

# 考虑裂纹与磨损故障的齿轮传动系统 动态特性分析

孔艺一<sup>1</sup>, 章翔峰<sup>1</sup>, 姜宏<sup>1</sup>, 周建星<sup>1</sup>, 董宁<sup>1</sup>, 尚俊<sup>1</sup>, 王成<sup>2</sup>, 孙雪岩<sup>2</sup>

(1. 新疆大学机械工程学院, 830047, 乌鲁木齐; 2. 中国北方车辆研究所, 100072, 北京)

**摘要:** 针对齿轮系统中同时出现裂纹与磨损故障时实现复合故障诊断较为困难的问题, 提出了考虑齿廓磨损和齿根裂纹故障的齿轮传动系统动态特性分析模型。首先, 基于 Archard 公式, 建立齿轮传动系统磨损数值仿真模型, 求解不同磨损周期下的齿廓磨损量; 然后, 通过势能法建立裂纹及磨损作用下的单齿啮合刚度计算模型, 在双齿接触区考虑啮合齿对磨损量间的关系, 结合变形协调, 建立双齿啮合刚度计算模型; 最后, 采用集中质量法建立齿轮系统 4 自由度动力学模型, 以含故障的时变啮合刚度为输入, 使用 Newmark- $\beta$  法对动态响应进行求解, 获得不同程度裂纹与磨损作用下的齿轮动态特性。实验结果表明: 该模型能够较好反应复合故障中磨损与裂纹特征; 与未考虑磨损后双齿区实际变形的裂纹与磨损复合故障模型相比, 该复合故障模型双齿区刚度计算准确性提高了约 22%, 所提模型可为含磨损与裂纹的齿轮传动系统故障诊断提供有效的动力学补充。

**关键词:** 时变啮合刚度; 齿根裂纹; 齿廓磨损; 动力学模型; 动态响应

**中图分类号:** TH132.417 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.7652/xjtuxb202303014 **文章编号:** 0253-987X(2023)03-0150-10

## Dynamic Characteristics Analysis of Gear Transmission System Considering Crack and Wear Fault

KONG Yiyi<sup>1</sup>, ZHANG Xiangfeng<sup>1</sup>, JIANG Hong<sup>1</sup>, ZHOU Jianxing<sup>1</sup>,  
DONG Ning<sup>1</sup>, SHANG Jun<sup>1</sup>, WANG Cheng<sup>2</sup>, SUN Xueyan<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830047, China;

2. China North Vehicle Research Institute, Beijing 100072, China)

**Abstract:** In response to the difficulty of composite fault diagnosis when cracks and wear faults occur simultaneously in gear system, a dynamic characteristic analysis model of gear transmission system considering profile wear and root cracks is proposed. Firstly, a numerical simulation model of gear transmission system wear is established based on Archard formula to solve the tooth profile wear under different wear cycles. Then, the meshing stiffness calculation model of single tooth under the action of crack and wear is established by the potential energy method. The relationship between meshing teeth and wear is considered in the contact area of double teeth, and the meshing stiffness calculation model of double teeth is established combined with deformation co-

收稿日期: 2022-09-19。 作者简介: 孔艺一(1998—), 男, 硕士生; 章翔峰(通信作者), 男, 副教授。 基金项目: 新疆维吾尔自治区重点研发计划资助项目(2021B01003-1); 新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(2021D01C050); 国家自然科学基金资助项目(51665054)。

网络出版时间: 2022-11-21

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20221121.1035.002.html>

ordination. Finally, a 4-DOF dynamic model of the gear system is established by using the centralized mass method, and the dynamic response is solved by using the Newmark- $\beta$  method with time-varying mesh stiffness with faults as the input. The dynamic characteristics of the gear under different degrees of cracks and wear are obtained. The experimental results show that the model can reflect the wear and crack characteristics of composite faults well. Compared with the crack and wear composite fault model without considering the actual deformation of the double teeth region after wear, the accuracy of the stiffness calculation of the double teeth region of the composite fault model is improved by about 22%. The proposed model can provide an effective dynamic supplement for the fault diagnosis of the gear transmission system with wear and crack.

**Keywords:** time-varying mesh stiffness; gear root cracks; gear tooth profile wear; dynamical model; dynamic response

齿轮是动力传动单元的重要组成部分,其传动比精确、结构紧凑、传动平稳、使用寿命长、工作可靠性好,因此在各种机械装置和工业生产中得到了广泛的应用。但由于齿轮系统在高工作负荷、恶劣的工作条件下将会出现不可避免的疲劳<sup>[1]</sup>。在过载、润滑不充分时会发生变形进而导致磨损、裂纹、点蚀、剥落甚至是断齿等故障<sup>[2-3]</sup>,从而直接影响到设备的安全运行。特别是在一些大型工程领域,齿轮故障往往会造成巨大的经济损失,甚至威胁到人们的生命财产安全。因此,为了避免上述情况的发生,对齿轮故障机理的研究就显得尤为重要<sup>[4]</sup>。

齿轮故障形式较常见的是裂纹和磨损。在啮合过程中,裂纹主要出现在齿根处,而磨损则发生在齿面。但无论是发生磨损还是裂纹,都会破坏表面材料,导致轮齿有效截面积减小,齿轮啮合刚度发生改变,最终影响齿轮系统动态特性。在磨损故障方面,由 Flodin 等<sup>[5-6]</sup>基于广义 Archard 磨损方程较早地建立了直齿圆柱齿轮磨损预测的数值模型,通过计算,得到了齿轮表面磨损量的分布规律,为齿轮磨损机理的研究奠定了基础。随后,国内外学者针对齿轮磨损故障的研究多基于此模型,进一步改进了建模方法或将其推广到其他类型的齿轮中进行运用。例如:Wang 等<sup>[7]</sup>建立了一种具有较高计算精度的粗糙表面接触数值模型,并将其应用于直齿轮的磨损预测;Chen 等<sup>[8]</sup>、沈智宪等<sup>[9]</sup>采用势能法研究了齿面磨损对啮合刚度的影响以及齿面磨损对齿轮系统动态特性的影响;Huangfu 等<sup>[10]</sup>、Brethee 等<sup>[11]</sup>、Shen 等<sup>[12-14]</sup>研究了磨损对直、斜、薄边齿轮啮合刚度的影响,结果表明磨损会导致刚度下降;Kahraman 等<sup>[15-16]</sup>对直齿轮和行星齿轮表面磨损与动态响应之间的相互作用进行了研究,结果表明磨损不

仅影响振动振幅,还影响非线性响应的性质;张荣华等<sup>[17]</sup>基于 Archard 磨损公式建立了行星齿轮传动系统动态磨损数值仿真模型。从这些模型中可以发现,磨损故障会导致齿轮齿廓发生改变,进而导致系统出现振动幅值增大的故障特征,但是上述模型均未考虑到磨损后啮合齿轮双齿区的实际变形,导致所计算的刚度值在双齿区偏大。

受齿轮复杂工况及故障间的并发性和耦合性影响,磨损发生的同时也可能发生裂纹故障。在裂纹方面,Tian 等<sup>[18]</sup>采用势能法推导了考虑剪切刚度的正常齿轮整体啮合刚度,并利用该方法推导出了含裂纹齿轮的啮合刚度。之后的学者对势能法进行了改进并使用其研究了不同类型齿轮或不同故障程度裂纹对齿轮刚度的影响规律以及裂纹故障特征在动态响应中的分布形式。例如:Yang 等<sup>[19]</sup>提出了一种改进的裂纹齿轮啮合刚度计算模型,其中考虑了裂纹开裂程度,对裂纹齿的有效压缩截面进行了重新评价;Jiang 等<sup>[20]</sup>以斜齿轮为对象提出了一个考虑轴向啮合刚度分量和齿轮体挠度的裂纹斜齿轮的啮合刚度分析模型,结果表明这种分析模型能够提供相对准确的啮合刚度;孟宗等<sup>[21]</sup>采用修正势能法计算了含齿根裂纹故障的齿轮振动特性,研究结果表明啮合刚度会随着裂纹深度的增加而降低,动态响应上也会出现明显的周期性冲击;Jiang 等<sup>[22]</sup>基于信号卷积定理,建立了行星齿轮系的振动信号模型,揭示了太阳齿轮和齿圈开裂的故障特征。这些模型都有效地分析了齿轮故障对刚度以及动态特性的影响规律,但他们的研究存在处理复杂、计算量大等问题,且未进一步考虑到磨损和裂纹同时发生时的故障特征变化规律。

总的来说,目前单独计算磨损和裂纹的理论模

型已经趋于成熟,但是在定量分析磨损和裂纹复合故障对于齿轮动态特性的影响上有所欠缺。针对上述问题,本文建立了考虑齿廓磨损和齿根裂纹故障的齿轮传动系统动态特性分析模型,综合研究了故障对啮合刚度的影响和动态响应结果中故障特征的分布规律和变化趋势;讨论了不同裂纹深度和不同磨损程度故障特征在响应中的变化情况,得到了复合故障下裂纹和磨损故障的特征分布规律。本文研究可为磨损与裂纹复合故障诊断提供一定的理论依据。

## 1 齿轮磨损机理

### 1.1 Archard 磨损计算模型

Archard 磨损计算模型是一种被广泛使用的计算磨损量的方法。基于单点观测法,齿廓上一点的 Archard 磨损方程可以表示为

$$h_w = \int_0^s k_w p ds \tag{1}$$

式中: $h_w$  为磨损深度; $k_w$  为无量纲磨损数; $s$  为滑动距离; $p$  为啮合点接触压力。

$p$  点的第  $n$  次的磨损量可以表示为

$$\Delta h_w(n) = k_w p(n)s \tag{2}$$

式中: $h_w(n)$  为第  $n$  次磨损的磨损深度; $p(n)$  为  $p$  点在第  $n$  次啮合时的接触压力; $k_w$  的数值由材料的性质、润滑的情况、轮齿齿廓表面粗糙度以及所承载荷所决定。无量纲磨损系数选择详见文献[8]。

### 1.2 磨损量计算

本文计算了不同磨损次数  $N$  下的磨损量,齿轮系统参数如表 1 所示。

表 1 齿轮系统参数  
Table 1 Gear system parameter

| 参数      | 数值  | 参数                                        | 数值                    |
|---------|-----|-------------------------------------------|-----------------------|
| 主动轮齿数   | 36  | 模数/mm                                     | 1.5                   |
| 从动轮齿数   | 90  | 齿宽/mm                                     | 12                    |
| 压力角/(°) | 20  | 磨损系数/( $\text{m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$ ) | $1 \times 10^{-18}$   |
| 泊松比     | 0.3 | 弹性模量/Pa                                   | $2.06 \times 10^{11}$ |

磨损量计算结果如图 1 所示,图中横坐标压力角从小到大表示齿轮从齿根到齿顶的啮合过程。从图中可见:在压力角为  $20^\circ$  时磨损量为 0;在齿根处与齿顶处磨损量最大;整个齿廓磨损趋势从齿根到齿顶呈现为先减小后增大的“V”形分布,磨损量的大小随着磨损次数的增加逐渐增大。该磨损退化过程在文献[17]中得到验证。

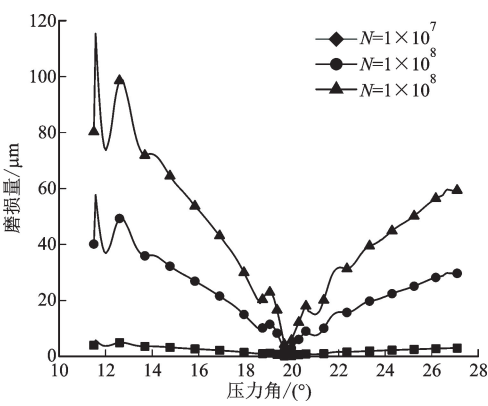


图 1 不同磨损次数下单齿齿廓累计磨损量  
Fig.1 Cumulative wear depth of single tooth profile with different wear times

## 2 啮合刚度计算

### 2.1 正常齿啮合刚度计算

对齿轮的刚度进行求解时往往将其简化为变截面悬臂梁,啮合时其势能由 4 个部分的能量组成:径向压缩变形能  $U_a$ 、剪切变形能  $U_s$ 、弯曲势能  $U_b$ 、赫兹接触势能  $U_h$ 。计算公式分别如下

$$U_h = \frac{F^2}{2k_h} \tag{3}$$

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b} = \int_0^d \frac{[F_b(d-x) - F_a h]^2}{2EI_x} dx \tag{4}$$

$$U_s = \frac{F^2}{2k_s} = \int_0^d \frac{1}{2} \frac{2F_b^2}{2GA_x} dx \tag{5}$$

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a} = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x} dx \tag{6}$$

式中: $F$  为沿啮合线方向的作用力; $h$  为啮合点到对称截面中心的距离; $E$  为弹性模量; $G$  为剪切模量; $d$  为啮合点到齿根截面的距离; $x$  为齿面任意一点到齿根截面的距离; $F_a$ 、 $F_b$  为  $F$  展开的两个正交力; $I_x$ 、 $A_x$  分别为同齿根距离为  $x$  处的惯性矩和截面积; $k_a$  为径向压缩刚度; $k_s$  为剪切刚度; $k_b$  为弯曲刚度; $k_h$  为赫兹刚度。

总势能表示为

$$U = \frac{F^2}{2k} = \frac{F^2}{2} \left( \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} \right) \tag{7}$$

式中:下标 1 表示主动轮;下标 2 表示从动轮。

综上所述,齿轮单齿啮合刚度可表示为

$$k_1 = \left( \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}} \right)^{-1} \tag{8}$$

双齿啮合刚度可表示为

$$k_2 = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{k_{h,i}} + \frac{1}{k_{b1,i}} + \frac{1}{k_{s1,i}} + \frac{1}{k_{f1,i}} + \frac{1}{k_{a1,i}} + \frac{1}{k_{b2,i}} + \frac{1}{k_{s2,i}} + \frac{1}{k_{a2,i}} + \frac{1}{k_{f2,i}} \right) \quad (9)$$

式中: $i$ 表示第 $i$ 对啮合齿; $k_f$ 表示齿轮基体变形刚度。

## 2.2 故障齿啮合刚度计算

为分析不同程度裂纹以及磨损对齿轮啮合刚度的影响,求取不同裂纹深度(0.5、1、1.5、2 mm)与不同磨损量下的齿轮啮合刚度。

根据齿轮裂纹深度以及磨损量计算结果,分析磨损量影响区域与裂纹影响区域的交叉与包络关系,可将齿轮复合故障模型分为模型1、模型2两种进行计算。模型1为含磨损与浅裂纹齿轮悬臂梁模型,如图2所示。图中存在裂纹影响区与磨损影响区两个部分,其中裂纹影响区由蓝色线与齿廓线组成,磨损区由红色线与齿廓线组成。模型2为深裂纹影响下齿轮的齿形悬臂梁模型,如图3所示,可见裂纹较深时,裂纹影响区将完全包络磨损影响区。

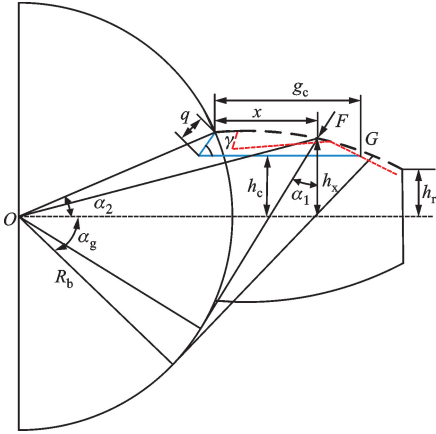


Fig. 2 A tooth profile cantilever model of a gear with shallow cracks(model 1)

图2 浅裂纹影响下齿轮的齿形悬臂梁模型(模型1)

由于齿面发生磨损,当裂纹和磨损同时存在时,刚度计算需分两个区域讨论:在 $x > g_c$ 时,齿廓区域主要是由齿面磨损导致的截面积与惯性矩的改变;在 $x \leq g_c$ 时,主要是由齿根裂纹导致的截面积与惯性矩的改变。

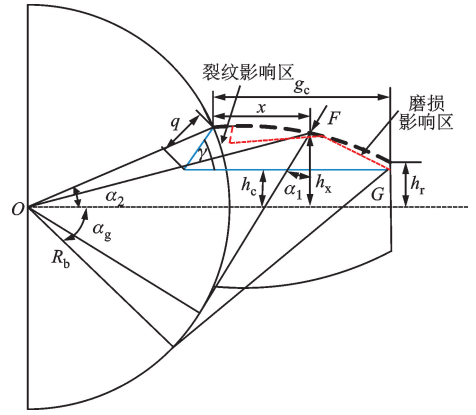


Fig. 3 A tooth profile cantilever model of a gear with deep crack(model 2)

图3 深裂纹影响下齿轮的齿形悬臂梁模型(模型2)

当裂纹深度小于齿顶半齿厚时,根据模型1,当 $h_r \leq h_c$ 、 $\alpha_g \leq \alpha_1$ 时,轮齿截面积和惯性矩可表示为

$$A_x = \begin{cases} (h_a + h_x)L, & x \leq g_c \\ (2h_x - h_w)L, & x > g_c \end{cases} \quad (10)$$

$$I_x = \begin{cases} (h_a + h_x)^3 L/12, & x \leq g_c \\ (2h_x - h_w)^3 L/12, & x > g_c \end{cases} \quad (11)$$

式中: $h_a$ 为裂纹深度在竖直方向的投影长度; $L$ 为齿宽。此时,弯曲、压缩和剪切刚度计算方法分别如下

弯曲刚度为

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-a_g}^{a_2} \{ [12(1 + \cos \alpha_1)((\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha))^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha] / [EL (\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \gamma + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha)^3] \} d\alpha + \int_{-a_1}^{-a_g} \{ [12(1 + \cos \alpha_1)((\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha) + h_w \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 / R_b^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha] / [EL (\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha - h_w \cos \alpha_1 / R_b)^3] \} d\alpha \quad (12)$$

剪切刚度为

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-a_g}^{a_2} \{ [2.4(1 + \gamma)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha (\cos \alpha_1)^2] / [EL (\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \gamma + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha)] \} d\alpha + \int_{-a_1}^{-a_g} \{ [2.4(1 + \gamma)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha (\cos \alpha_1)^2] / [EL (\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha - h_w \cos \alpha_1 / R_b)] \} d\alpha \quad (13)$$

对于径向压缩刚度,裂纹部分轮齿仍然可以承受径向压缩力<sup>[25]</sup>,但此时磨损会对径向压缩刚度有影响,则径向压缩刚度可表示为

$$\frac{1}{k_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha (\sin \alpha_1)^2}{EL [2 (\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha) - h_w \cos \alpha_1 / R_b]} d\alpha$$

(14)

当裂纹深度大于齿顶半齿厚时,在含有裂纹的轮齿上,磨损对于刚度的影响已经完全消失,只有裂纹对于刚度有影响。此时根据模型 2,当  $h_c \leq h_r$  或  $h_c \geq h_r, \alpha_1 \geq \alpha_g$  时,轮齿截面积和惯性矩可表示为

$$A_x = (h_a + h_x)L$$

(15)

$$I_x = (h_a + h_x)^3 L / 12$$

(16)

裂纹轮齿的弯曲啮合刚度为

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_g}^{\alpha_2} \{ [12 (1 + \cos \alpha_1 ((\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha))^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha] / [EL (\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \gamma + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha)^3] \} d\alpha$$

(17)

裂纹轮齿的剪切刚度为

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_g}^{\alpha_2} \{ 2.4 (1 + \gamma) (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha (\cos \alpha_1)^2 / [EL (\sin \alpha_2 - (q/R_b) \sin \gamma + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha)] \} d\alpha$$

(18)

单齿区啮合刚度计算同公式(8),双齿区刚度计算可参考文献[27],表示为

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n k_{12i}}{1 + \sum_{i=1}^n k_{12i} e_{zi} / F}$$

(19)

式中:  $k_{12j}$  为啮合刚度;  $e_{zi}$  为轮齿误差,  $z=1,2$ ;  $n$  为啮合齿对数。

2.3 啮合刚度计算结果

本文取磨损  $N=1 \times 10^7$ 、 $N=2 \times 10^8$  次的齿廓与齿根贯通裂纹深度分别为 0.5 mm、1 mm、1.5 mm、2 mm,裂纹方向  $\gamma=45^\circ$  的故障进行组合,探究同种磨损状态不同裂纹深度以及同种裂纹深度不同磨损状态下的刚度变化情况,如表 2、表 3 所示。

表 2 磨损状态 1

Table 2 Wear condition 1

| 磨损次数              | 裂纹情况        |
|-------------------|-------------|
| $N=1 \times 10^7$ | 主动轮故障与从动轮正常 |
| $N=1 \times 10^7$ | 主动轮正常与从动轮故障 |

表 3 磨损状态 2

Table 3 Wear condition 2

| 磨损次数              | 裂纹情况        |
|-------------------|-------------|
| $N=2 \times 10^8$ | 主动轮故障与从动轮正常 |
| $N=2 \times 10^8$ | 主动轮正常与从动轮故障 |

不同磨损量下,齿轮裂纹深度的变化对齿轮啮合刚度的影响如图 4、图 5 所示,从图中可见,随着裂纹深度的增加,齿轮的啮合刚度逐渐降低,并且刚度下降幅度随着裂纹的劣化而增大,这是由于齿轮齿根产生裂纹时,齿轮变形量增大,进而导致刚度降低,与文献[23-24]表述一致。无裂纹不同磨损量对刚度的影响如图 6 所示,从图中可见,在磨损状态不同情况下,齿轮时变啮合刚度随着磨损次数的增大逐渐降低,磨损早期变化很小,随着磨损量的增大下降幅度增大,由于齿廓磨损而改变了齿轮轮廓,因而双齿区的幅值和相位发生了改变,这一表现于文献[14]中有所验证。相比于文献[9]等文献的求解分析结果准确性提升了约 22%。对比裂纹与磨损对于刚度的影响,在磨损较为轻微而裂纹较大时,裂纹对于刚度的影响明显大于磨损对于刚度的影响,此时耦合刚度由裂纹主导;在磨损较为严重,裂纹较小时磨损对于刚度的影响较大,耦合刚度由磨损主导。

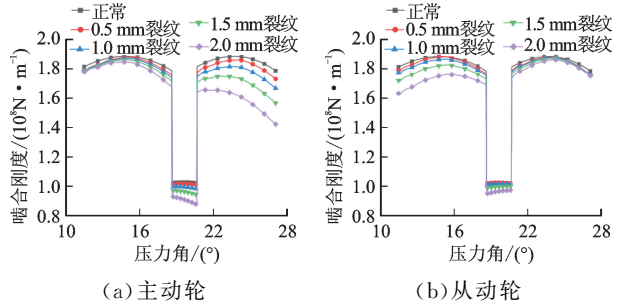


图 4 磨损次数  $N=1 \times 10^7$  时不同裂纹深度的啮合刚度  
Fig. 4 Meshing stiffness at different crack depths with wear times  $N=1 \times 10^7$

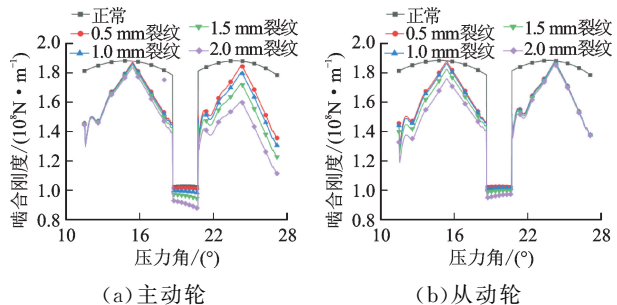


图 5 磨损次数  $N=2 \times 10^8$  时不同裂纹深度的啮合刚度  
Fig. 5 Meshing stiffness at different crack depths with wear times  $N=2 \times 10^8$

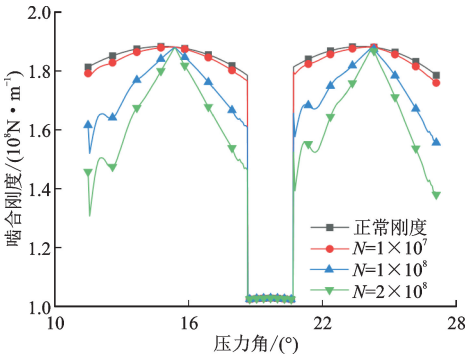


图 6 不同磨损次数下的啮合刚度  
Fig. 6 Meshing stiffness under different wear times

3 齿轮系统无负载静态传递误差

无负载静态传递误差主要由制造误差、齿廓修形等原因造成,将无负载静态传递误差分为长周期误差、短周期误差、随机误差和由齿轮磨损造成的传递误差<sup>[9]</sup>,可表示为

e = e\_{A1} + e\_{A2} + e\_{error} + e\_{wear} \tag{20}

式中: e\_{A1} 为长周期误差; e\_{A2} 为短周期误差; e\_{error} 为随机误差; e\_{wear} 为齿廓磨损量所导致传递误差。 e\_{A1} 幅值取切向综合总偏差为 72 μm, e\_{A2} 幅值取一齿切向综合偏差为 23 μm, e\_{error} 为分布在 [0,1] 的随机数, e\_{wear} 为根据文献[25]得到的由磨损造成的传递误差。

将所计算的齿廓磨损量导入式(21)中,将磨损视为一种特殊的齿廓修型,分别得到齿轮在啮合次数为 1×10<sup>7</sup>、1×10<sup>8</sup>、2×10<sup>8</sup> 的情况下的传递误差,如图 7 所示。可以看出,随着磨损次数的增加,无负载静态传递误差逐渐增大。

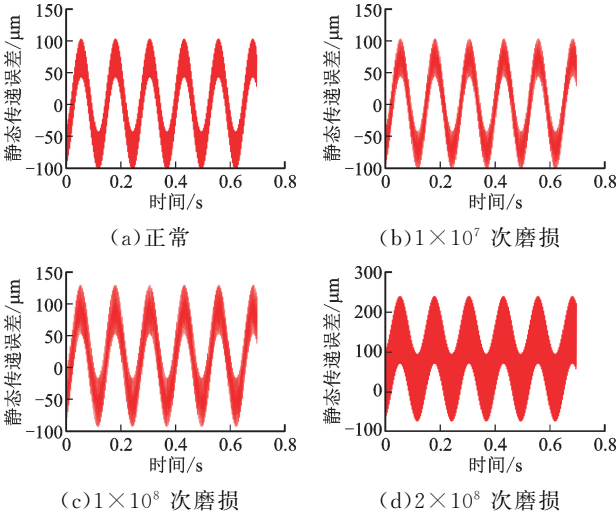


图 7 不同磨损情况下的无负载静态传递误差  
Fig. 7 Static transfer error without load at different wear depths

4 故障齿轮动态响应分析

4.1 齿轮系统动力学模型

根据集中质量法建立 4 自由度、弯-扭耦合齿轮系统动力学模型,每个齿轮分为平动 y 和转动 θ 两个自由度,其动力学模型如图 8 所示。

模型的力学方程可表示为式(21)、式(22)。

\begin{cases} m\_p \ddot{y}\_p + c\_{py} \dot{y}\_p + k\_{py} y\_p = -c\_m (\dot{y}\_p + R\_p \dot{\theta}\_p - \dot{y}\_g + R\_g \dot{\theta}\_g - \dot{e}) - \\ \quad R\_g \dot{\theta}\_g - \dot{e}) - k\_m (y\_p + R\_p \theta\_p - y\_g + R\_g \theta\_g - e) \\ I\_p \ddot{\theta}\_p = -c\_m R\_p (\dot{y}\_p + R\_p \dot{\theta}\_p - \dot{y}\_g + R\_g \dot{\theta}\_g - \dot{e}) - \\ \quad k\_m R\_p (y\_p + R\_p \theta\_p - y\_g + R\_g \theta\_g - e) - T\_p \end{cases} \tag{21}

式中: m\_p 为主动轮质量; I\_p 为主动轮转动惯量; c\_{py} 为主动轮平移振动阻尼系数; k\_{py} 为主动轮平移振动刚度; R\_p 为主动轮基圆半径; T\_p 为输入扭矩; c\_m 为轮齿啮合阻尼; k\_m 为啮合刚度。

\begin{cases} m\_g \ddot{y}\_g + c\_{gy} \dot{y}\_g + k\_{gy} y\_g = c\_m (\dot{y}\_p + R\_p \dot{\theta}\_p - \dot{y}\_g + R\_g \dot{\theta}\_g - \dot{e}) + \\ \quad R\_g \dot{\theta}\_g - \dot{e}) - k\_m (y\_p + R\_p \theta\_p - y\_g + R\_g \theta\_g - e) \\ I\_g \ddot{\theta}\_g = c\_m R\_g (\dot{y}\_p + R\_p \dot{\theta}\_p - \dot{y}\_g + R\_g \dot{\theta}\_g - \dot{e}) - \\ \quad k\_m R\_g (y\_p + R\_p \theta\_p - y\_g + R\_g \theta\_g - e) - T\_g \end{cases} \tag{22}

式中: m\_g 为从动轮质量; I\_g 为从动轮转动惯量; c\_{gy} 为从动轮平移阻尼系数; k\_{gy} 为从动轮平移振动刚度; R\_g 为从动轮基圆半径; T\_g 为负载扭矩。

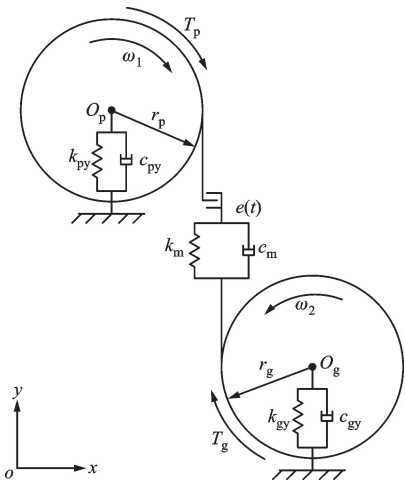


图 8 4 自由度动力学模型  
Fig. 8 Four degrees of freedom dynamics model

4.2 动态响应结果分析

主动轴输入转速为 v=78.5 rad/s,则齿轮系统

主动轮转动频率  $f_p=25\text{ Hz}$ 、周期  $T_1=0.04\text{ s}$ ，从动轮转动频率  $f_g=10\text{ Hz}$ 、周期  $T_2=0.01\text{ s}$ ，啮合频率  $f_m=900\text{ Hz}$ 。对不同故障组合下的齿轮系统动力学方程采用 Newmark- $\beta$  法进行求解。

在仅含磨损时，不同磨损量下齿轮振动响应如图 9 所示。仅含有裂纹故障时，不同裂纹深度下，齿轮的动态响应如图 10、图 11 所示。同时含有磨损与裂纹且其中一种故障随时间劣化时，齿轮系统动态响应如图 12~图 15 所示。

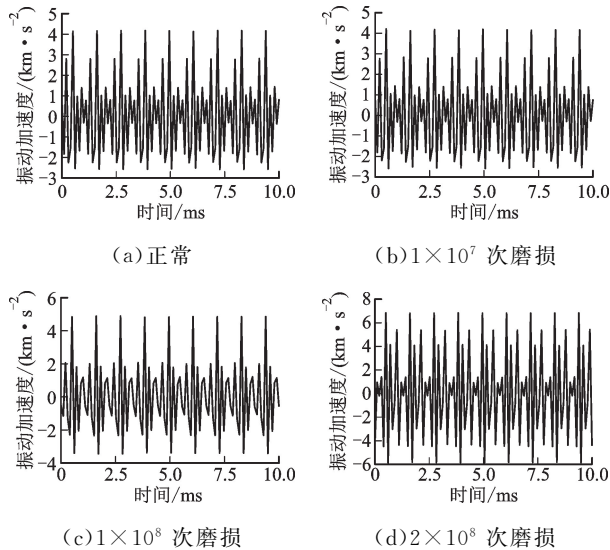


图 9 不同磨损情况下的时域响应

Fig. 9 Time domain response under different wear conditions

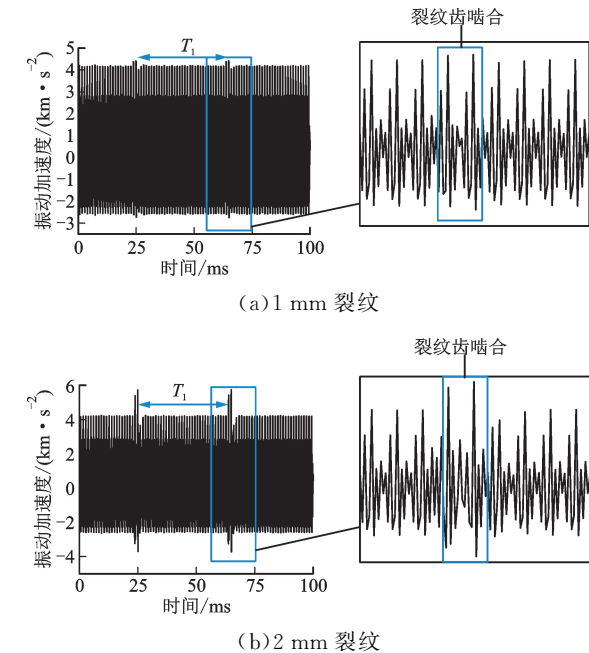


图 10 主动轮无磨损时不同裂纹深度的动态响应

Fig. 10 Dynamic response of the driving wheel without wear to different crack depths

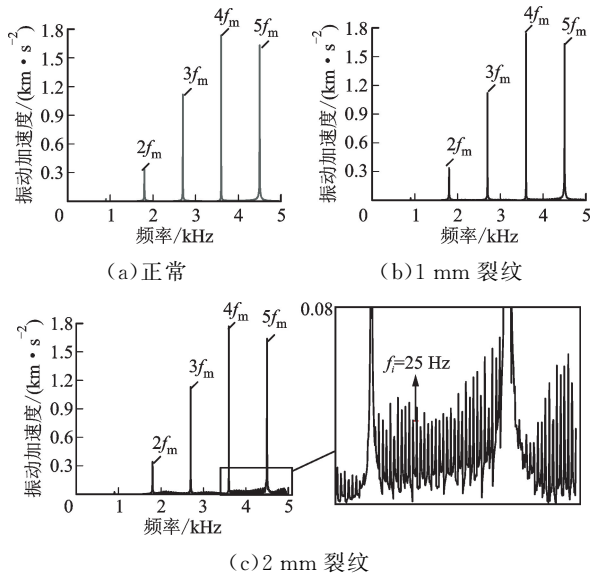


图 11 无磨损不同裂纹深度的响应频谱

Fig. 11 No wear of response spectrum for different crack depths

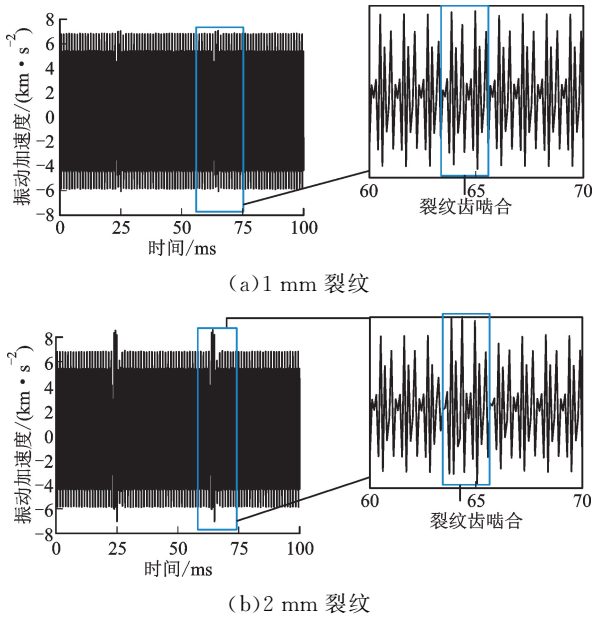


图 12 磨损  $2\times 10^8$  次主动轮不同裂纹深度的动态响应

Fig. 12 Dynamic response of driving wheel wear  $2\times 10^8$  times with different crack depth

对比同时含有磨损与裂纹的齿轮和仅含有裂纹的齿轮，如图 10、图 12 与图 14，发现在复合故障中周期性冲击幅值相比仅含裂纹的要大，但 1 mm 裂纹在复合故障的情况下表现并不如单裂纹故障明显。表明磨损对于系统的影响体现在振动幅值的整体增大，并且微裂纹故障周期性冲击的特征会在这种增大趋势中被淹没；对比同时含有磨损与裂纹的齿轮和仅含有磨损的齿轮，如图 9 与图 12，可见裂

纹故障在复合故障的系统中体现为一种周期性冲击。对比复合故障与裂纹故障频域图 11 与图 13, 可以发现复合故障啮合频率的 4 倍频、5 倍频幅值增长明显, 边频带主要出现在 3、4、5 倍频周围。

当主、从动轮同时存在裂纹故障时, 对比图 12 与图 15, 可见存在两种周期性的冲击, 以及在周期重合时出现较大的冲击, 出现这 3 种情况的原因是主从动轮都有故障齿时, 存在主动轮故障轮齿与从动轮正常轮齿啮合、主动轮正常齿与从动轮故障轮齿啮合、以及主动轮故障齿与从动轮故障轮齿啮合这 3 种情况。当主动轮故障齿与从动轮正常轮齿啮合时, 冲击周期为  $T_1$ ; 当主动轮正常齿与从动轮故障轮齿啮合时, 冲击周期为  $T_2$ ; 当主动轮故障齿与从动轮故障轮齿啮合时, 时域上会出现比上述两种情况冲击幅值更大的冲击, 这是由于两个故障轮齿啮合导致综合啮合刚度急剧下降所引起的。

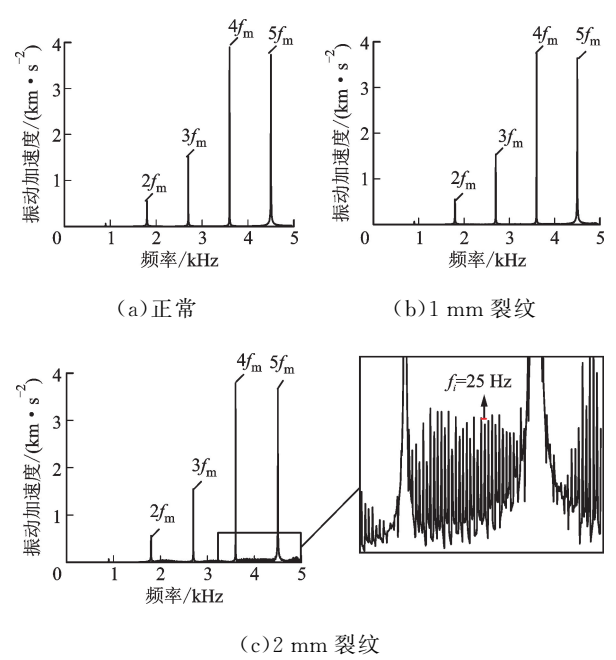


图 13 磨损  $2 \times 10^8$  次主动轮不同裂纹深度的响应频谱  
Fig. 13 Response spectrum of driving wheel wear  $2 \times 10^8$  times with different crack depths

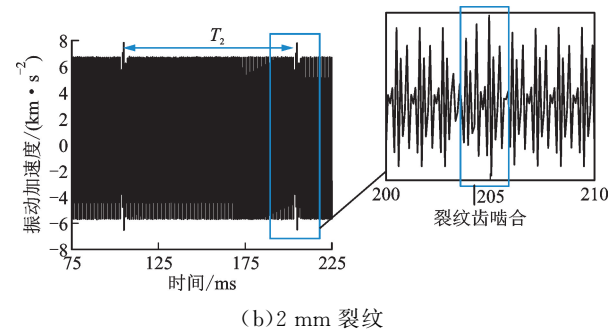
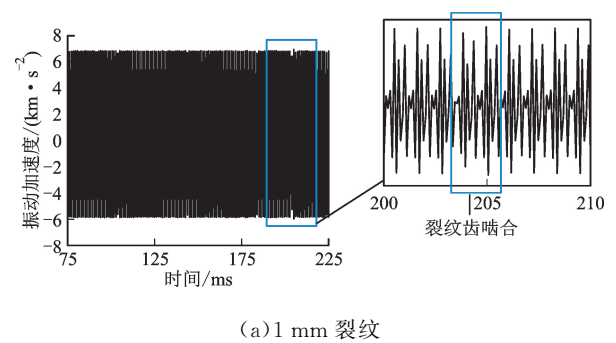


图 14 磨损  $2 \times 10^8$  次从动轮不同裂纹深度动态响应  
Fig. 14 Dynamic response of different crack depth of driven wheel with  $2 \times 10^8$  wear times

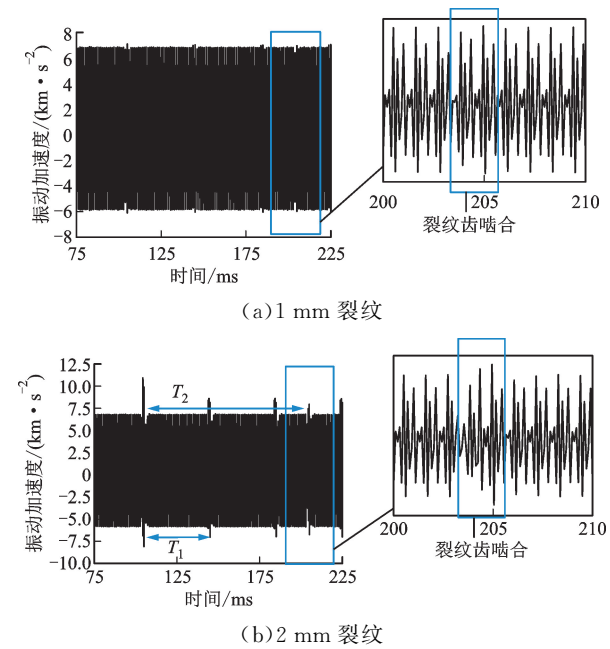


图 15 磨损  $2 \times 10^8$  次主、从动轮不同裂纹深度动态响应  
Fig. 15 Dynamic response of driving wheel and driven wheel at different crack depths with  $2 \times 10^8$  wear times

综上分析, 随着故障的劣化, 复合故障会同时体现出裂纹与磨损两种故障的时频域特征。在磨损量稍大而裂纹较小时, 磨损对于裂纹所产生的冲击特征有掩盖作用, 导致两种故障在早期时域只会体现出全域故障的特征, 而磨损量大裂纹也较大时, 磨损会对裂纹有一定的增幅作用, 导致冲击幅值变大。

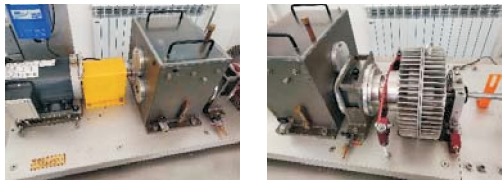
### 5 试验验证

本文所用试验台如图 16 所示, 试验台参数如表 4 所示, 裂纹齿轮与磨损齿轮如图 17 所示。采用齿数分别为 36、90 的齿轮对, 其中 36 齿齿轮为故障齿, 含 1.5 mm 裂纹故障以及磨损, 其磨损次数为

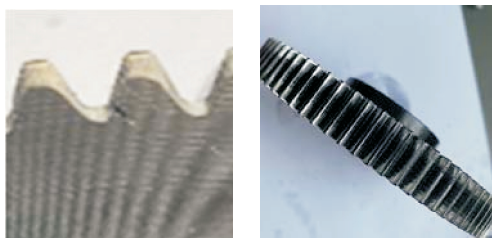
$1\times 10^7$ , 36 齿齿轮为输入轴主动轮, 输入转频为 25 Hz, 则啮合频率为 900 Hz。裂纹故障频率为 25 Hz, 周期为  $T=0.04$  s。

表 4 试验台数据  
Table 4 Test bed data

| 参数      | 数值 | 参数       | 数值  |
|---------|----|----------|-----|
| 主动轮齿数   | 36 | 模数/mm    | 1.5 |
| 从动轮齿数   | 90 | 齿宽/mm    | 12  |
| 压力角/(°) | 20 | 负载/(N·m) | 20  |

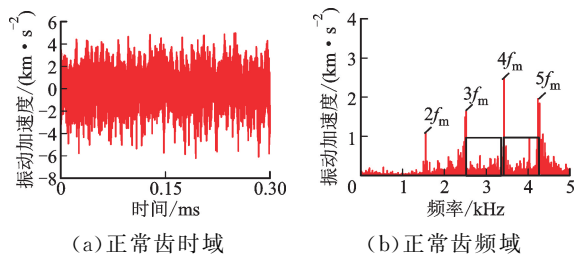


(a) 试验台输入轴侧 (b) 试验台输出轴侧  
图 16 测试试验台  
Fig. 16 Test bench

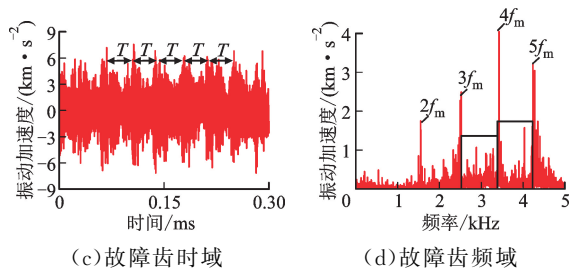


(a) 裂纹齿轮 (b) 磨损齿轮  
图 17 故障齿轮  
Fig. 17 Fault gear

试验所得正常齿轮与磨损及裂纹复合故障齿轮的时频域数据如图 18 所示, 从时域图对比中可见: 磨损对于全域振动幅值的影响较为微弱, 主要原因是所用齿轮磨损量较小, 但也能从对比中看出幅值增大的现象, 与前述仿真结果表现具有一致性; 对比频域图则可以明显看出幅值增大, 同时边频带也变得更为复杂, 与仿真结果表现一致。将实验结果与仿真结果对比, 可知振动加速度的相对误差在 4% 左右, 证明考虑齿廓磨损和齿根裂纹故障的齿轮传动系统动态特性分析模型具有一定的有效性。



(a) 正常齿时域 (b) 正常齿频域



(c) 故障齿时域 (d) 故障齿频域

图 18 正常齿轮与含磨损和裂纹齿轮的时、频域对比  
Fig. 18 Time and frequency domain comparison between normal gear and gear with wear and crack

## 6 结 论

(1) 在势能法的基础上推导了同时含有裂纹以及磨损故障的齿轮刚度计算公式, 通过分析刚度计算结果, 发现: 故障耦合刚度在磨损轻微而裂纹稍大时由裂纹主导, 在磨损严重而裂纹较为轻微时由磨损主导。

(2) 裂纹与磨损耦合的复合故障具有局部性和全局性两种故障特征, 即周期性冲击与全域幅值增大, 复合故障早期只会体现出全局性特征, 随着故障劣化, 全局特征会与局部特征间存在相互增幅作用。

(3) 通过分析同时含有磨损与裂纹故障齿轮系统的动态特性并结合实验验证, 发现早期的磨损在实际工况中会与噪声混叠难以被发现, 随着故障的劣化, 磨损量的大小也会影响微裂纹故障被发现的难易程度。由于外界噪声的影响, 传递函数存在很大的不同, 理论和实际还存在差距。

## 参考文献:

[1] LIANG Xihui, ZUO M J, FENG Zhipeng. Dynamic modeling of gearbox faults: a review [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 98: 852-876.

[2] 雷亚国, 罗希, 刘宗尧, 等. 行星轮系动力学新模型及其故障响应特性研究 [J]. 机械工程学报, 2016, 52 (13): 111-122.

LEI Yaguo, LUO Xi, LIU Zongyao, et al. A new dynamic model of planetary gear sets and research on fault response characteristics [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 111-122.

[3] 冯松, 毛军红, 谢友柏. 齿面磨损对齿轮啮合刚度影响的计算与分析 [J]. 机械工程学报, 2015, 51(15): 27-32.

FENG Song, MAO Junhong, XIE Youbai. Analysis and calculation of gear mesh stiffness with tooth wear [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(15): 27-32.

[4] OUYANG Tiancheng, WANG Geng, YANG Rui, et

- al. A novel mathematical model for analysis of the cracked planet gear [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2022, 138: 106398.
- [5] FLODIN A, ANDERSSON S. Simulation of mild wear in spur gears [J]. *Wear*, 1997, 207(1/2): 16-23.
- [6] FLODIN A, ANDERSSON S. Simulation of mild wear in helical gears [J]. *Wear*, 2000, 241(2): 123-128.
- [7] WANG Hongbing, ZHOU Changjiang, WANG Haihang, et al. A novel contact model for rough surfaces using piecewise linear interpolation and its application in gear wear [J]. *Wear*, 2021, 476: 203685.
- [8] CHEN Wei, LEI Yulong, FU Yao, et al. A study of effects of tooth surface wear on time-varying mesh stiffness of external spur gear considering wear evolution process [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 155: 104055.
- [9] 沈智宪, 乔百杰, 罗巍, 等. 齿轮磨损故障动态响应特征与诊断指标研究 [J]. *机械工程学报*, 2021, 57(17): 120-131.
- SHEN Zhixian, QIAO Baijie, LUO Wei, et al. Research on dynamic response characteristics and condition indicators of gear wear fault [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(17): 120-131.
- [10] HUANGFU Yifan, ZHAO Zhifang, MA Hui, et al. Effects of tooth modifications on the dynamic characteristics of thin-rimmed gears under surface wear [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 150: 103870.
- [11] BRETHEE K F, ZHEN Dong, GU Fengshou, et al. Helical gear wear monitoring: modelling and experimental validation [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 117: 210-229.
- [12] SHEN Zhixian, YANG Laihao, QIAO Baijie, et al. Mesh relationship modeling and dynamic characteristic analysis of external spur gears with gear wear [J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2022, 17(1): 9.
- [13] SHEN Zhixian, QIAO Baijie, YANG Laihao, et al. Evaluating the influence of tooth surface wear on TVMS of planetary gear set [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 136: 206-223.
- [14] SHEN Zhixian, QIAO Baijie, YANG Laihao, et al. Fault mechanism and dynamic modeling of planetary gear with gear wear [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 155: 104098.
- [15] FENG Ke, SMITH W A, BORGHESEANI P, et al. Use of cyclostationary properties of vibration signals to identify gear wear mechanisms and track wear evolution [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 150: 107258.
- [16] FENG Ke, SMITH W A, PENG Zhongxiao. Use of an improved vibration-based updating methodology for gear wear prediction [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2021, 120: 105066.
- [17] 张荣华, 曹莉, 周建星, 等. 行星齿轮传动的齿面动态磨损特性 [J]. *西安交通大学学报*, 2021, 55(8): 42-49.
- ZHANG Ronghua, CAO Li, ZHOU Jianxing, et al. Dynamic tooth surface wear characteristics of planetary gear transmission [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2021, 55(8): 42-49.
- [18] TIAN Xinhao. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults [D]. Edmonton: University of Alberta, 2004.
- [19] YANG Lantao, WANG Liming, YU Wennian, et al. Investigation of tooth crack opening state on time varying meshing stiffness and dynamic response of spur gear pair [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2021, 121: 105181.
- [20] JIANG Hanjun, LIU Fuhao. Mesh stiffness modelling and dynamic simulation of helical gears with tooth crack propagation [J]. *Meccanica*, 2020, 55(6): 1215-1236.
- [21] 孟宗, 石桂霞, 王福林, 等. 基于时变啮合刚度的裂纹故障齿轮振动特征分析 [J]. *机械工程学报*, 2020, 56(17): 108-115.
- MENG Zong, SHI Guixia, WANG Fulin, et al. Vibration characteristic analysis of cracked gear based on time-varying meshing stiffness [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(17): 108-115.
- [22] JIANG Fei, DING Kang, HE Guolin, et al. Vibration fault features of planetary gear train with cracks under time-varying flexible transfer functions [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 158: 104237.
- [23] 万志国, 瞿艳阳, 曹宏瑞, 等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模 [J]. *机械工程学报*, 2013, 49(11): 153-160.
- WAN Zhiguo, ZI Yanyang, CAO Hongrui, et al. Time-varying mesh stiffness algorithm correction and tooth crack dynamic modeling [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(11): 153-160.
- [24] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness [J]. *European Journal of Mechanics: A Solids*, 2009, 28(3): 461-468.
- [25] CHEN Zaigang, SHAO Yimin. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 62: 63-74.