

采用平方根高斯核积分滤波的目标跟踪算法

汪家宝¹, 陈树新¹, 吴昊^{1,2}, 何仁珂³, 徐涵⁴

(1. 空军工程大学信息与导航学院, 710077, 西安; 2. 地理信息工程国家重点实验室, 710054, 西安;
3. 93184 部队, 100076, 北京; 4. 95655 部队, 611530, 成都)

摘要: 为进一步提高目标跟踪精度,提出了一种新的平方根高斯核积分滤波算法(SGKQF)。选取比例因子重构高斯-厄米特积分点,利用高斯核构造的线性方程组计算相应权重,从而建立单变量高斯核积分规则;采用张量积方法将其扩展到多变量积分规则,以实现多维积分的数值近似;将其引入非线性高斯递归滤波框架中,为增强算法的稳定性,在滤波过程中使用协方差的平方根形式,得到 SGKQF 算法。将所提算法应用于纯方位目标跟踪系统中,仿真结果表明,在选取合适高斯核带宽的条件下,相对于传统 GHQF 算法,SGKQF 对目标位置和速度估计的精度分别提高了 8.7% 和 11.8%,可获得更高的滤波估计精度。

关键词: 非线性系统;目标跟踪;高斯-厄米特积分规则;高斯核积分

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202204017 **文章编号:** 0253-987X(2022)04-0157-08



OSID 码

Target Tracking Algorithm Using Square-Root Gaussian Kernel Quadrature Filter

WANG Jiabao¹, CHEN Shuxin¹, WU Hao^{1,2}, HE Renke³, XU Han⁴

(1. Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;
2. State Key Laboratory of Geo-Information Engineering, Xi'an 710054, China;
3. Unit 93184, Beijing 100076, China; 4. Unit 95655, Chengdu 611530, China)

Abstract: To further improve the accuracy of target tracking, a novel algorithm of square-root Gaussian kernel quadrature filter (SGKQF) is proposed. The scale factor is selected to reconstruct the Gauss-Hermite integral point in the algorithm, and the corresponding weight is calculated by linear equations formulated by the Gaussian kernel, thereby establishing the univariate Gaussian kernel quadrature rule; Subsequently, the tensor product method is used to extend the rule into multivariate quadrature rule by for the numerical approximation of multi-dimensional integrals; Finally, the multivariate quadrature rule is introduced into the framework of nonlinear Gaussian recursive filtering, and the SGKQF is obtained by implementing the square-root form of the covariance in the filtering process to enhance the stability. The proposed algorithm is applied to the bearings-only target tracking system to test its performance. The simulation result shows that, compared with traditional GHQF algorithm, SGKQF can achieve higher filter estimation accuracy under the condition of selecting appropriate Gaussian kernel bandwidth, with the improvement of estimation accuracy in position and velocity by 8.7% and 11.8% respectively.

收稿日期: 2021-08-05。 作者简介: 汪家宝(1996—),男,硕士生;吴昊(通信作者),男,讲师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(62073337);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2020JQ-479)。

网络出版时间: 2021-11-16

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20211115.2202.006.html>

Keywords: nonlinear system; target tracking; Gauss-Hermite quadrature rule; Gaussian kernel quadrature

非线性滤波和估计问题存在于信号处理、目标跟踪(例如水下跟踪、飞行器监视等)、组合导航等诸多领域^[1-4]。目标跟踪是指利用相应传感器获得测量信号以完成对目标状态的连续迭代估计的过程,其中纯方位无源跟踪^[5-6]能够被动地利用一系列角度信息完成目标的跟踪。由于其高非线性以及弱可观测性,对采用的非线性滤波估计算法要求较高。

目前,为了实现非线性系统的状态估计,基于贝叶斯框架和高斯密度假设的高斯近似滤波得到了深入的研究,其核心是计算形如“非线性函数 $\times$ 高斯概率密度函数”的多维积分^[7]。其中,扩展卡尔曼滤波^[8]利用泰勒级数展开获得系统方程的近似表达,但在系统非线性程度较高时会引来较大的截断误差。基于“对概率分布进行近似要比对非线性函数近似容易”的认识,无迹卡尔曼滤波(UKF)^[9-10]、高斯-厄米特积分滤波(GHQF)^[11-12]、容积卡尔曼滤波(CKF)^[13-14]等算法相继被提出,它们通过确定性采样来近似系统状态的后验概率密度,区别在于数值积分规则有所不同,分别采用无迹变换、高斯-厄米特积分规则以及容积准则。

考虑从数值逼近的角度提高估计精度,文献[15]推导了5阶球面-相径容积准则,建立了高阶CKF算法(HCKF),其比3阶CKF拥有更高的估计精度。Wang等采用5阶球面单纯形准则计算球面积分,提出了5阶球面单纯形-相径容积卡尔曼滤波^[16],相比于HCKF可进一步提高估计精度。Bhaumik等将容积准则与高斯-拉盖尔积分规则结合,提出容积积分卡尔曼滤波(CQKF)^[17]。CQKF是CKF的广义形式,当采用的切比雪夫-拉盖尔多项式阶数 $d \geq 2$ 时,其精度高于CKF。GHQF采用高斯-厄米特积分(GHQ)规则进行数值逼近,可获得更高的估计精度,但GHQF运用张量积规则将单变量高斯积分扩展到多维积分,其计算复杂度随系统维数指数增长。事实上,随着各个领域对滤波精度的要求越来越高,如何进一步提高数值积分精度需要深入研究。

文献[18]推导了一种精确且数值稳定的高斯核积分权重近似值,该近似是建立在缩放的高斯-厄米特积分节点的基础上,但该数值积分方法并未系统地运用于高斯滤波过程。

因此,本文利用高斯核积分规则结合张量积方

法推导了高斯核积分滤波算法(GKQF),该算法通过选定与高斯-厄米特积分节点成比例的积分点,采用高斯核积分规则计算出相应权重近似值,形成基于比例高斯-厄米特积分点的高斯核积分规则,并与GHQF算法同样利用张量积方法实现多维积分,在运算量接近的情况下其能够获得比GHQF更好的滤波效果,并且可结合实际情况灵活调整参数。

同时,为了增强GKQF算法的数值稳定性,如同UKF、GHQF以及CKF的平方根版本^[19-21]采用QR分解代替Cholesky分解,确保了协方差矩阵的半正定性从而改进数值的稳定性,本文推导了平方根高斯核积分滤波算法(SGKQF)。通过对典型二维非线性滤波系统与纯方位目标跟踪实例的仿真实验,验证了GKQF以及SGKQF算法相较于UKF、CKF、GHQF等传统算法具有更高的估计性能。

1 问题描述和高斯-厄米特积分规则

1.1 问题描述

考虑非线性离散时间状态空间模型

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k \quad (2)$$

式中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 和 $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ 分别表示 k 时刻的状态向量和量测向量; $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 分别表示非线性系统的状态函数和测量函数;过程噪声 $\mathbf{w}_k$ 和量测噪声 $\mathbf{r}_k$ 是互不相关的均值为0的高斯白噪声,方差分别为 $\mathbf{Q}_{k-1}$ 和 $\mathbf{R}_k$ 。

高斯滤波的前提是假设滤波分布近似服从高斯分布,状态 $\mathbf{x}_k$ 的后验概率密度满足

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k) \quad (3)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\mathbf{P}_k$ 分别为 k 时刻的均值和协方差。对于服从高斯假设的非线性系统,基于贝叶斯滤波理论和数值积分方法,可以获得高斯近似滤波方法。其本质是对变量 $\mathbf{x}$ 满足高斯分布的非线性函数 $g(\mathbf{x})$ 求取期望,具体的积分计算可近似为^[13]

$$\begin{aligned} E[g(\mathbf{x})] &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} g(\mathbf{x}) N(\cdot; \mathbf{x}, \mathbf{P}_x) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} g(\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{y}) N(\mathbf{y}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_{n_x}) d\mathbf{y} \approx \\ &= \sum_{l=1}^{N_p} \omega_l g(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\boldsymbol{\xi}_l) \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{P}_x = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$; N_p 为积分点数; $\boldsymbol{\xi}_l$ 和 ω_l 分别为随机

变量 $\mathbf{y}$ 满足概率密度 $p(\mathbf{y}) = N(\mathbf{y}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_{n_x})$ 时的积分点和相应权值,可根据 GHQ 规则、无迹变换或者容积分则来进行选取。

1.2 高斯-厄米特积分规则

对于具有高斯密度 $N(x; 0, 1)$ 的标量 x , 采用数值近似获得非线性函数 $g(x)$ 的期望, 可通过高斯-厄米特积分规则计算 ξ_l 和 ω_l 。传统的方法采用矩匹配法确定积分点和权重, 但其计算较为复杂, 一种简便方法是利用正交多项式和三对角矩阵之间的关系^[11], 假定 $\mathbf{J}$ 是一个具有 0 对角元素的对称三对角矩阵, 其他元素计算式为

$$J_{i,i+1} = \sqrt{i/2}, 1 \leq i \leq N_p - 1 \quad (5)$$

积分点 $\xi_l = \sqrt{2}\epsilon_l$, 其中 ϵ_l 是 $\mathbf{J}$ 的第 l 个特征值; 相应的权重 $\omega_l = (v_l)_1^2$, 其中 $(v_l)_1$ 是 $\mathbf{J}$ 的第 l 个归一化特征向量的第一个元素。

对于 $\mathbf{x}$ 是多维随机向量的情况, 可通过张量积规则将单维获得的 N_p 个积分点及相应权重扩展到多维积分^[22]。

2 平方根高斯核积分滤波器

2.1 基于比例高斯-厄米特节点的高斯核积分规则

本文选取带比例因子的高斯-厄米特积分点, 通过高斯核构造的线性方程组计算相应的核积分权重近似值, 两者构成单变量高斯核积分规则的积分点与相应权重, 再将获得的高斯核积分规则利用张量积方法从单变量扩展到多变量形式, 使之适应多维积分的数值近似。

首先介绍运用高斯核技巧的高斯核积分规则。已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 高斯核 $\kappa(x, y)$ 定义为^[23]

$$\kappa(x, y) = \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

式中 σ 为高斯核带宽。

对于给出的互异积分点 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N]^T$, 考虑函数 f 的数值积分形式^[18]

$$I(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx Q_k(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\xi_i) \quad (7)$$

如果积分权重 $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N]^T$ 是通过线性关系计算出, 则该数值积分规则称为高斯核积分规则。具体地, 线性关系式为

$$\mathbf{K}\omega = \mathbf{K}_I \quad (8)$$

式中: $[\mathbf{K}]_{ij} = \kappa(\xi_i, \xi_j)$; $[\mathbf{K}_I]_i = \int_{\mathbb{R}} \kappa(\xi_i, \xi) dI(\xi)$; $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 。

单变量高斯核积分点 ξ 的一个特殊选择是单变量高斯-厄米特积分点的比例形式, 比例因子的选择以及积分权重 ω 的计算此处不进行详细推导, 直接给出引理。

引理 1^[18] 已知高斯-厄米特积分点 $\xi_1^{\text{GH}}, \dots, \xi_N^{\text{GH}}$, 其相应的权重为 $\omega_1^{\text{GH}}, \dots, \omega_N^{\text{GH}}$, 选取比例因子 $1/\sqrt{2}\alpha\beta$ 重构高斯-厄米特积分点后获得的单变量高斯核积分点为

$$\xi_i^{\text{GK}} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha\beta} \xi_i^{\text{GH}} \quad (9)$$

定义采用高斯核积分规则得到的近似权重 ω_i^{GK} , 积分满足

$$\tilde{Q}(f) = \sum_{i=1}^N \omega_i^{\text{GK}} f(\xi_i^{\text{GK}}) \quad (10)$$

ω_i^{GK} 可通过使用高斯核积分点 ξ_i^{GK} 和截断式(8)中高斯核矩阵 $\mathbf{K}$ 的特征分解得到, 其表达式为

$$\omega_i^{\text{GK}} = \left(\frac{1}{1+2\delta^2}\right)^{1/2} \omega_i^{\text{GH}} e^{\delta^2(\xi_i^{\text{GK}})^2} \cdot \left[\sum_{m=0}^{(N-1)/2} \frac{1}{2^m m!} \left(\frac{2\alpha^2 \beta^2}{1+2\delta^2} - 1\right)^m H_{2m}(\xi_i^{\text{GH}}) \right] \quad (11)$$

式(11)中的相关参数可定义为

$$\begin{cases} \beta = \left(1 + \left(\frac{2\epsilon}{\alpha}\right)^2\right)^{1/4} \\ \delta^2 = \frac{\alpha^2}{2}(\beta^2 - 1) \end{cases} \quad (12)$$

式中: $\alpha = 1/\sqrt{2}$; $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$, σ 为高斯核带宽, 可对该参数进行调整; $H_{2m}(x)$ 为 $2m$ 阶的厄米特多项式显示表达

$$H_{2m}(x) = \frac{(2m)!}{2^m} \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^{m-l}}{(2l)!(m-l)!} (\sqrt{2}x)^{2l} \quad (13)$$

引理 1 可用于单变量数值积分近似, 通过该方法获得的高斯核积分点以及相匹配的积分权重构成了本文所提算法的基础, 可称为基于比例高斯-厄米特节点的高斯核积分规则, 简称为高斯核积分规则。

注 1: 当高斯核带宽 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon = 0, \beta = 1$, 比例因子 $1/\sqrt{2}\alpha\beta = 1$, 则有 $\xi_i^{\text{GK}} = \xi_i^{\text{GH}}$, 且 $\omega_i^{\text{GK}} = \omega_i^{\text{GH}}$, 此时的高斯核积分规则转变为传统高斯-厄米特积分。

将单变量高斯核积分扩展为多变量积分的方法可利用张量积方法。张量积方法变换后的形式与多维高斯-厄米特积分相似, 仅采用的积分点和权重不同, 有

$$E[g(\mathbf{x})] \approx \sum_{l_{n_x}=1}^{N_p} \omega_{l_{n_x}}^{\text{GK}} \dots \sum_{l_1=1}^{N_p} \omega_{l_1}^{\text{GK}} g(\hat{\mathbf{x}} +$$

$$\mathbf{S}[\xi_{l_1}^{\text{GK}}, \dots, \xi_{l_{n_x}}^{\text{GK}}]^{\text{T}} \quad (14)$$

将第 l 个多变量高斯核积分点表示为 $\xi_l^{\text{GK}} = [\xi_{l_1}^{\text{GK}}, \xi_{l_2}^{\text{GK}}, \dots, \xi_{l_{n_x}}^{\text{GK}}]$, 相应的积分权重 $\omega_l^{\text{GK}} = \omega_{l_1}^{\text{GK}} \omega_{l_2}^{\text{GK}} \dots \omega_{l_{n_x}}^{\text{GK}}$, 其中, $l_1, l_2, \dots, l_{n_x} \in \{1, 2, \dots, N_p\}$, 且 $l \in \{1, 2, \dots, (N_p)^{n_x}\}$. 式(14)又可写成

$$E[g(\mathbf{x})] = \sum_{l=1}^L \omega_l^{\text{GK}} g(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{S} \xi_l^{\text{GK}}) \quad (15)$$

式中 $L = (N_p)^{n_x}$ 为多变量高斯核积分点数。

将张量积方法扩维后的高斯核积分点及相应权重置于高斯滤波框架之下获得的非线性滤波方法称为高斯核积分滤波 GKQF 算法。

2.2 高斯核积分滤波算法

与一般的高斯近似滤波相似, GKQF 算法主要通过时间更新和量测更新两个步骤来实现。滤波过程如下。

(1) 滤波初始化。

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{P}_{0|0} = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^{\text{T}}] \end{cases} \quad (16)$$

(2) 时间更新。利用 $k-1$ 时刻的状态期望 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 以及协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 分解获得的采样点, 有

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^{\text{T}} \quad (17)$$

$$\mathbf{x}_{l,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \xi_l^{\text{GK}} + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (18)$$

传播采样点

$$\mathbf{X}_{l,k|k-1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{l,k-1|k-1}) \quad (19)$$

计算预测状态和预测协方差矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \sum_{l=1}^L \omega_l^{\text{GK}} \mathbf{X}_{l,k|k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sum_{l=1}^L \omega_l^{\text{GK}} (\mathbf{X}_{l,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{X}_{l,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^{\text{T}} + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (21)$$

(3) 量测更新。通过预测协方差矩阵分解获得采样点 $\bar{\mathbf{x}}_{l,k|k-1}$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^{\text{T}} \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{l,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \xi_l^{\text{GK}} + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (23)$$

进行采样点的传播

$$\mathbf{Z}_{l,k|k-1} = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{l,k|k-1}) \quad (24)$$

计算预测量测及新息协方差矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} &= \sum_{l=1}^L \omega_l^{\text{GK}} \mathbf{Z}_{l,k|k-1} \\ \mathbf{P}_{zz,k|k-1} &= \end{aligned} \quad (25)$$

$$\sum_{l=1}^L \omega_l^{\text{GK}} (\mathbf{Z}_{l,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\mathbf{Z}_{l,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^{\text{T}} + \mathbf{R}_k \quad (26)$$

估计互协方差矩阵并计算滤波增益

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xz,k|k-1} &= \\ \sum_{l=1}^L \omega_l^{\text{GK}} (\bar{\mathbf{x}}_{l,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_{l,k|k-1}) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^{\text{T}} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{P}_{xz,k|k-1} \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{-1} \quad (28)$$

k 时刻的状态估计与估计协方差

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{\text{T}} \quad (30)$$

该滤波过程中的积分点和权重分别为 $\xi^{\text{GK}} = [\xi_1^{\text{GK}}, \dots, \xi_l^{\text{GK}}, \dots, \xi_L^{\text{GK}}]$, $\omega^{\text{GK}} = [\omega_1^{\text{GK}}, \dots, \omega_l^{\text{GK}}, \dots, \omega_L^{\text{GK}}]$, 可采用高斯核积分规则进行构造。

2.3 平方根 GKQF

GKQF 算法存在协方差矩阵的平方根分解, 为了提高滤波的数值稳定性, 可采用 QR 分解来代替传统的 Cholesky 分解, 这样便形成了平方根高斯核积分滤波算法。具体的实现方法如下。

(1) 预测协方差平方根 $\mathbf{S}_{k|k-1}$ 被直接计算以进行积分点的传播, 避免每一步运行时对 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 计算并进行因式分解。具体地, $\mathbf{S}_{k|k-1}$ 计算式为

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \text{qr}([\mathbf{X}_{k|k-1}^*, \mathbf{S}_{Q_{k-1}}]) \quad (31)$$

式中 $\text{qr}(\cdot)$ 表示 QR 分解, 且有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k|k-1}^* &= [\mathbf{X}_{1,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \dots, \mathbf{X}_{L,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \dots, \\ &\quad \mathbf{X}_{L,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] ((\omega^{\text{GK}})^{1/2})^{\text{T}} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \mathbf{S}_{Q_{k-1}} \mathbf{S}_{Q_{k-1}}^{\text{T}} \quad (33)$$

利用式(31)替换式(21)(22)。

(2) 新息协方差矩阵 $\mathbf{P}_{zz,k|k-1}$ 采用平方根形式

$$\mathbf{S}_{zz,k|k-1} = \text{qr}([\mathbf{Z}_{k|k-1}, \mathbf{S}_{R_k}]) \quad (34)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k|k-1} &= [\mathbf{Z}_{1,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}, \dots, \mathbf{Z}_{L,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}, \dots, \\ &\quad \mathbf{Z}_{L,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}] ((\omega^{\text{GK}})^{1/2})^{\text{T}} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{S}_{R_k} \mathbf{S}_{R_k}^{\text{T}} \quad (36)$$

进而, 滤波增益调整为

$$\mathbf{W}_k = (\mathbf{P}_{xz,k|k-1} / \mathbf{S}_{zz,k|k-1}^{\text{T}}) / \mathbf{S}_{zz,k|k-1} \quad (37)$$

(3) 误差协方差平方根 $\mathbf{S}_{k-1|k-1}$ 被直接计算以避免对 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 计算并进行因式分解, 即

$$\mathbf{S}_{k|k} = \text{qr}([\mathbf{X}_{k|k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{Z}_{k|k-1}, \mathbf{W}_k \mathbf{S}_{R_k}]) \quad (38)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k|k-1} &= [\bar{\mathbf{x}}_{1,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{L,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \dots, \\ &\quad \bar{\mathbf{x}}_{L,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] ((\omega^{\text{GK}})^{1/2})^{\text{T}} \end{aligned} \quad (39)$$

利用式(38)替换式(17)(30)。

3 仿真实验与分析

3.1 一类非线性滤波问题

为验证本文所提算法的有效性,考虑典型二维非线性系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = |20\cos(\mathbf{x}_{k-1})| + \boldsymbol{\eta}_k \\ y_k = \sqrt{(1 + \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k)} + v_k \end{cases} \quad (40)$$

系统的初始真实值 $\mathbf{x}_0 = [1, 2]^T$, 滤波初值 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = [3, 4]^T$, 初始协方差矩阵 $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, 系统噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q} = [2.5 \ 0.25; 0.25 \ 2.5]$, 测量噪声标准差 $R=1$ 。为描述滤波估计精度, 定义状态 1 的均方根误差和平均均方根误差分别为

$$e_{\text{RMSE}} \triangleq \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_k^i - \hat{x}_k^i)^2} \quad (41)$$

$$e_{\text{ARMSE}} \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_k^i - \hat{x}_k^i)^2} \quad (42)$$

式中: $k=1, 2, \dots, T$, 滤波时间步数 $T=100$; 蒙特卡罗次数 $M=500$; $\hat{x}_k^i$ 为 k 时刻第 i 次仿真状态 1 的估计量。

为方便比较, GKQF 算法选取单变量积分点数 $N_p=3$ 。首先, 讨论高斯核带宽 σ 对估计精度的影响, 不同高斯核带宽下 GKQF 算法的平均均方根误差如图 1 所示。可以看出: 当 $\sigma=0.4$ 时, e_{ARMSE} 达到最小; 当 $\sigma>0.8$ 时, e_{ARMSE} 随 σ 增大逐渐呈平稳趋势; 当 $\sigma<0.4$ 时, e_{ARMSE} 随 σ 减小急剧增大, 这是由于 σ 过小导致比例因子 $1/\sqrt{2}\alpha\beta$ 过小, 高斯核积分点 ξ^{GK} 距离过近引发对加权高斯积分拟合能力的退化, 因此高斯核带宽的选取不宜过小。

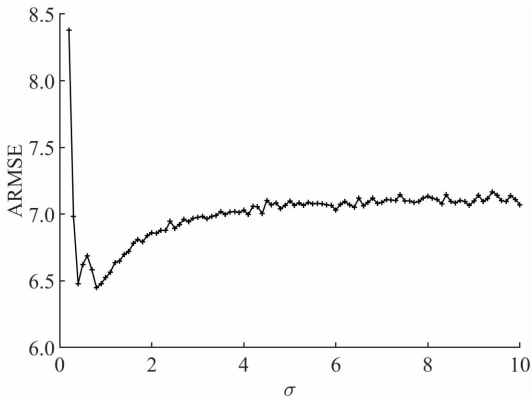


图 1 不同 σ 下 GKQF 的平均均方根误差

Fig. 1 The e_{ARMSE} of GKQF with different σ

其次, 将本文所提的 GKQF、SGKQF 算法与 CKF、GHQF 算法进行对比说明。各算法滤波精度

仿真结果如图 2 所示。可以看出: 当 $\sigma=0.4$ 时, GKQF 和 SGKQF 算法相较于 UKF、CKF、GHQF 具有更高的估计精度; 当 $\sigma=10$ 时, GKQF 与 GHQF 均方根误差相接近, 这与 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, GKQF 等价于 GHQF 这一特性具有一致性。可以概括, 当 $\sigma \in [0.4, 10]$ 时, GKQF 可取得较 GHQF 更好的估计性能。

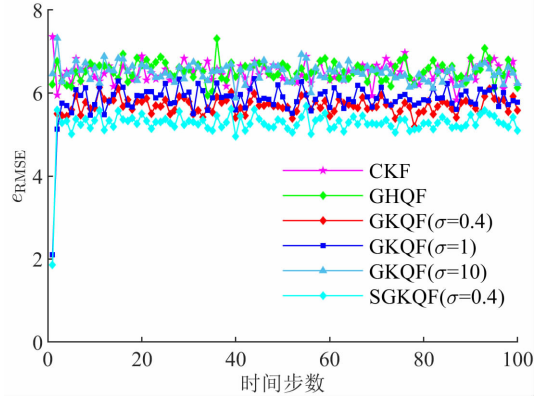


图 2 各算法在状态 1 时的均方根误差比较

Fig. 2 The e_{RMSE} comparison of different algorithms under state 1

综合可知, GKQF 算法的精度随着高斯核带宽 σ (从正无穷起始, 当 $\sigma \rightarrow \infty$, GKQF 等价于 GHQF) 的减小而增加, 但随着 σ 减小至一定数值后, 误差急剧上升。因此, 在仿真实验过程中可以先选取较大的高斯核带宽, 通过向下逼近以获得更高的估计精度。

3.2 纯方位目标跟踪问题

考虑二维平面内的纯方位目标跟踪问题, 设定系统模型基于笛卡尔坐标系, k 时刻的状态向量定义为 $\mathbf{X}_k^t = [x_k^t, y_k^t, \dot{x}_k^t, \dot{y}_k^t]^T$ 。其中: $[x_k^t, y_k^t]^T$ 为 k 时刻的目标位置向量; $[\dot{x}_k^t, \dot{y}_k^t]^T$ 为速度向量。类似地, 纯方位观测站的状态向量可定义为 $\mathbf{X}_k^s = [x_k^s, y_k^s, \dot{x}_k^s, \dot{y}_k^s]^T$, 由此 k 时刻目标相对运动状态为 $\mathbf{X}_k \triangleq \mathbf{X}_k^t - \mathbf{X}_k^s = [x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k]^T$ 。

本文主要考虑目标做匀速运动时的跟踪问题, 所构建的目标相对运动系统方程可表示成

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (43)$$

式中: $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$; n_x 为状态向量维数; 过程噪声 $\mathbf{w}_{k-1}$ 是满足均值为 0 协方差为 $\mathbf{Q}_{k-1}$ 的高斯白噪声; 转移矩阵 $\mathbf{F}$ 、确定性输入 $\mathbf{u}_{k-1}$ 以及 $\mathbf{Q}_{k-1}$ 的表达式分别为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \Delta t \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{X}_k^s - \mathbf{F}\mathbf{X}_{k-1}^s \quad (45)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \begin{bmatrix} (\Delta t^3/3)\mathbf{I}_{2 \times 2} & (\Delta t^2/2)\mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\Delta t^2/2)\mathbf{I}_{2 \times 2} & \Delta t\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (46)$$

式中: Δt 为采样间隔; $\mathbf{q}$ 为过程噪声强度。

观测站纯方位跟踪的量测方程为

$$z_k = h(\mathbf{X}_k) + v_k = \arctan \frac{x_k}{y_k} + v_k \quad (47)$$

量测噪声 $v_k \sim N(0, \sigma_v^2)$, 且 v_k 与过程噪声 $\mathbf{w}_{k-1}$ 相互独立。

目标及观测站运动轨迹如图3所示, 观测站的初始位置在 $(0, 0)$, 其在 $0 \sim 11$ min 和 $17 \sim 30$ min 作匀速运动, 在 $12 \sim 16$ min 作机动运动。采样间隔 $\Delta t = 1$ min, 仿真时长为 30 min。过程噪声强度 $q = 10^{-11} \text{ km}^2/\text{s}^3$ 。

假定各算法的初始条件相同, 利用先验信息进行初始化。初始距离估计为 $\bar{r} \sim N(r, \sigma_r^2)$, 初始方位角估计为 $\theta_0 \sim N(\theta, \sigma_\theta^2)$, 目标初始速度估计为 $s_0 \sim N(s, \sigma_s^2)$, 目标初始航向角估计为 $\bar{c} \sim N(c, \sigma_c^2)$ 。其中, $r = 6 \text{ km}$, $\theta = 70^\circ$, $s = 2 \text{ m/s}$, $c = -145^\circ$ 分别表示初始距离、初始方位角、目标初始速度、目标初始航向角的真实值, $\sigma_r = 2 \text{ km}$, $\sigma_\theta = 1.5^\circ$, $\sigma_s = 1 \text{ m/s}$, $\sigma_c = \pi/\sqrt{12}$ 分别表示相应的标准差。依据初始条件可获得初始状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 以及初始协方差 $\mathbf{P}_{0|0}$ [24]。性能评价指标位置均方根误差 e_{RMSEpos} 定义为

$$e_{\text{RMSEpos}} \triangleq \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [(x_k^i - \hat{x}_{k|k}^i)^2 + (y_k^i - \hat{y}_{k|k}^i)^2]} \quad (48)$$

式中 $(\hat{x}_{k|k}^i, \hat{y}_{k|k}^i)$ 为 k 时刻第 i 次仿真的目标相对位置估计。类似可得速度均方根误差 e_{RMSEvel} 。

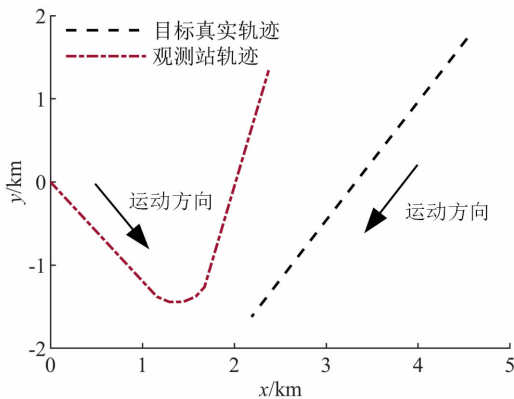


图3 目标及观测站运动轨迹

Fig. 3 The movement trajectory of target and observing station

根误差。其中, SGKQF 算法分别选取高斯核带宽 $\sigma = 2.5, 3, 3.5$ 。可以看出, 所提算法在 $\sigma = 3$ 附近可使纯方位目标跟踪的位置和速度误差达到最小, 其滤波效果优于 UKF、CKF、HCKF 以及 GHQF。仅考虑跟踪过程后 20 min 内的平均均方根误差, 当高斯核带宽取为 3 时, 相比于 GHQF, SGKQF 算法的位置和速度估计精度分别提高了 8.7% 和 11.8%。从这两个例子可以发现, 基于高斯核积分规则形成的 GKQF 和 SGKQF 算法具有更强的估计性能。

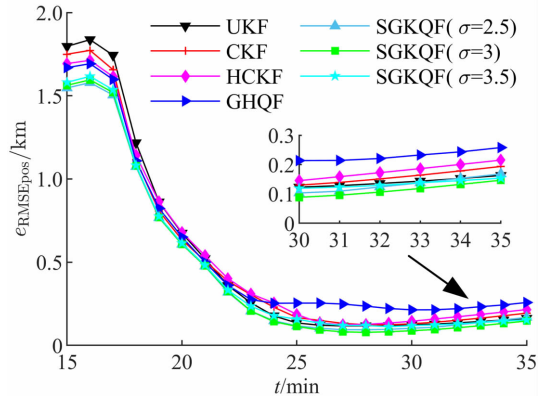


图4 各算法的位置均方根误差比较

Fig. 4 The e_{RMSEpos} comparison of algorithms

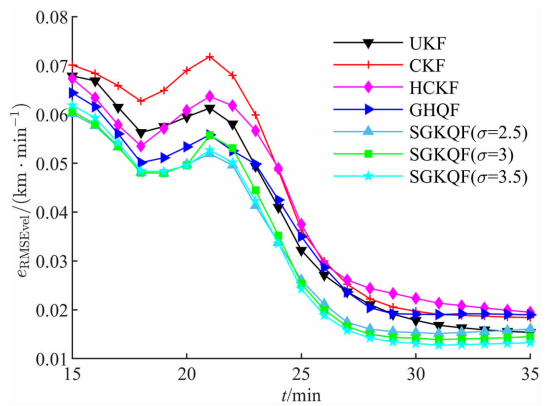


图5 各算法的速度均方根误差比较

Fig. 5 The e_{RMSEvel} comparison of algorithms

表1给出了各算法的积分点数与相对运算时间, 相对运算时间以 CKF 为基准, 系统状态维数 $n = 4$ 。在运算复杂度方面, 与 CKF、UKF 以及 HCKF 算法相比较, GHQF 和 SGKQF 需要更多计算时间。SGKQF 和 GHQF 的采样点数均为 3^n , 其计算代价相近。SGKQF 相较于 GHQF 在没有增加较大运算复杂度的前提下提高了目标跟踪精度, 且能够通过调整高斯核带宽来适应不同的应用需求, 灵活性更高。

表 1 各算法的积分点数与相对运算时间

Table 1 Quadrature points number and relative computation time of algorithms

算法	积分点数	相对运算时间
CKF	$8(2n)$	1.000 0
UKF	$9(2n+1)$	1.317 1
HCKF	$33(2n^2+1)$	1.591 5
GHQF	$81(3^n)$	2.985 6
SGKQF($\sigma=2.5$)	$81(3^n)$	3.102 3
SGKQF($\sigma=3.0$)	$81(3^n)$	3.020 2
SGKQF($\sigma=3.5$)	$81(3^n)$	3.019 6

4 结 论

本文以提高非线性系统滤波估计精度为目的,首先构造与高斯-厄米特积分节点成比例的积分点,采用高斯核构造的线性方程组计算出相应近似权重,建立了单变量高斯核积分规则。再利用张量积方法将其扩展为多维数值积分,并推导了高斯核积分非线性滤波的平方根形式,即 SGKQF 算法。通过仿真实验可得到以下结论。

(1)与 GHQF 算法相比,SGKQF 算法能够在同等计算复杂度下获得更高的目标跟踪精度,且灵活性更强,体现了高斯核积分规则的优越性。同时,所提算法有望提高目标跟踪、信息融合等应用领域所涉及的非线性滤波的精度,能够获得更为精确的状态估计。

(2)在实际应用中,可以考虑采用高斯核带宽的经验取值,也可以提前进行实验测试获得更为准确的高斯核带宽以进一步提高滤波精度。此外,如何采用自适应方法来实时更新高斯核带宽,以及如何在高维非线性系统中降低算法计算复杂度也是未来的探索方向。

参考文献:

[1] SUN Tao, XIN Ming. Bearings-only tracking using augmented ensemble Kalman filter [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2020, 28(3): 1009-1016.

[2] HE Renke, CHEN Shuxin, WU Hao, et al. Robust maneuver strategy of observer for bearings-only tracking [J]. Asian Journal of Control, 2019, 21(4): 1719-1731.

[3] ZHANG Huilong, DUFOUR F, ANSELM J, et al. Piecewise optimal trajectories of observer for bearings-

only tracking by quantization [C]//Proceedings of the 2017 20th International Conference on Information Fusion. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2017: 1-7.

[4] CHEN Yuming, LI Wei, WANG Yuqiao. A robust adaptive indirect in-motion coarse alignment method for GPS/SINS integrated navigation system [J]. Measurement, 2021, 172: 108834.

[5] LEONG P H, ARULAMPALAM S, LAMAHEWA T A, et al. A Gaussian-sum based cubature Kalman filter for bearings-only tracking [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(2): 1161-1176.

[6] LEONG P H, ARULAMPALAM S, LAMAHEWA T A, et al. Gaussian-sum cubature Kalman filter with improved robustness for bearings-only tracking [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(5): 513-517.

[7] 李兆铭,杨文革,丁丹,等. 高阶球面单形-径向容积求积分卡尔曼滤波算法 [J]. 通信学报, 2017, 38(8): 111-117.

LI Zhaoming, YANG Wenge, DING Dan, et al. High-degree spherical simplex-radial cubature quadrature Kalman filter [J]. Journal on Communications, 2017, 38(8): 111-117.

[8] QUINE B M. A derivative-free implementation of the extended Kalman filter [J]. Automatica, 2006, 42(11): 1927-1934.

[9] JULIER S J, UHLMANN J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.

[10] 崔培林,周翟和,吕品,等. 自适应误差四元数无迹卡尔曼滤波四旋翼飞行器姿态解算方法 [J]. 西安交通大学学报, 2019, 53(3): 97-102, 110.

CUI Peilin, ZHOU Zhaihe, LÜ Pin, et al. Adaptive error quaternion unscented Kalman filter algorithm for quadrotor attitude calculation [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2019, 53(3): 97-102, 110.

[11] ARASARATNAM I, HAYKIN S, ELLIOTT R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 953-977.

[12] 巫春玲,韩崇昭. 求积分卡尔曼粒子滤波算法 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(2): 25-28, 42.

WU Chunling, HAN Chongzhao. Quadrature Kalman particle filter [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(2): 25-28, 42.

[13] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,

- 2009, 54(6): 1254-1269.
- [14] 秦康, 董新民, 陈勇, 等. 基于 Huber 的鲁棒广义高阶容积卡尔曼滤波算法 [J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 88-94.
QIN Kang, DONG Xinmin, CHEN Yong, et al. Huber-based robust generalized high-degree cubature Kalman filter [J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 88-94.
- [15] 张龙, 崔乃刚, 杨峰, 等. 高阶容积卡尔曼滤波及其在目标跟踪中的应用 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 37(4): 573-578.
ZHANG Long, CUI Naigang, YANG Feng, et al. High-degree cubature Kalman filter and its application in target tracking [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2016, 37(4): 573-578.
- [16] WANG Shiyuan, FENG Jiuchao, TSE C K. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(1): 43-46.
- [17] BHAUMIK S, SWATI. Cubature quadrature Kalman filter [J]. IET Signal Processing, 2013, 7(7): 533-541.
- [18] KARVONEN T, SÄRKKÄ S. Gaussian kernel quadrature at scaled Gauss-Hermite nodes [J]. BIT Numerical Mathematics, 2019, 59(4): 877-902.
- [19] VAN DER MERWE R, WAN E a. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation [C] // Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2001: 3461-3464.
- [20] 巫春玲, 韩崇昭. 基于平方根求积卡尔曼滤波器的弹道目标跟踪 [J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 721-724, 729.
WU Chunling, HAN Chongzhao. Tracking ballistic target based on square root quadrature Kalman filter [J]. Control and Decision, 2010, 25(5): 721-724, 729.
- [21] DUAN Jianmin, SHI Hui, LIU Dan, et al. Square root cubature Kalman filter-Kalman filter algorithm for intelligent vehicle position estimate [J]. Procedia Engineering, 2016, 137: 267-276.
- [22] JIA Bin, XIN Ming, CHENG Yang. Sparse Gauss-Hermite quadrature filter with application to spacecraft attitude estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(2): 367-379.
- [23] CHEN Badong, LIU Xi, ZHAO Haiquan, et al. Maximum correntropy Kalman filter [J]. Automatica, 2017, 76: 70-77.
- [24] 姜浩楠, 蔡远利. 鲁棒高斯和集合卡尔曼滤波及其在纯角度跟踪中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2018, 35(2): 129-136.
JIANG Haonan, CAI Yuanli. Robust Gaussian-sum ensemble Kalman filter and its application in bearings-only tracking [J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(2): 129-136.

(编辑 陶晴)