\mathbf{q}_i (i=1,2)$ , 跟踪的期望轨迹为  $\mathbf{q}_{di} (i=1,2) = \sin(t)$ 。仿真参数设计为:  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.85 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.35 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0.31 \text{ m}$ ,  $I_1 = 0.06125 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_2 = 0.02042 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4$  为单位矩阵,  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.243 & 0 \\ 0 & 0.243 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}$ , 命令滤波参数  $\omega_n = 2000$ ,  $\zeta = 0.5$ , BLF-CFBC 中  $\pm k_{b1} = \pm 0.14$ 。在上述参数下, 针对双连杆柔性关节机械臂进行仿真验证, 仿真验证结果如图 2 所示。

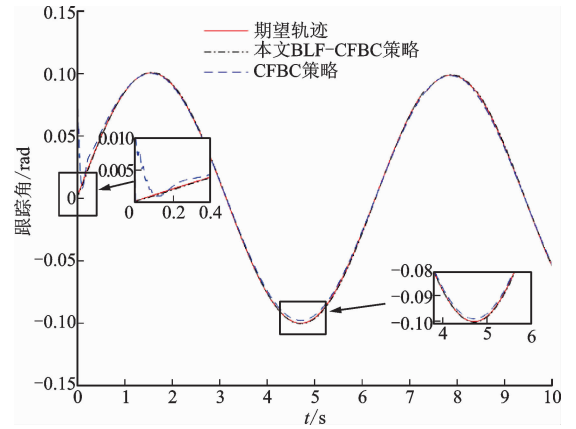


图 2 关节 1 轨迹跟踪响应曲线

Fig. 2 Trajectory tracking response curve of joint 1

图 2 为 CFBC 策略与 BLF-CFBC 策略下, 双连杆柔性关节机械臂关节 1 的轨迹跟踪响应曲线图。其中, CFBC 策略下关节 1 在 0.1 s 后能够跟踪上期望轨迹曲线, 而 BLF-CFBC 策略在 0.08 s 就能够跟踪上期望轨迹曲线, 轨迹跟踪响应速度提升 20%。

图 3 表示 CFBC 策略与 BLF-CFBC 策略下, 双连杆柔性关节机械臂关节 2 的轨迹跟踪响应曲线图, 从图中可以看出, CFBC 策略下关节 2 在 0.2 s 后才能跟踪上期望轨迹曲线, 本研究所提 BLF-CFBC 策略下, 关节 2 在 0.14 s 后能够跟踪上期望轨迹曲线, 其轨迹跟踪响应速度提升了 30%。

图 4 表示 CFBC 策略下, 双连杆柔性关节机械臂关节 1 与关节 2 的轨迹跟踪误差曲线图, 图 5 表示 BLF-CFBC 策略下, 双连杆柔性关节机械臂关节

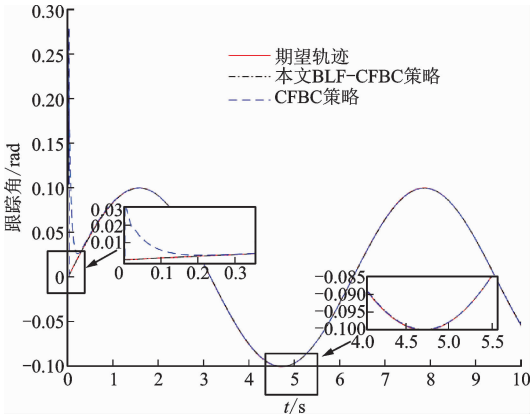
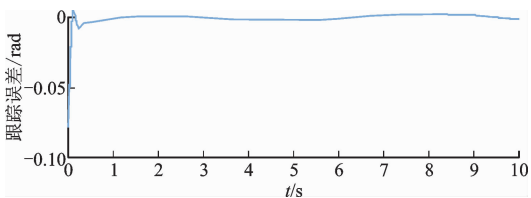
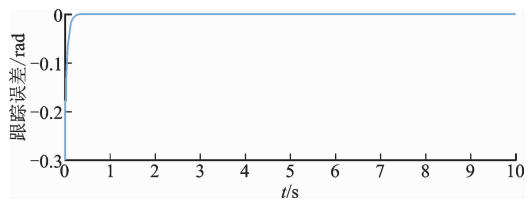


图 3 关节 2 轨迹跟踪响应曲线

Fig. 3 Trajectory tracking response curve of joint 2



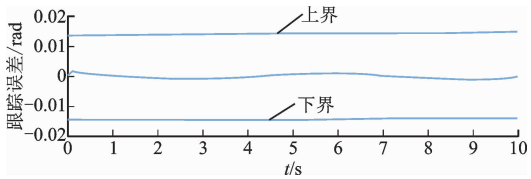
(a) 关节 1



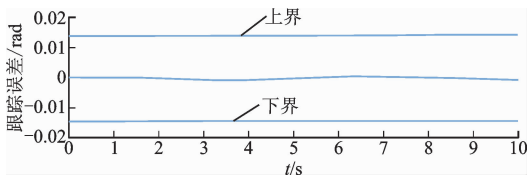
(b) 关节 2

图 4 CFBC 策略下轨迹跟踪误差曲线

Fig. 4 Curves of trajectory tracking error under CFBC strategy



(a) 关节 1



(b) 关节 2

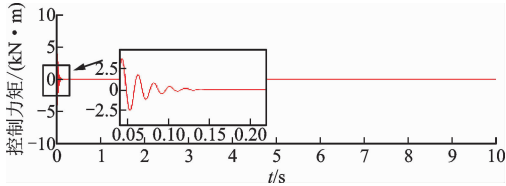
图 5 BLF-CFBC 策略下轨迹跟踪误差曲线

Fig. 5 Curves of trajectory tracking error under the proposed BLF-CFBC strategy

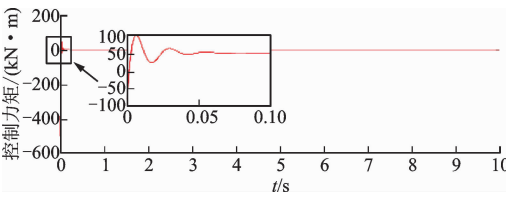
1 与关节 2 的轨迹跟踪误差曲线图。

由图 4、5 可知,对于双连杆柔性关节机械臂系统,CFBC 策略的轨迹跟踪误差较大,而本文所提 BLF-CFBC 策略的轨迹跟踪误差明显减小。由于障碍李雅普诺夫函数的应用,可将轨迹跟踪误差约束在  $-k_b$  与  $k_b$  之间,  $k_b > 0$  为约束边界,并且在误差波形稳定后,相比于 CFBC 策略,在 BLF-CFBC 策略下关节 1 的轨迹跟踪误差减少 4%,关节 2 的轨迹跟踪误差减小 3.5%,表明所提控制策略有效地提高了机械臂系统的轨迹跟踪精度。

图 6 为 CFBC 策略下双连杆柔性关节机械臂关节 1 与关节 2 的控制力矩曲线图。



(a) 关节 1

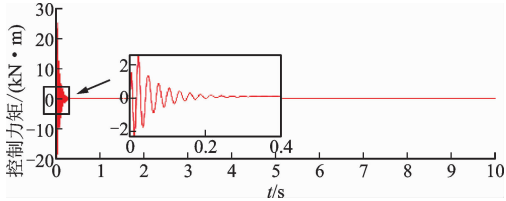


(b) 关节 2

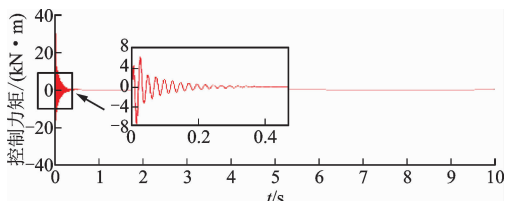
图 6 CFBC 策略下关节控制力矩曲线

Fig. 6 Curves of joint control torque under CFBC strategy

图 7 为本文所提 BLF-CFBC 策略下关节 1 与关节 2 的控制力矩曲线图。综合图 6 和图 7 可见,



(a) 关节 1



(b) 关节 2

图 7 BLF-CFBC 策略下关节控制力矩曲线

Fig. 7 Curves of joint control torque under the proposed BLF-CFBC strategy

本文所提 BLF-CFBC 策略,控制力矩曲线峰值较小,意味着对机械臂中的电机损耗较小,而 CFBC 策略下控制力矩曲线峰值较大,可能会对机械臂中的电机造成强烈冲击。

综合以上仿真结果可以得出:本文所提 BLF-CFBC 策略与 CFBC 策略相比较,双连杆柔性关节机械臂的轨迹跟踪响应速度与轨迹跟踪精度有明显的提高,能够达到较好的控制目标。

## 6 结 论

本文以提高柔性关节机械臂轨迹跟踪响应速度和控制精度为目标,提出一种在常规反步控制算法中结合对数型障碍李雅普诺夫函数和命令滤波器算法的控制策略。通过构造障碍李雅普诺夫函数加快轨迹跟踪速度,同时将轨迹跟踪误差约束在设定的误差范围内;通过引入命令滤波器避免了常规反步法在高阶系统设计时对控制变量反复求导导致的计算爆炸的问题;设计命令滤波器误差补偿机制以削弱采用滤波器产生的误差对跟踪精度的影响。理论证明验证了本文所设计的控制策略可以保证轨迹跟踪误差的有界约束和所有闭环系统中的信号的一致最终有界。仿真结果表明,本文所提策略相比于不具有输出约束和误差补偿的命令滤波反步控制策略,其控制精度和跟踪误差收敛时间都有提高。

未来的工作将会考虑在状态变量部分未知的情况下,引入观测器设计等控制算法<sup>[24-25]</sup>,从而克服本文所提策略中所有状态变量必须全部已知的约束条件。

### 参考文献:

- [1] HE Wei, HE Xiuyu, ZOU Mingfo, et al. PDE model-based boundary control design for a flexible robotic manipulator with input backlash [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2019, 27(2): 790-797.
- [2] CHEN Ti, SHAN Jinjun. Distributed control of multiple flexible manipulators with unknown disturbances and dead-zone input [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(11): 9937-9947.
- [3] LEE T H, GE S S, WANG Z P. Adaptive robust controller design for multi-link flexible robots [J]. Mechatronics, 2002, 11(8): 951-967.
- [4] LEE S H, LEE C W. Hybrid control scheme for robust tracking of two-link flexible manipulator [J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2002, 34(4): 431-452.
- [5] DONG Fangfang, ZHAO Xiaomin, HANG Jiang, et al. Optimal fuzzy adaptive control for uncertain flexible joint manipulator based on D-operation [J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(9): 1286-1298.
- [6] 杨亮, 陈勇, 刘治. 基于参数不确定机械臂系统的自适应轨迹跟踪控制 [J]. 控制与决策, 2019, 34(11): 2485-2490.  
YANG Liang, CHEN Yong, LIU Zhi. Adaptive trajectory tracking control for manipulator with uncertain dynamics and kinematics [J]. Control and Decision, 2019, 34(11): 2485-2490.
- [7] 刘华山, 金元林, 程新, 等. 力矩输入有界的柔性关节机器人轨迹跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2019, 36(6): 983-992.  
LIU Huashan, JIN Yuanlin, CHENG Xin, et al. Trajectory tracking control for flexible-joint robot manipulators with bounded torque inputs [J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(6): 983-992.
- [8] NA Jing, HUANG Yingbo, WU Xing, et al. Active adaptive estimation and control for vehicle suspensions with prescribed performance [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018, 11(6): 2063-2077.
- [9] WANG Shubo, NA Jing, REN Xuemei, et al. Unknown input observer-based robust adaptive funnel motion control for nonlinear servomechanisms [J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2018, 28(18): 6163-6179.
- [10] 徐张宝, 朱忠领, 马大为, 等. 考虑状态约束的液压系统自适应控制 [J]. 西安交通大学学报, 2017, 51(1): 97-102.  
XU Zhangbao, ZHU Zhongling, MA Dawei. Adaptive control of hydraulic systems with state constraints [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2017, 51(1): 97-102.
- [11] HE W, YAN Z, SUN Y, et al. Neural-learning-based control for a constrained robotic manipulator with flexible joints [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(12): 5993-6003.
- [12] 陈强, 丁科新, 南余荣. 带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制 [J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 387-394.  
CHEN Qiang, DING Kexing, NAN Yurong. Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints [J]. Control and Decision, 2021, 36(2): 387-39.

- [13] AHAND J J, MBEDE J B, MELINGUI A, et al. Robust adaptive command filtered control of a robotic manipulator with uncertain dynamic and joint space constraints [J]. *Robotica*, 2018, 36(5): 767-786.
- [14] SPONG M W. Modeling and control of elastic joint robots [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1987, 109(4): 310-319.
- [15] SUN Wei, SU Shunfeng, XIA Jingwei, et al. Adaptive fuzzy tracking control of flexible-joint robots with full-state constraints [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 49(11): 2201-2209.
- [16] LING Song, WANG Huanqing, LIU P X. Adaptive fuzzy tracking control of flexible-joint robots based on command filtering [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(5): 4046-4055.
- [17] HE Wei, CHEN Yuhao, YIN Zhao. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 46(3): 620-629.
- [18] HE Wei, DAVID A O, YIN Zhao, et al. Neural network control of a robotic manipulator with input dead-zone and output constraint [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, 46(6): 759-770.
- [19] 吴春, 齐蓉, 陈晓雷. 基于障碍 Lyapunov 函数的输出有界全局收敛鲁棒控制 [J]. *控制与决策*, 2015, 30(3): 448-454.  
WU Chun, QI Rong, CHEN Xiaolei. Robust control for output-constrained with global convergence using barrier Lyapunov function [J]. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 448-454.
- [20] LI Yong, YANG Chenguang, YAN Weisheng, et al. Admittance-based adaptive cooperative control for multiple manipulators with output constraints [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, 30(12): 3621-3632.
- [21] DONG Wenjie, FARRELL J A, POLYCARPOU M M, et al. Command filtered adaptive backstepping [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 20(3): 566-580.
- [22] LONG Teng, LI En, HU Yunqing, YANG Lei, et al. A vibration control method for hybrid-structured flexible manipulator based on sliding mode control and reinforcement learning [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, 32(2): 841-852.
- [23] 李鹏飞, 张银河, 张蕾, 等. 考虑误差补偿的柔性关节机械臂命令滤波反步控制 [J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(8): 1693-1700.  
LI Pengfei, ZHAN Yinhe, ZHANG Lei, et al. Command-filtered backstepping control with error compensation for flexible joint manipulator [J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(8): 1693-1700.
- [24] BELKACEM R, MOHAMMED B. Adaptive neural network output feedback control for flexible multi-link robotic manipulators [J]. *International Journal of Control*, 2019, 92(10): 2324-2338.
- [25] UMESH K S, BIDYADHAR S, DIPTI P. Sampled-data extended state observer-based backstepping control of two-link flexible manipulator [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, 41(13): 3581-3599.

(编辑 刘杨 陶晴)