

黏性涡环的失稳与多级分叉行为

张亚杰¹, 杜睿恒¹, 魏衍举¹, 杨亚晶²

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安;

2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了探究液滴撞击液池形成涡环的长期演化行为,以不同浓度的甘油水溶液为对象,研究其在滴入水池后的形态变化,通过高速摄像机对整个过程进行捕捉,发现其由初始液滴形态转变为涡环再到涡环失稳的一系列演化行为,之后分析其失稳与分叉的变化规律与主要影响因素。最后建立了涡环下沉速度的物理模型并进行了数学推导,建立了涡环前锋与尾部的运动无量纲表达式。研究表明,液滴入池后形成的涡环均不会一直稳定生长,而是在某一时刻发生失稳,失稳时刻与液滴本身属性有关。涡环解体为数个下沉的“手指”,在其下沉一定距离后,“手指”前锋沿其运动方向的垂向发生分叉,分叉后继续下沉,并重复出现自相似的分叉行为,且新产生的分叉前锋开始会获得一定程度的相对加速,最终涡环分解为一簇形如“皇冠”的分叉树。自始至终,其前锋与尾部运动均符合衰减运动的规律。本文对于由液滴撞击液池形成的涡环在池中的演变过程进行了时间和空间的拓展,且其由稳定涡环到突然失稳从而转变为分叉树的行为对流体中最复杂的湍流现象的形成机理具有一定的启发意义。

关键词: 黏性涡环; 衰减; 失稳; 分叉

中图分类号: O351.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202204009 **文章编号:** 0253-987X(2022)04-0083-08



OSID 码

Viscous Vortex Ring Instability and Multistage Bifurcation

ZHANG Yajie¹, DU Ruiheng¹, WEI Yanju¹, YANG Yajing²

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to explore the long-term evolution and vortex rings when the droplet impacts pool, this paper studies the morphologic changes of glycerin aqueous solution with different concentrations when the solution drops in the pool. The whole process is captured by high-speed camera, and a series evolution processes were found. The initial droplet changes to vortex ring and then it is at instable vortex ring state. Change law and main influencing factors of instability and bifurcation are also analyzed. Finally, we have set a physical model of the vortex ring sinking velocity, performed mathematical derivation, and established a kinematic dimensionless expression for the front and tail of vortex ring. The result shows that the vortex ring forming after the solution drops in the pool does not always grow stably, but enter an instable state at a certain time. The time when instability occurs is related to the attribute of the droplet. The vortex ring would break down into several sinking “fingers”. After sinking for a certain depth, the “finger” front would bifurcate vertically along its movement direction and then continues to sink with similar bifurcation process. The new bifurcation front begins to obtain a certain relative

acceleration, and finally the vortex ring breaks down into a cluster of bifurcation trees like “crowns”. During the whole period, its front and tail movements are in accordance with the law of attenuation movement. In this paper, the evolution process of the vortex ring which forms when the droplet impacts the pool is expanded spatially and temporally, and its transformation, from stable ring to instable ring suddenly and to bifurcation tree, has some inspirational significance for us to explore the formation mechanism of the most complex turbulence phenomenon in the fluid.

Keywords: viscous vortex ring; attenuation; instability; bifurcation

涡环是自然界广泛存在的流体结构。从烟圈、蒲公英的飞行^[1], 鱼类的游动^[2-4], 到直升机下降或下滑飞行的旋翼涡环^[5-6], 以及原子弹爆炸形成的蘑菇云等等, 都是涡环行为。涡环相关的研究成为流体力学研究的重要分支^[7-9], 而涡环不稳定性也逐渐被人们关注, 20 世纪 70 年代, Widnall 等首次对涡环不稳定性进行了实验研究, 并发展了小扰动线性分析的方法^[10], 之后其研究团队继续对不同波长扰动下的不稳定模式进行了理论预测^[11-12]。1978 年, Saffman 对黏性涡环不稳定波数进行了实验研究^[13]。但对涡环不稳定原因一直缺乏足够的探索^[14], 2005 年, Fukumoto 等^[15]对造成涡环不稳定性的原因进行了分析, 提出了曲率不稳定性理论。2019 年, Hattori^[16]利用数值模拟进一步证实了曲率不稳定性对涡环的影响, 并研究了曲率不稳定性与椭圆不稳定性的竞争。

对穿透界面形成的涡环研究也逐渐被人们重视, 几项研究揭示了液滴穿透液面后所形成涡环的演变^[17]。对于较小范围的冲击条件下, Peck 等^[18]提出了一种构造涡环拓扑结构的理论模型, Chapman 等^[18-19]研究了水滴的球性对涡环特征的作用, 发现球形液滴从扁圆形振荡到膨胀形状, 产生最大的穿透。然而, Rodriguez 等提出, 涡环的最大渗透发生在长液滴, 反之亦然^[20]。剔除速度冲击, Shankar 等^[21]的研究展示了液滴穿透过程完全由液滴的毛细作用或表面能量控制, 这在有限的冲击速度下可能不成立。Saha 等发现液滴入水过程可分为匀速、波动和衰减运动等 3 个阶段, 并对其前锋面的运动规律进行了数学描述^[22]。研究的注意力主要在气-液界面附近^[23], 而对于液滴穿过液面形成的涡环在界面以下长期的演变研究并不多, 对此类涡环是否会发生失稳先前也未被指出。

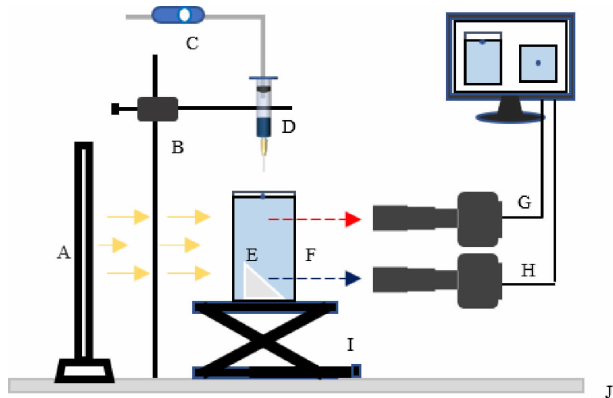
本文将空间观测范围向液滴下沉方向进一步延伸, 并且除与液池中液体性质相同的纯水液滴外, 另增加 3 组与液池液体性质不同的液滴实验组, 使用

高速相机对液滴入水的长期行为进行捕捉记录, 观察不同密度/黏度液滴撞击液面后所产生涡环的长期演化过程, 并分析其演化特征与背后的控制因素。本研究拓展了液滴撞击液池所产生涡环演化行为的时间尺度和空间尺度, 对掌握液滴穿越气-液界面后, 在水中的混合过程中的能量传递与演化特征及其机制具有极其重要的理论价值与现实意义, 同时该现象对流体中最复杂的湍流现象的形成机理也具有一定的启发意义。

1 实验装置与方法

涡环失稳与分叉实验系统由液滴生成系统、石英方缸、光学系统、高速摄影系统等组成, 如图 1 所示。

实验液体为甘油水溶液, 其甘油体积分数分别为 0%、10%、30% 和 50%, 并加入微量 (0.1 mg) 蓝色荧光粉 (主要成分为钨酸钙) 进行染色, 并用玻璃棒搅拌均匀待用。根据甘油体积分数将 4 种混合液



A—背光灯 (LED); B—可升降支架; C—气阀; D—注射器;
E—平面镜; F—厚度 5 mm、容积为 70 mm×70 mm×195 mm 的石英方缸; G—高速摄影仪 1 (Phantom Miro eX4);
H—高速摄影仪 2 (Phantom Miro eX4); I—精密升降台;
J—气垫隔振平台 (为保证涡环演化不受外界扰动, 实验必须在气垫隔振平台上进行)。

图 1 实验系统

Fig. 1 The experimental system for destabilization and bifurcation behavior of vortex

分别定义为 G0、G10、G30 和 G50。

石英方缸内液体为去离子水。实验前在石英方缸中注入去离子水至方缸上沿 10 mm 处,调整液面与上方注射器针头距离为 40 mm,并静置 5 min 使缸内液体充分稳定。液滴生成初始高度固定不变,使得液滴的入水速度保持恒定,经视频处理软件 Tracker 测量以及通过重力加速公式计算得到该速度均为 0.885 m/s(可忽略空气阻力),实验温度 283 K。不同浓度的甘油水混合液存储在注射器内,其内液面上方有气室,通过软管与大气连接,缓慢打开气阀即可在注射器针头处平稳生成液滴,为了防止液滴根部在斜针头针尖处附着力不均从而对其运动产生干扰,实验中采用了 22 号平针头(内径为 0.41 mm)。在背景 LED 灯板的照射下,通过摄影仪 1 (Phantom Miro eX4 @ 60 帧/s,600×300 像素)记录液滴在液池内运动的侧视图像,而摄影仪 2(60 帧/s)则通过置于方缸底部的 45°反射镜记录仰视图像。液滴的形状与位置参数通过 Tracker 软件在视频中提取^[24]。液滴扩散面积通过编写 Python-OpenCV 代码在图像中进行像素级提取。

定义液滴初始雷诺数 $Re = \frac{\rho_l D_0 U_0}{\mu}$,其中 ρ_l 为混合液滴的密度, D_0 为液滴直径, U_0 为液滴入水初速度, μ 为混合液黏度,并给出每组混合液液滴参数, ρ_0 为水的密度,如表 1 所示。

表 1 4 种混合液的部分物理性质

Table 1 Part of the physical properties of the four mixtures

变量	G0	G10	G30	G50
$\mu/\text{Pa} \cdot \text{s}$	1.31	1.88	4.60	17.49
$\rho/(\text{g} \cdot \text{m}^{-3})$	1	1.03	1.08	1.14
D_0/mm	2.28	2.27	2.27	2.15
$U_0/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0.89	0.89	0.89	0.89
Re	148	117	74	60
$\epsilon = \rho_0/\rho_l$	1	0.97	0.93	0.88

2 实验结果与分析

2.1 涡环演化基本特征

对高速相机所拍摄的图像仅作灰度化处理,如图 2 所示,液滴入水速度为 0.885 m/s 时,以 G10 为例展示了撞击液池后液滴/涡环的发展过程。液滴没入水面的过程十分复杂,包括液滴前锋凹陷、液面下沉、液滴与液面间气垫层破裂、液滴横向流动,然后在与液面交界线处产生内卷涡环、涡环生长、液面下沉产生凹坑,使涡环扩张、液面回缩,涡环回缩

并继续下沉、涡环与液面分离,快速下沉等诸多阶段^[20-21]。入射液滴/涡环前锋下沉速度可以分为匀速、波动与指数衰减等 3 个发展阶段^[22]。当涡环液体与环境液体相同时,涡环下沉逐渐趋于停滞,其平动动量与涡量逐渐耗散,逐渐形成一个圆环状扩散体,而其圆环形态未发生改变。

当涡环密度/黏度与环境液体不同时,如图 2 所示,涡环与液面分离后也快速下沉,但下沉过程中突然失稳并解体,在轴向均匀地产生数个“手指”状突起,并加速下沉。该质量团下沉一段距离后开始沿其前锋垂向分叉,产生新的“手指”。新“手指”继续加速下沉,重复其“父手指”的行为,继续分叉、下沉,呈现出逐级循环分形行为。每级分叉形态基本相同,最终生长为“鹿角”环布的倒皇冠形态,而从仰视角度观察,则呈现出花瓣状分形形态。

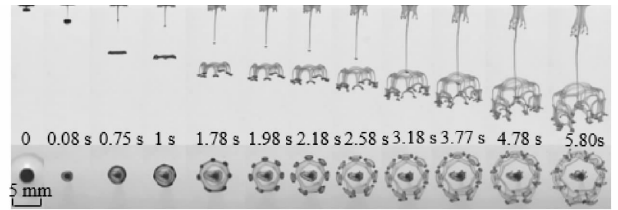


图 2 G10 溶液液滴在水中的下沉以及分叉过程
Fig. 2 The process of sinking and bifurcation of the G10 solution droplets

2.2 分叉形态特征

不同“手指”数 m 的失稳形态及出现频次 n 的统计结果如图 3 所示,不同失稳模数下的形态,同时刻生成的“手指”发展同步,“手指”发展程度因出现时刻差异略有不同,但同级“手指”基本均匀分布在液环周向,此时主体涡环已不具备涡环结构,称之为液环,随着分叉的进行,主体液环由圆环逐渐发展为正多边形,再到弧型多边形。

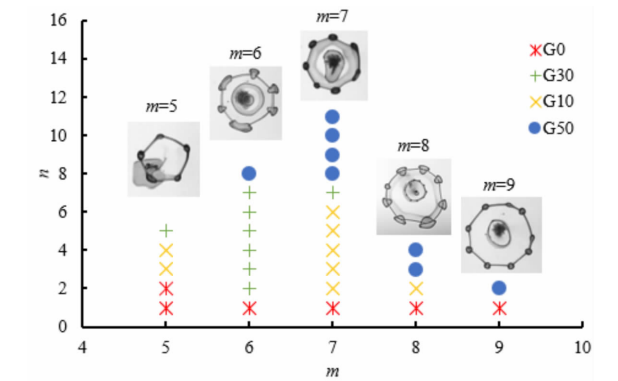


图 3 不同“手指”数 m 的失稳形态及出现频次 n 的统计
Fig. 3 The destabilization pattern with different number of fingers and the statistics of frequency n

一级分叉的“手指”数与涡环失稳模数相关,其数量主要集中在 7 个左右。参考 Widnall 等工作,定义无量纲涡度 $\tilde{V}=\ln(8R/a)-1/4$,其中 R 为失稳前的涡环半径, a 为失稳前涡核半径。理论失稳模数 $m=1.44\exp(1/4+\tilde{V})/8^{[11-12]}$ 。因此,本文将一级分叉“手指”数同样定义为 m ,本文实验结果与 Widnall 等的理论预测^[12]符合较好,如图 4 所示,即涡环的失稳来源于椭圆不稳定性,其失稳模数与 $\tilde{V}$ 有关。并且失稳模数与涡环液体性质之间并未表现出明显的规律,而是与环核比 R/a 有着直接联系。

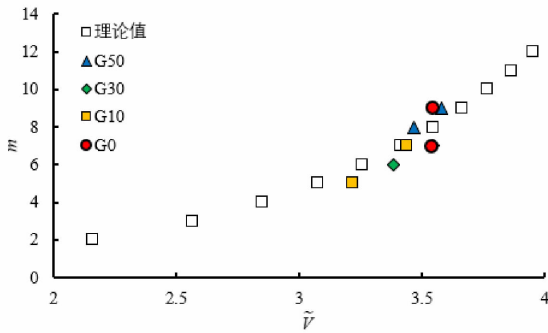


图 4 失稳模数的实验结果与理论预测比较

Fig. 4 The experimental results and the theoretical results of destabilization modes

涡环演化过程关键点定义如图 5 所示,一级分叉形成的子液环沿其扩散方向的垂向朝两端拉伸,接近于椭圆。之后,在椭圆长轴两端各出现一个新的小液环,小液环出现后随之沿与上级液环拉伸方向正交的方向生长,液环形状由正圆逐渐发展为椭圆。

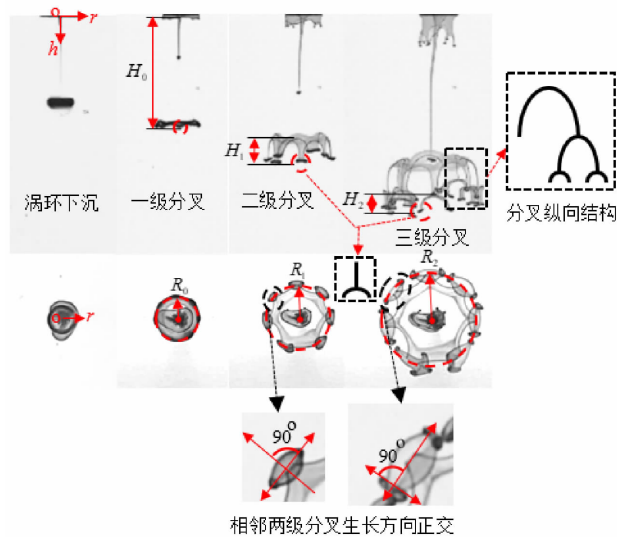


图 5 涡环演化过程关键点定义

Fig. 5 The important definitions for the evolution of vortex rings

圆,结合纵向图像,此时发生二级分叉。一段时间后,在二级分叉形成的椭圆长轴两端再次出现两个小液环,小液环生长行为与之前液环生长行为相似。

如图 5 所示,将涡环 i 级分叉高度定义为 H_i ,其分叉中心与原点之间的距离定义为 R_i ,分叉过程的纵向形态也具有相似性,均为抛物线状迹线。涡环失稳后发生分叉的静态模型如图 6 所示。

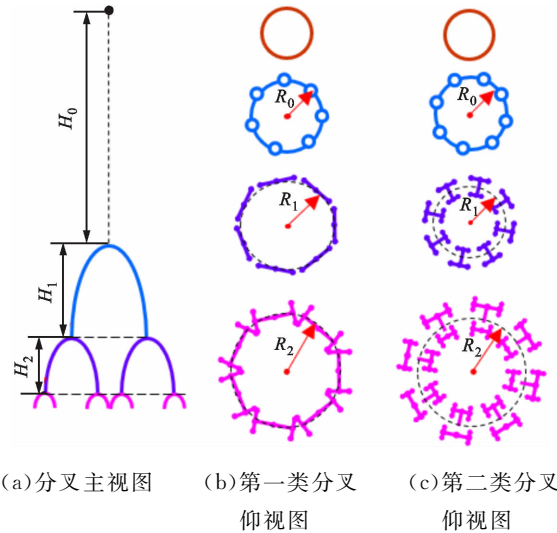
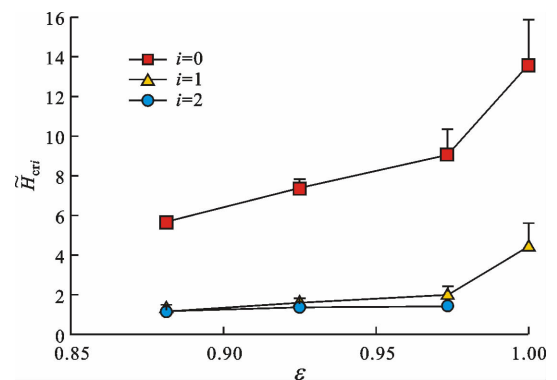


图 6 涡环失稳分叉模型

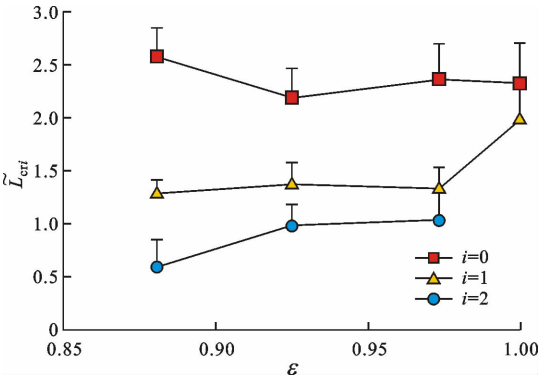
Fig. 6 The models of destabilization and fractal of vortex rings

值得注意的是,图 6(a)中各级高度均为下一级分叉开始时的瞬时高度,整个模型由各级分叉高度组合拼接而成,非实时形态。沿周向的行为随着液滴性质的不同有所差异,G0、G10 和 G30 均符合图 6(b)所示模型,而 G50 则会产生 4 个二级分叉点,如图 6(c)所示。可知 G0 发生二级分叉后结构趋于稳定,直至沉底,不会出现三级分叉。

图 7 所示为无量纲化的各级下沉深度 $\tilde{H}_{\text{cri}}=H_{\text{cri}}/D_0$ 和各级水平距离 $\tilde{L}_{\text{cri}}=L_{\text{cri}}/D_0$ 。对于同一液滴, $\tilde{H}_{\text{cri}0}>\tilde{H}_{\text{cri}1}>\tilde{H}_{\text{cri}2}$, $\tilde{L}_{\text{cri}0}>\tilde{L}_{\text{cri}1}>\tilde{L}_{\text{cri}2}$ (G0 除外)。



(a) $\tilde{H}_{\text{cri}}=H_{\text{cri}}/D_0$



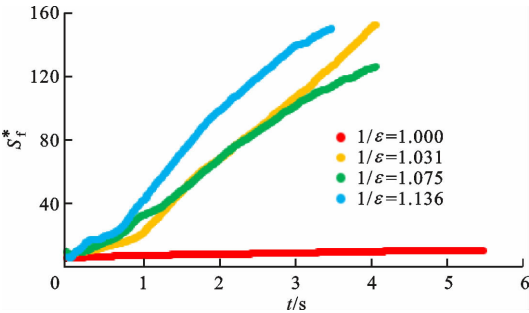
(b) $L_0=R_0, L_1=R_1-R_0, L_2=R_2-R_1, \tilde{L}_{cri}=L_{cri}/D_0$

图 7 各级分叉发生时的下沉距离和横扩距离

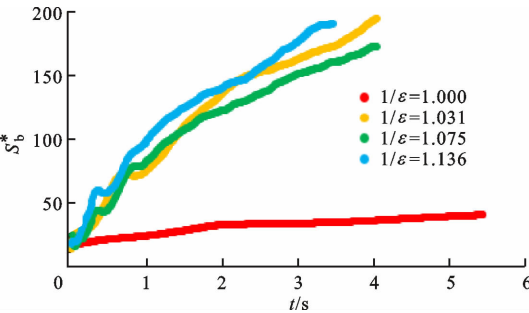
Fig. 7 The distance of sinking at each bifurcation and the distance of the lateral movement of each bifurcation

对于不同的液滴,随着 ϵ 增大, $\tilde{H}_{cri}$ 均表现为增加趋势, $\tilde{L}_{cri}$ ($\tilde{L}_{cri0}$ 除外) 整体也表现为增加趋势。

利用 Python-OpenCV 自编程序对图像逐帧进行处理,拾取入池液体所占像素点,从而通过标定好的比例尺求出其面积,并对主视图和仰视图面积无量纲化, $S_f^*=S_f/S_0, S_b^*=S_b/S_0$, S_f 和 S_b 分别为主视图和仰视图面积,液滴初始最大截面积 $S_0=\pi D_0^2/4$ 。如图 8 所示,主视图与俯视图呈现的面积增长均明显分为两个阶段,其分界点对应于涡环失



(a) S_f^*



(b) S_b^*

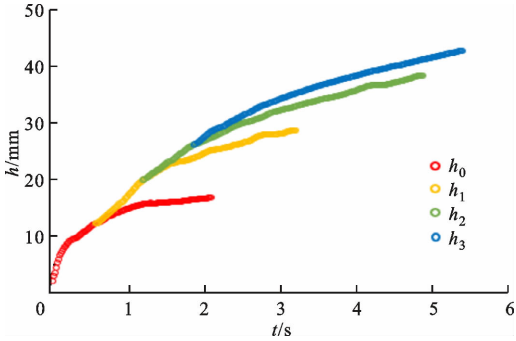
图 8 入池液体在下沉过程中的主视图、仰视图面积扩散

Fig. 8 Diffusion of the front view area and the bottom view of the liquid entering the pool during the sinking process

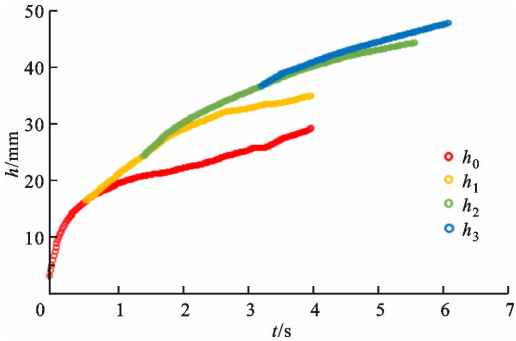
稳开始出现分叉的时刻。不同的是,在失稳分叉点之前, S_f^* 增长较为缓慢,而在失稳分叉点之后,其增长速度明显加快,而 S_b^* 则恰好相反。总体来看,液滴与液池液体的密度差对面积的扩散起到促进作用,随着液滴密度的增加,面积扩散速度增加,而与液池液体密度相同的液滴,其扩散速度明显低于另外三组。

2.3 分叉生长运动特性

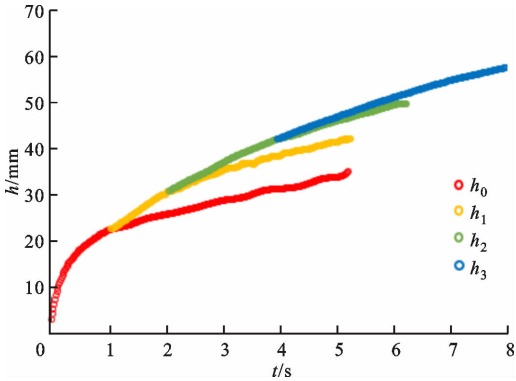
涡环失稳后发生的首次分叉,以及之后的二级、三级分叉产生的分叉前锋均获得一定程度的加速,加速程度随 Re 减小而增大,之后以快于上一级主体的速度下沉,如图 9 所示, h, h_1, h_2 和 h_3 分别表示涡环前锋下沉深度,一级分叉前锋下沉深度,二级分叉前锋下沉深度和三级分叉前锋下沉深度,而后速度快速衰减,一段时间后出现分叉。涡环失稳前,下



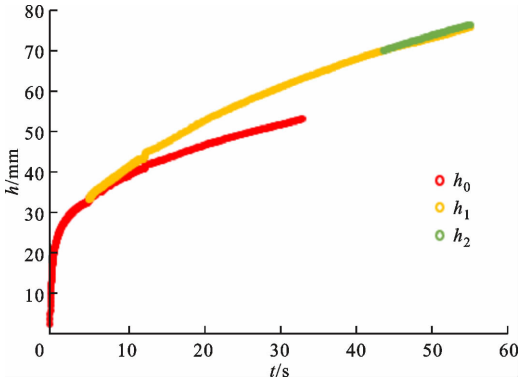
(a) $Re=60$ (G50)



(b) $Re=74$ (G30)



(c) $Re=117$ (G10)



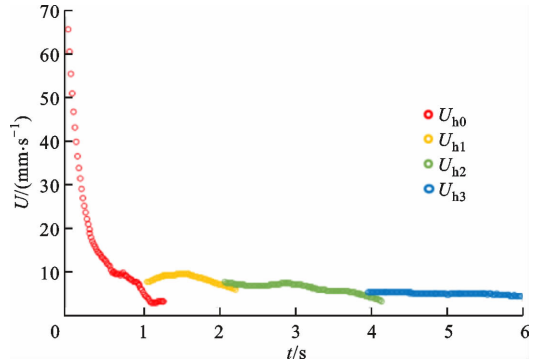
(d) $Re=148(G0)$

图 9 各级分叉前锋下沉深度

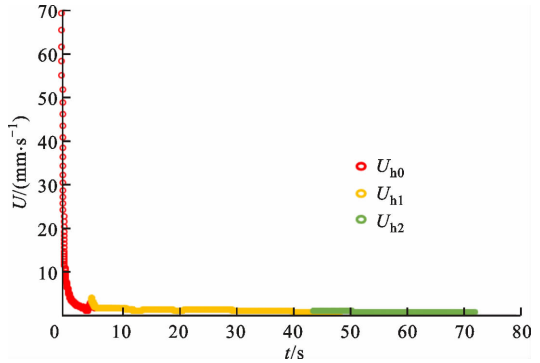
Fig. 9 The depth of each bifurcation's forward sinking

沉速度快速衰减,随着 Re 减小,下沉速度越小且速度衰减越剧烈。在 $0\sim 1$ s 之间某个时刻,存在一个转折点,涡环下沉速度会在此时接近平稳,G50、G30 和 G10 这 3 组液滴涡环开始失稳,产生首次分叉,之后分叉前锋下沉速度与初始涡环下沉阶段恰好相反,即随着 Re 增加,下沉速度越大,如图 10 所示, U_{h0} 、 U_{h1} 、 U_{h2} 和 U_{h3} 分别表示涡环前锋、一级分叉前锋、二级分叉前锋和三级分叉前锋的下沉速度。

涡环失稳前下沉高度变化如图 11 所示,分别给出涡环/分叉前锋下沉高度 h_f 和涡环/分叉尾部下



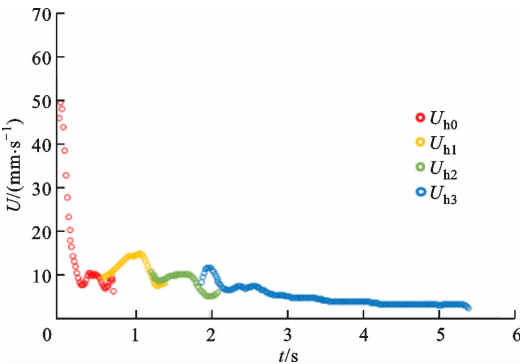
(c) $Re=117(G10)$



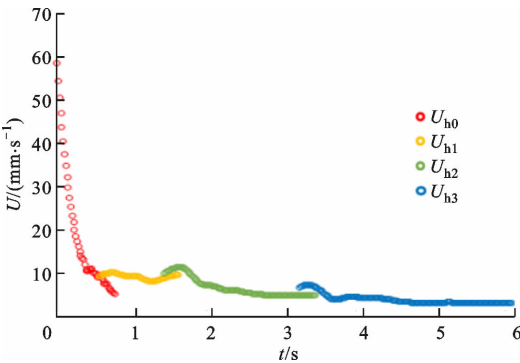
(d) $Re=148(G0)$

图 10 各级分叉前锋下沉速度

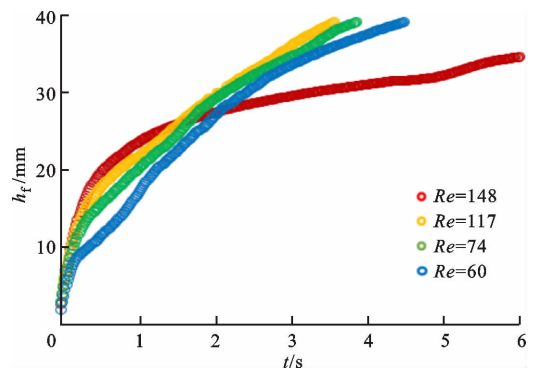
Fig. 10 The sinking speed of each bifurcation's forward



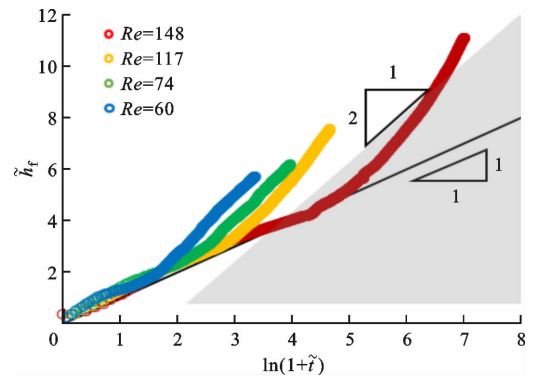
(a) $Re=60(G50)$



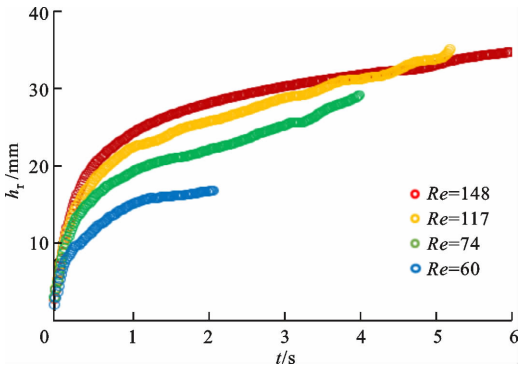
(b) $Re=74(G30)$



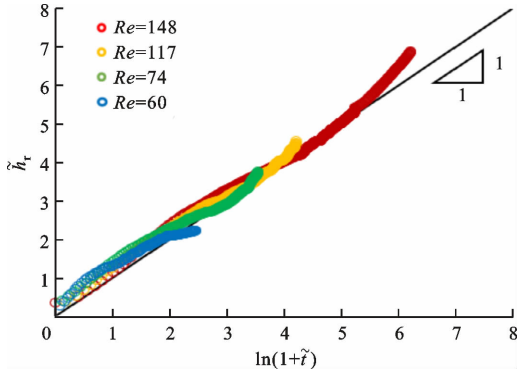
(a) 涡环失稳前前锋/分叉前锋下沉高度 h_f 变化



(b) $\tilde{h}_f$ 与 $\ln(1+\tilde{t})$ 的关系



(c) 涡环失稳前前锋与分叉根部下沉高度 h_r 变化



(d) $\bar{h}_r$ 与 $\ln(1+\tilde{t})$ 的关系

图 11 涡环失稳前前锋/分叉前锋下沉高度和前锋与分叉根部下沉高度 h_r 变化

Fig. 11 The sinking depth of the vortex ring's forward/bifurcation's forward and the sinking depth of the vortex ring's forward/bifurcation's rear

沉高度 h_r , 在涡环失稳前, h_f 与 h_r 相同, 均为涡环下沉高度。而在涡环失稳后, h_f 与 h_r 分别分化为分叉前锋下沉高度和分叉尾部下沉高度, 在之后的下沉过程中, 由于前锋会获得一定程度的加速, 导致 h_f 与 h_r 之间的差距逐渐增大。

本文将下沉的涡环等价于刚体球, 进而其初始体积 $V = \pi D_0^3 / 6$, 迎流特征面积 $A = \pi D_0^2 / 4$, 接下来对其下沉过程列出动量方程 $\rho_0 V \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2} \times \rho_0 U^2 A C_D$, 其中等式右边为迎流阻力, 迎流阻力系数 $C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{Re}{16}\right) = 0.5$, 进一步 $\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2} U^2 C_D \cdot \frac{3}{2D_0}$, 对此方程求解得

$$U = \left(\frac{3C_D}{4D_0} t + c_1 \right)^{-1} \quad (1)$$

继续对式(1)进行积分

$$h = \int_{t_0}^t U dt = \int_{t_0}^t \left(\frac{3C_D}{4D_0} t + U_0 \right)^{-1} dt =$$

$$\frac{4D_0}{3C_D} \ln \left(t + \frac{4D_0}{3C_D} c_2 \right) \quad (2)$$

代入初始边界条件得 $\tilde{h} = \ln(1 + \tilde{t})$, 其中, $\tilde{h} = \frac{3C_D h}{4D_0}$,

$\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$, $t_0 = \frac{4D_0}{3C_D U_0}$, 即涡环初期下沉无量纲距离与无

量纲时间遵循的函数关系。在本文研究中, 考虑入射液滴与液池内液体黏度与密度差异, 对无量纲时间修正为 $\tilde{t} = \frac{t}{t_0 \sqrt{Re}}$ 。对 h_f 和 h_r 进行无量纲化处理, 分别得到 $\bar{h}_f$ 和 $\bar{h}_r$ 。图 11(b) 可知, 所有涡环失稳前的无量纲前锋距离均符合这一函数关系, 表明整个涡环仍可视作下沉刚体球体, 其运动受到绕流摩擦阻力作用持续衰减, 但涡环分叉后会加速下行现象, 其无量纲下沉速度约增加为原来的 2~3 倍之间。另外, 涡环的下沉特性受密度差的影响不大, 可忽略不计。

3 结 论

本文研究了不同浓度的甘油水溶液在滴入水池后产生的涡环的演化特性, 分析了其失稳与分叉的变化规律与主要影响因素, 建立了涡环下沉速度的物理模型并进行了数学推导, 建立了涡环前锋与尾部的运动无量纲表达式。研究的主要结论如下:

(1) 涡环在水中下沉过程中, 依次经历衰减、失稳和多级自相似分叉 3 个阶段, 最终生长为“鹿角”环布的倒皇冠形态, 而从仰视角度观察, 各级分叉拉伸方向与上级分叉拉伸方向正交, 最后呈现出花瓣状分形形态;

(2) 涡环失稳行为符合椭圆不稳定性中的短波不稳定失稳模式, 其一级分叉均匀环布, 数量与无量纲涡度 $\tilde{V}$ 相关;

(3) 涡环在失稳前的下沉均可视为刚性球体, 其下沉特性符合对 $\tilde{t}$ 修正后的函数关系式 $\tilde{h} = \ln(1 + \tilde{t})$, 而涡环失稳后则不再符合这一关系。

参考文献:

[1] CUMMINS C, SEALE M, MACENTE A, et al. A separated vortex ring underlies the flight of the dandelion [J]. Nature, 2018, 562(7727): 414-418.
[2] GRAY J, LISSMANN H W. Studies in animal locomotion: VIII Locomotory reflexes in the earthworm [J]. Journal of Experimental Biology, 1938, 15(4): 506-517.
[3] LIGHTHILL M J. Note on the swimming of slender

- fish [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, 9(2): 305-317.
- [4] WU T Y T. Swimming of a waving plate [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, 10(3): 321-344.
- [5] 王亮权, 何龙, 徐国华, 等. 直升机旋翼涡环状态的气动噪声特性 [J/OL]. *空气动力学学报* [2021-10-01]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1192.TK.20211117.0921.002.html>.
- WANG Liangquan, HE Long, XU Guohua, et al. Investigation of helicopter rotor aeroacoustic characteristics in vortex ring state [J/OL]. *Acta Aerodynamica Sinica* [2021-10-01]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1192.TK.20211117.0921.002.html>.
- [6] 张西, 孙杰. 直升机垂直下降时旋翼涡环飞行试验分析 [J]. *飞行力学*, 2010, 28(4): 82-84.
- [7] LIMBOURG R, NEDIC J. An extension to the universal time scale for vortex ring formation [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 915: A46.
- [8] LIMBOURG R, NEDIC J. Formation of an orifice-generated vortex ring [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 913: A29.
- [9] 张荻, 樊涛, 蓝吉兵, 等. 涡旋射流控制逆压梯度平板边界层分离的涡结构研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2012, 46(1): 1-8.
- ZHANG Di, FAN Tao, LAN Jibing, et al. Study on the special vortical structure development during flow separation control by VGJs in boundary layer of flat plate with adverse pressure gradient [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2012, 46(1): 1-8.
- [10] WIDNALL S E, BLISS D, ZALAY A. Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair [M]// OLSEN J H, GOLDBURG A, ROGERS M. *Aircraft Wake Turbulence and Its Detection*. Boston, MA, USA: Springer US, 1971: 305-308.
- [11] WIDNALL S E, SULLIVAN J P. On the stability of vortex rings [J]. *Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences*, 1973, 332(1590): 335-353.
- [12] WIDNALL S E, BLISS D B, TSAI C Y. The instability of short waves on a vortex ring [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1974, 66(1): 35-47.
- [13] SAFFMAN P G. The number of waves on unstable vortex rings [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, 84(4): 625-639.
- [14] 马晖扬. 涡旋运动的稳定性分析 [J]. *力学进展*, 1988, 18(4): 470-481.
- MA Huiyang. Stability analysis of vortex motion [J]. *Advances in Mechanics*, 1988, 18(4): 470-481.
- [15] FUKUMOTO Y, HATTORI Y. Curvature instability of a vortex ring [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 526: 77-115.
- [16] HATTORI Y, BLANCO-RODRÍGUEZ F J, LE DIZÈS S. Numerical stability analysis of a vortex ring with swirl [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 878: 5-36.
- [17] CHAPMAN D S, CRITCHLOW P R. Formation of vortex rings from falling drops [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 29(1): 177-185.
- [18] PECK B, SIGURDSON L. The three-dimensional vortex structure of an impacting water drop [J]. *Physics of Fluids*, 1994, 6(2): 564-576.
- [19] DOOLEY B S, WARNCKE A E, GHARIB M, et al. Vortex ring generation due to the coalescence of a water drop at a free surface [J]. *Experiments in Fluids*, 1997, 22(5): 369-374.
- [20] RODRIGUEZ F, MESLER R. The penetration of drop-formed vortex rings into pools of liquid [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1988, 121(1): 121-129.
- [21] SHANKAR P N, KUMAR M. Vortex rings generated by drops just coalescing with a pool [J]. *Physics of Fluids*, 1995, 7(4): 737-746.
- [22] SAHA A, WEI Yanju, TANG Xiaoyu, et al. Kinematics of vortex ring generated by a drop upon impacting a liquid pool [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 875: 842-853.
- [23] 强伟, 侯予, 薛绒, 等. 氮液滴碰撞不同浸润性壁面特性研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(7): 151-157.
- QIANG Wei, HOU Yu, XUE Rong, et al. Research on the behaviors of nitrogen droplets impacting surfaces with different wettabilities [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2021, 55(7): 151-157.
- [24] 尚宇恒, 白博峰, 侯予, 等. 液滴撞击过冷壁面的结冰特性实验研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(10): 144-149.
- SHANG Yuheng, BAI Bofeng, HOU Yu, et al. Experimental research for freezing characteristics of droplets impacting on supercooled surface [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2021, 55(10): 144-149.

(编辑 赵炜 杜秀杰)