

有限容积法对流项离散格式的稳定性与有界性研究

宇波¹, 焦开拓², 陈宇杰¹, 李敬法¹, 邓雅军¹, 王鹏¹, 孙东亮¹

(1. 北京石油化工学院机械工程学院, 102617, 北京;

2. 西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 对于流动传热问题, 控制方程对流项处理不当会导致模拟结果出现无物理意义的振荡或越界现象。针对有限容积法对流项离散格式的稳定性与有界性开展深入研究, 并提出了一种新的高阶有界格式。在对流项离散格式稳定性方面, 指出在均分网格条件下, 边界相邻节点的对流稳定性条件与内部节点不同, 并给出了边界相邻节点处常见对流项离散格式的稳定性条件; 指出绝对稳定的 SGSD 格式权重系数计算方法不唯一, 并给出了两种适合于强对流问题的权重系数表达式。在对流项离散格式有界性方面, 提出了高阶有界格式的通用分段线性形式——GHB 格式 (general high-order bounded scheme), 可提高程序的通用性; 高阶有界格式计算精度、收敛速率和健壮性等性能互相制约, 根据规正变量图中不同区域线型对这些性能的影响, 提出了含有两个可调参数的性能可控的高阶有界格式——AHB 格式 (adjustable high-order bounded scheme); 在此基础上, 通过优化参数得到了计算精度、有界性、收敛速率和健壮性兼顾的 ABC 格式 (accuracy, boundedness and convergence rate-balanced scheme), 并通过多个典型算例验证了该格式计算性能。

关键词: 对流项离散格式的稳定性; 对流项离散格式的有界性; SGSD 格式; 通用高阶有界格式; ABC 格式

中图分类号: TK14 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202304012 **文章编号:** 0253-987X(2023)04-0107-15

Study on the Stability and Boundedness of Discrete Schemes for Convection Term Based on Finite Volume Method

YU Bo¹, JIAO Kaituo², CHEN Yujie¹, LI Jingfa¹, DENG Yajun¹,

WANG Peng¹, SUN Dongliang¹

(1. School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Petrochemical Technology, Beijing 102617, China;

2. State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: For the flow and heat transfer problems, improper discretization of the convection term in the governing equation may cause the simulation results to be out of bounds or oscillate unphysically. In this paper, the stability and boundedness of discrete schemes for the convection term based on the finite volume method were studied, and a new high-order bounded scheme was proposed. For the stability of discrete schemes for the convection term, the convection stability conditions of nodes adjacent to boundary differ from those of internal nodes based on the uniform grid, and the stable range is presented for the common discrete schemes. Besides, the calculation

method of the weight coefficient of the absolutely stable SGSD scheme is not unique. To this end, two calculation expressions of the weight coefficient suitable for the strong convection problem were provided. Regarding the boundedness of discrete schemes for the convection term, a general piecewise linear form of the high-order bounded scheme named GHB scheme (general high-order bounded scheme) was proposed, favoring improving the universality of the program. Besides, based on the idea that the computational accuracy, convergence rate, and robustness of the high-order bounded scheme are mutually restricted and related to the line segment trends in the normalized variable diagram, an adjustable high-order bounded scheme (AHB scheme) with two adjustable parameters was proposed. Furthermore, an ABC scheme (accuracy, boundedness, and convergence rate-balanced scheme) balancing accuracy, boundedness, convergence rate, and robustness is obtained by optimizing the parameters in the AHB scheme, and its computational performance is proven by solving some classical problems.

Keywords: stability of discrete schemes for convective term; boundedness of discrete schemes for convective term; SGSD scheme; general high-order bounded scheme; ABC scheme

有限容积法是数值求解工程流动传热问题的主流方法。基于有限容积法进行控制方程离散时,若对流项处理不当,可能导致模拟结果出现无物理意义的振荡或越界现象。因此,对流项离散格式的性质成为了有限容积法研究的重点^[1-2]。对流项离散常用的低阶格式有一阶迎风格式(first-order upwind difference, FUD)、混合格式、指数格式和乘方格式^[3]。对于强对流问题,采用低阶格式计算稳定,但存在假扩散,计算精度较低。二阶精度及以上的高阶格式可以显著减轻假扩散现象^[4],常见的高阶格式有二阶迎风格式(second-order upwind difference, SUD)、中心差分格式(central difference, CD)和 QUICK 格式等。然而,采用高阶格式可能由于不满足对流项离散格式的稳定性得到非物理意义的振荡解^[5],对流项稳定性分析是有限容积法高阶格式研究的关键点^[6]。SUD 格式只涉及到上游点,为绝对稳定格式,而 CD 格式、QUICK 格式涉及下游点,在网格贝克莱数较大时会产生数值振荡,即为条件稳定格式^[7]。此外,组合 SUD、CD 格式的 SCSD (stability-controllable second-order difference)格式^[8],通过调节 SUD、CD 格式的权重实现稳定性可控。基于 SCSD 格式,Li 等^[9]提出了一种通过网格贝克莱数大小调节 SUD、CD 格式权重的 SGSD (stability-guaranteed second-order difference)格式,该格式可根据当地网格贝克莱数调整权重系数,使其自动满足对流项稳定性条件,兼顾了计算精度和对流项的稳定性。权重系数的计算方法并不唯一,不同权重计算方法对计算精度性存在影响,

但对此鲜有研究。此外,不同对流项离散格式的稳定性条件由当地网格贝克莱数确定,对于与边界相邻的节点,无论是采用内节点法还是外节点法,对于均分网格由于界面与节点之间位置关系特殊,可能导致稳定性条件与内部节点存在差异。但是,目前对流项离散格式的稳定性分析均基于计算区域内部节点,推导得出的对流稳定性条件对于与边界相邻节点的适用性有待探讨。

绝对稳定的对流项离散格式可以避免产生非物理意义的振荡解,但部分绝对稳定的离散格式并不能避免越界现象(待求变量超出物理问题本身所规定的物理量的上下限),即无法保证有界性。对流项离散格式的有界性也是有限容积法研究的关键点^[3]。为了克服越界现象,已发展了多类方法,例如通量密度修正法^[10-12]、规正变量图(normalized variable diagram, NVD)^[13-14]和总变差减小法(total variation diminishing, TVD)^[15-17]等。基于规正变量图,Gaskell 等^[18]提出了对流有界性 CBC(convection boundedness criterion)准则,满足该准则的高阶格式被称为高阶有界格式。经过几十年的发展,国内外学者们提出了多种高阶有界格式,常见的有 SMART^[18]、MINMOD^[19]、HOAB^[20]、SUPERBEE^[21]、MUSCL^[22]等。这些格式在计算精度、收敛速率和健壮性上表现各异^[23],如何构造一种平衡各类性能的高阶有界格式值得探究。

对于上述有限容积法对流项离散格式在稳定性和有界性方面存在的不足,本文采用理论分析和数值试验相结合的方法开展研究:对于对流项稳定性,探究与边界相邻节点的稳定性条件和 SGSD 格

式的权重系数计算方法;对于对流项有界性,分析常见的高阶有界格式特性,总结有利于编程实施的通用表达形式,提出性能可控的高阶有界格式,并进一步优化得到综合计算性能较优的高阶有界格式。

1 对流项离散格式的稳定性

若采用某一对流项离散格式得到的收敛解是不具有物理意义的振荡解,则称该对流项离散格式是不稳定的,否则是稳定的。本节主要针对与边界相邻节点的对流稳定性条件以及绝对稳定的 SGSD 格式权重系数计算方法进行说明。

1.1 与边界相邻节点的对流稳定性条件

本小节基于均分网格的一维常物性稳态无内热源对流扩散问题进行对流项稳定性条件分析,边界采用第一类边界条件。对流项离散采用的一阶迎风格式和二阶迎风格式都是绝对稳定的,中心差分格式和 QUICK 格式的稳定性条件分别为 $Pe_\Delta = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma} \leq 2$, $Pe_\Delta \leq \frac{8}{3}$,其中 Pe_Δ 为网格贝克来数, ρ 为密度, u 为速度在 x 方向的分量, Δx 为网格步长, Γ 为扩散系数。

上述稳定性条件仅适用于与边界不相邻的内点。对于与边界相邻的节点,无论是采用内节点法还是外节点法,边界面上对流通量(CD 格式、QUICK 格式等)和扩散通量的表达式与其他内节点不同,由此得到的边界相邻节点的对流稳定性条件与其他内点不同。内节点法西边界面网格示意图如图 1 所示。

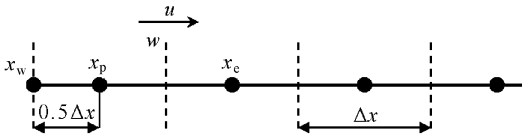


图1 内节点法西边界面网格示意图

Fig. 1 Schematic of the grid at the west boundary based on the cell centered scheme

将一维常物性稳态无内热源对流扩散方程 $\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$ ($u > 0$) 在边界邻点控制容积内积分有

$$\rho u \phi_e - \rho u \phi_w = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (1)$$

式中: ϕ 为待求变量;下标 e、w 代表东、西界面。

若对流项采用 QUICK 格式,扩散项一阶导数采用界面相邻两点近似,采用图 1 所示的均分网格,则式(1)可离散为

$$\rho u \left(-\frac{1}{3} \phi_w + \phi_p + \frac{1}{3} \phi_e \right) - \rho u \phi_w = \Gamma \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x} - \Gamma \frac{\phi_p - \phi_w}{0.5 \Delta x} \quad (2)$$

整理得

$$\left(\rho u + \frac{3\Gamma}{\Delta x} \right) \phi_p = \left(\frac{4}{3} \rho u + \frac{2\Gamma}{\Delta x} \right) \phi_w + \left(-\frac{1}{3} \rho u + \frac{\Gamma}{\Delta x} \right) \phi_e \quad (3)$$

由正型系数法^[3]可知,对流稳定性应满足

$$-\frac{1}{3} \rho u + \frac{\Gamma}{\Delta x} \geq 0 \quad (4)$$

因此对流稳定性条件为 $Pe_\Delta \leq 3$,与内节点采用 QUICK 格式时的对流稳定性条件 $Pe_\Delta \leq \frac{8}{3}$ 不同。

式(2)中扩散项在边界面处一阶导数采用一阶精度格式离散,而对流项中各界面处待求变量和东界面处一阶导数采用二阶精度格式离散。为使得各界面对流通量和扩散通量离散阶数相等,边界面处一阶导数需采用三点近似的二阶格式,此时离散表达式为

$$\rho u \left(-\frac{1}{3} \phi_w + \phi_p + \frac{1}{3} \phi_e \right) - \rho u \phi_w = \Gamma \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\Delta x} \left(-\frac{8}{3} \phi_w + 3\phi_p - \frac{1}{3} \phi_e \right) \quad (5)$$

整理得

$$\left(\rho u + \frac{4\Gamma}{\Delta x} \right) \phi_p = \left(\frac{4}{3} \rho u + \frac{8\Gamma}{3\Delta x} \right) \phi_w + \left(-\frac{1}{3} \rho u + \frac{4\Gamma}{3\Delta x} \right) \phi_e \quad (6)$$

由正型系数法可知,对流稳定性应满足

$$-\frac{1}{3} \rho u + \frac{4\Gamma}{3\Delta x} \geq 0 \quad (7)$$

因此当边界处扩散项一阶导数采用二阶格式离散时,对流稳定性条件为 $Pe_\Delta \leq 4$,依然与内节点的对流稳定性条件 $Pe_\Delta \leq \frac{8}{3}$ 不同。

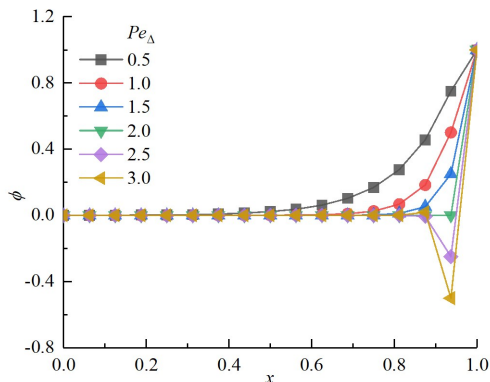
同理,推导了其他情况与边界相邻节点采用 CD 格式、QUICK 格式时的对流项稳定性条件,如表 1 所示,表中上标 1 表示边界处扩散通量中的一阶导数采用一阶精度,2 表示采用二阶精度。由此可知,与边界相邻节点的对流稳定性条件不仅与离散格式相关,还与区域离散方式(内、外节点法)、界面流速方向和边界法线方向相关。

表 1 与边界相邻内点的对流项稳定性条件

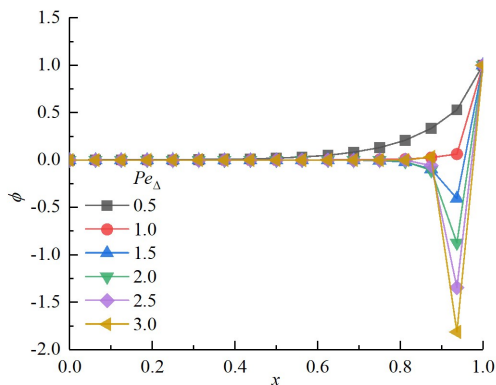
Table 1 Stability conditions of discrete scheme for the convection term at the inner point adjacent to the boundary

对流项离散格式	内节点法($u>0$)		外节点法($u>0$)	
	与西边界相邻内点	与东边界相邻内点	与西边界相邻内点	与东边界相邻内点
CD ¹	$Pe_{\Delta} \leq 2$	$Pe_{\Delta} \leq 2$	$Pe_{\Delta} \leq 2$	$Pe_{\Delta} \leq 1$
QUICK ¹	$Pe_{\Delta} \leq 3$	$Pe_{\Delta} \leq 2$	$Pe_{\Delta} \leq \frac{8}{3}$	$Pe_{\Delta} \leq 1$
CD ²	$Pe_{\Delta} \leq \frac{8}{3}$	$Pe_{\Delta} \leq \frac{8}{3}$	$Pe_{\Delta} \leq 3$	$Pe_{\Delta} \leq \frac{3}{2}$
QUICK ²	$Pe_{\Delta} \leq 4$	$Pe_{\Delta} \leq \frac{8}{3}$	$Pe_{\Delta} \leq 4$	$Pe_{\Delta} \leq \frac{3}{2}$

以一维常物性稳态无内热源对流扩散问题为例,验证内、外节点法内点与边界点的对流项稳定性条件差异。物性参数 $\rho=1, \Gamma=1$, 计算区域 $L=1$, 采用均分网格离散, 网格数为 15, 左右边界条件分别为 $\phi_l=0, \phi_r=1$, 通过调节流速($u>0$)得到 Pe_{Δ} 为 0.5、1.0、1.5、2.0、2.5、3.0 的计算工况。扩散项采用中心差分格式, 对流项采用 QUICK 格式, 边界处扩散通量中的一阶导数采用一阶格式。采用内、外节点法离散得到的计算结果如图 2 所示。由图 2 可知, 内节点法下的计算结果在 $Pe_{\Delta} \geq 2.5$ 时, 靠近东边界处出现振荡, 与表 1 中内节点法东边界对流项稳定性条件为 $Pe_{\Delta} \leq 2$ 相符。外节点法下的计算结果在 $Pe_{\Delta} \geq 1.5$ 时产生振荡, 与表 1 中外节点法东边界对流项稳定性条件为 $Pe_{\Delta} \leq 1$ 相符。当前计算工况下, 东边界处内、外节点法产生振荡的 Pe_{Δ} 均小于内点的推导结果 $\frac{8}{3}$ 。因此, 在进行对流项稳定性判断时, 需特别关注边界点, 避免非物理意义的数值振荡。



(a) 内节点法



(b) 外节点法

图 2 一维常物性无源项稳态对流扩散问题计算结果
Fig. 2 Simulation results of one-dimensional steady convection and diffusion problem without source

对流项稳定性条件是在理想和苛刻的条件下得到的, 事实上对流离散格式的稳定性条件受到流动的维度、非线性、内热源和网格类型等多种因素的影响, 在流动与传热实际工程问题中使数值解发生振荡的 Pe_{Δ} 值往往比理想条件下得到的结果大得多。

1.2 绝对稳定的 SGSF 格式权重计算

数值模拟计算中, 为减轻假扩散的影响, 对流项推荐采用高阶格式进行离散。从物理意义上讲, 大 Pe_{Δ} 表示离散的对流项影响较强、扩散项影响较弱, 采用绝对稳定的 SUD 格式离散较为合适; 反之, 小 Pe_{Δ} 表示离散的对流项影响较弱、扩散项影响较强, 采用条件稳定的 CD 格式较为合适。据此, 结合 SUD 格式、CD 格式的优点, 文献[9]提出对强对流、弱对流问题均适用的绝对稳定的 SGSF 格式

$$\phi_i = \beta \phi_i^{\text{CD}} + (1 - \beta) \phi_i^{\text{SUD}}, \quad \beta = \frac{2}{2 + Pe_{\Delta}} \quad (8)$$

式中: $\phi_i^{\text{CD}}, \phi_i^{\text{SUD}}$ 分别为界面处 CD 格式、SUD 格式的离散表达式。式(8)对于交错网格和同位网格均适用。SGSF 格式中权重系数 β 随 Pe_{Δ} 变化而自适应变化, 对流项和扩散项的影响通过 Pe_{Δ} 反映到界面插值中。可以证明, 式(8)对流稳定性条件为 $Pe_{\Delta} \leq \frac{2}{\beta}$, 又有 $\frac{2}{\beta} = 2 + Pe_{\Delta} \geq Pe_{\Delta}$ 恒成立^[9], 因此 SGSF 格式具有绝对稳定性。

为了减小假扩散并提高计算精度, 王贤钢等^[24]提出了一种新的权重系数计算方法

$$\beta = \frac{a}{a + Pe_{\Delta}}, \begin{cases} a = \frac{(Pe_{\Delta})_{\max}}{3}, & (Pe_{\Delta})_{\max} \geq 6 \\ a = 2, & (Pe_{\Delta})_{\max} < 6 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $(Pe_{\Delta})_{\max}$ 为计算区域中 Pe_{Δ} 的最大值。相较于原权重系数计算方法,该方法在 $Pe_{\Delta} > 6$ 时增大了 CD 格式的权重,但修正后的权重系数计算方法并不满足绝对稳定性条件。

CD 格式、SUD 格式的截差首项系数不同,当满足对流项稳定性时 CD 格式、SUD 格式造成的计算误差也不同,因此 SUD 格式、CD 格式的权重配比会影响 SGSD 格式整体的计算误差。本文以满足绝对稳定性条件为前提,提出了两种权重系数计算方法:

方法 I

$$\beta = \frac{2}{\min(2/Pe_{\Delta}, 2) + 4/3Pe_{\Delta}} \quad (10)$$

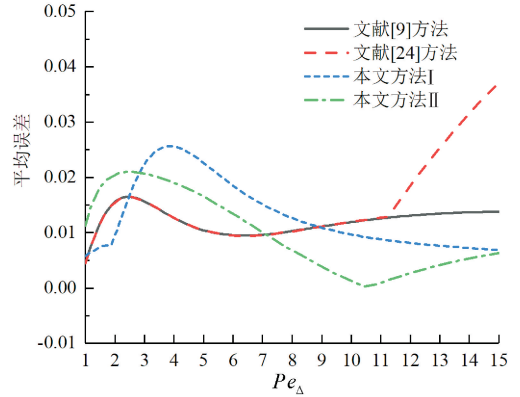
方法 II

$$\beta = \frac{2}{3 + Pe_{\Delta}} \quad (11)$$

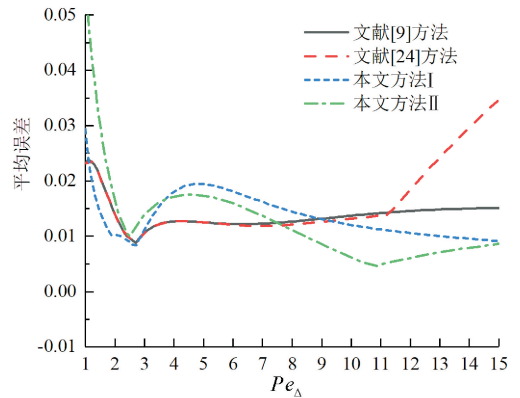
由于 Pe_{Δ} 较大时采用 SUD 格式较合适,相较于原权重系数计算方法,方法 I 在 Pe_{Δ} 为 1~5 时增大了 CD 格式的权重,大于 5 时减小了 CD 格式的权重;方法 II 整体上减小了 CD 格式的权重。下面以一维稳态有源项对流扩散问题为例,对比不同权重系数计算方法的差异。控制方程为 $\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S (u > 0)$, 计算区域 $L=1$, 左右边界条件分别为 $\phi_l=10$ 、 $\phi_r=20$, 物性参数 $\rho=1$ 、 $\Gamma=1$, 在均分网格下采用内节点法离散,网格数为 15,源项考虑两种情况 $S=0$ 、 $S=800x$ 。扩散项一阶导数采用二阶格式,边界面采用二阶格式, Pe_{Δ} 变化范围为 1~15, 流速 u 由 Pe_{Δ} 计算得出,即 $u = \frac{Pe_{\Delta} \Gamma}{\rho \Delta x}$ 。对流项离散界面上 Pe_{Δ} 取值时的特征长度为界面相邻两节点距离,对于内界面其长度均为 Δx ,而对于边界面其长度为 $0.5\Delta x$ 。将计算结果与解析解之差绝对值的平均值定义为平均误差,用于分析各权重系数计算方法的计算精度。

采用 SGSD 格式不同权重系数计算方法得到的平均误差随 Pe_{Δ} 的变化如图 3 所示。由图 3 可知:当 Pe_{Δ} 为 1~2 时,按误差从大到小排序为方法 II、原权重系数计算方法和文献[24]方法、方法 I;当 Pe_{Δ} 为 3~7 时,排序为方法 I、方法 II、原权重系数计算方法和文献[24]方法;当 Pe_{Δ} 为 7~9 时,排序

为方法 I、原权重系数计算方法和文献[24]方法、方法 II;当 $Pe_{\Delta} > 9$ 时,排序为文献[24]方法、原权重系数计算方法、方法 I、方法 II。综合来看,SGSD 格式原权重系数计算方法在较大 Pe_{Δ} 取值范围内并不是最优的,可根据问题需要进行选择。强对流问题可采用本文所提权重计算方法 I、方法 II。



(a) $S=0$



(b) $S=800x$

图 3 不同权重系数下计算平均误差随 Pe_{Δ} 的变化

Fig. 3 Profiles of average error with Pe_{Δ} for different calculation methods of weight coefficient

2 对流项离散格式的有界性

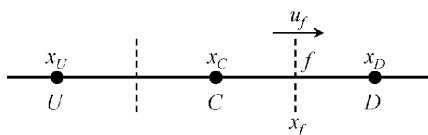
本节主要总结常见对流项高阶有界格式的特点,提出通用表达式和兼顾计算精度、收敛速率、健壮性的高阶有界格式。

2.1 CBC 准则

关于对流项有界性的讨论常基于规正变量的形式,规正变量和规正空间坐标的定义为

$$\bar{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}, \quad \bar{x} = \frac{x - x_U}{x_D - x_U} \quad (12)$$

式(12)中下标 U 、 C 、 D 和 f 的相对位置关系及网格空间坐标如图 4 所示。以规正的 $\bar{\phi}_f$ 为因变量、 $\bar{\phi}_C$ 为自变量,做出的图线为规正变量图(简称 NVD 图)。

图 4 节点坐标及下标 U 、 C 、 D 和 f 的相对位置关系Fig. 4 Node coordinate and relative position of subscripts U , C , D , f

对流项满足有界性的充分必要条件为在规正变量图上满足 CBC 准则,具体表达式为

$$\begin{cases} \bar{\phi}_f = f(\bar{\phi}_C) = 0, & \bar{\phi}_C = 0 \\ \bar{\phi}_f = f(\bar{\phi}_C) = 1, & \bar{\phi}_C = 1 \\ \bar{\phi}_C \leq \bar{\phi}_f = f(\bar{\phi}_C) \leq 1, & 0 < \bar{\phi}_C < 1 \\ \bar{\phi}_f = f(\bar{\phi}_C) = \bar{\phi}_C, & \bar{\phi}_C < 0, \bar{\phi}_C > 1 \\ f(\bar{\phi}_C), & \text{连续} \end{cases} \quad (13)$$

式(13)所示在规正变量图中对应的区域如图 5 中阴影部分所示。在规正变量图中满足 CBC 准则的格式称为有界格式。

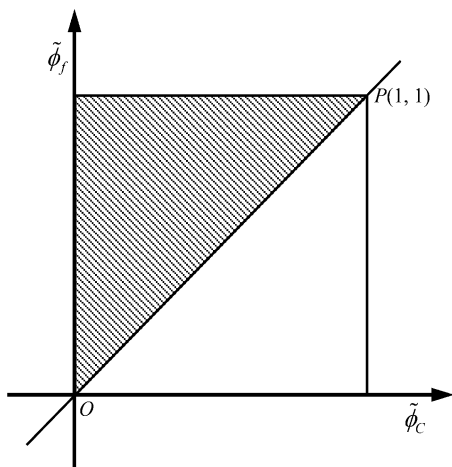


图 5 对流项有界性的 CBC 准则示意图

Fig. 5 Schematic of boundedness criteria for convection term

常见对流项离散格式在均分网格下规正变量图中的图线如图 6 所示。格式图线与纵轴的交点等于该格式对流稳定性条件的倒数,与原点相交的 SUD、FUD 格式为绝对稳定格式。图 6 中位于 CD、SUD 格式之间的阴影区域可视作 CD、SUD 两种二阶格式的组合,因此具有二阶截差精度。具有二阶及以上截差精度并同时满足 CBC 准则的格式称为高阶有界格式,可以证明高阶有界格式是绝对稳

定的格式。基于高阶有界格式的这些优点,建议在工程实际问题中应尽可能采用高阶有界格式离散对流项,以保证得到精度较高且具有物理意义的数值解。

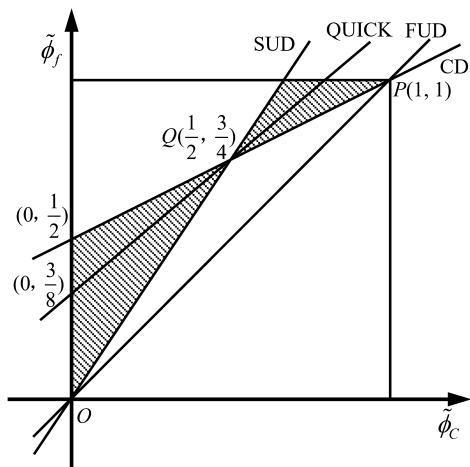


图 6 均分网格下常见对流项离散格式的 NVD 图

Fig. 6 NVD plot of typical discretized schemes for convection term in the uniform grid system

2.2 高阶有界格式通用表达形式

编程时采用规正变量的优势是通用性,将多种高阶有界格式写为通用形式可极大方便多种格式的实施和对比研究。常见的高阶有界格式为分段线性函数,在规正变量图中折点在均分网格下从左到右依次为 $(0, 0)$ 、 (A_x, A_y) 、 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 、 (B_x, B_y) 、 $(1, 1)$,如图 7 所示,据此可推导得到均分网格下通用高阶有界格式(general high-order bounded scheme, GHB)

$$\bar{\phi}_f = \begin{cases} \bar{\phi}_C, & \bar{\phi}_C \leq 0, \bar{\phi}_C \geq 1 \\ \frac{A_y}{A_x} \bar{\phi}_C, & 0 < \bar{\phi}_C \leq A_x \\ \frac{3/4 - A_y}{1/2 - A_x} (\bar{\phi}_C - A_x) + A_y, & A_x < \bar{\phi}_C \leq \frac{1}{2} \\ \frac{B_y - 3/4}{B_x - 1/2} (\bar{\phi}_C - \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < \bar{\phi}_C \leq B_x \\ \frac{1 - B_y}{1 - B_x} (\bar{\phi}_C - B_x) + B_y, & B_x < \bar{\phi}_C < 1 \end{cases} \quad (14)$$

GHB 格式依据 $\bar{\phi}_C$ 得到 $\bar{\phi}_f$,在交错网格和同位网格中均适用,在均分和非均分网格中也均适用。常见高阶有界格式对应的 (A_x, A_y) 和 (B_x, B_y) 在均分和非均分网格下的值如表 2 所示,其中 ABC 格式为本文所提格式。

表 2 常见高阶有界格式坐标点
Table 2 Coordinates of common high-order bounded schemes

格式	均分网格		非均分网格	
	(A_x, A_y)	(B_x, B_y)	(A_x, A_y)	(B_x, B_y)
ABC	$(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$	$(\frac{7}{12}, \frac{7}{8})$	$(\frac{2\tilde{x}_c}{5}, \frac{3\tilde{x}_c-5\tilde{x}_f+2\tilde{x}_c\tilde{x}_f}{5(\tilde{x}_c-1)})$	$(\frac{1}{2}(\frac{\tilde{x}_c}{\tilde{x}_f}+\tilde{x}_c), \frac{1}{2}(1+\tilde{x}_f))$
HOAB	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{4}, 1)$	$(\frac{\tilde{x}_c}{3}, \frac{2\tilde{x}_c-3\tilde{x}_f+\tilde{x}_c\tilde{x}_f}{3(\tilde{x}_c-1)})$	$(\frac{\tilde{x}_c(2-\tilde{x}_c-\tilde{x}_f)}{\tilde{x}_c+\tilde{x}_f-2\tilde{x}_c\tilde{x}_f}, 1)$
MINMOD	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$(\tilde{x}_c, \tilde{x}_f)$	$(\tilde{x}_c, \tilde{x}_f)$
MUSCL	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{4}, 1)$	$(\frac{\tilde{x}_c}{2}, \frac{\tilde{x}_c-3\tilde{x}_f+2\tilde{x}_c\tilde{x}_f}{4(\tilde{x}_c-1)})$	$(\frac{\tilde{x}_c(2-\tilde{x}_c-\tilde{x}_f)}{\tilde{x}_c+\tilde{x}_f-2\tilde{x}_c\tilde{x}_f}, 1)$
SMART	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$	$(\frac{5}{6}, 1)$	$(\frac{\tilde{x}_c}{3}, \frac{\tilde{x}_f(3\tilde{x}_c-1-2\tilde{x}_f)}{3(\tilde{x}_c-1)})$	$(\frac{\tilde{x}_c}{\tilde{x}_f}(1+\tilde{x}_f-\tilde{x}_c), 1)$
SUPERBEE	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{2}{3}, 1)$	$(0, \frac{\tilde{x}_c-\tilde{x}_f}{\tilde{x}_c-1})$	$(\frac{\tilde{x}_c}{\tilde{x}_f}, 1)$

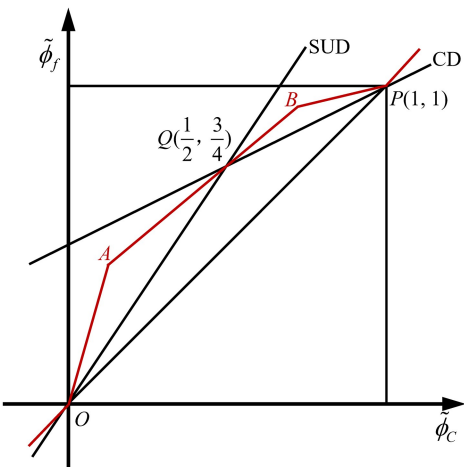


图 7 通用高阶有界格式示意图

Fig. 7 Schematic of general high-order bounded scheme

上述高阶有界格式均可避免越界现象,但通过数值试验发现,不同格式在计算精度、收敛速率和健壮性方面存在较大差异。对于强对流问题,图线趋近于二阶精度 CBC 区域的上边界时往往计算误差较小。图 7 中线段 OA、线段 BP 的斜率对格式的计算精度和健壮性起重要作用。大致趋势为线段 OA 斜率越大,则计算精度越高,收敛速率降低,健壮性降低;而线段 BP 斜率越大,则计算精度越低,收敛速率越高,健壮性增强。据此,本文提出固定 CD 格式、SUD 格式型线上的两点 $(C, \frac{1}{2}C+\frac{1}{2})$ 、 $(\frac{2}{3}D, D)$ 来调节上述两处斜率,以适应于不同物理问题场景,而其他区域取二阶精度 CBC 区域上边界,如图 8 所示。将可调值 C、D 代入式(14)中得性能可控的高阶有界

格式(adjustable high-order bounded scheme, AHB 格式),表达式为

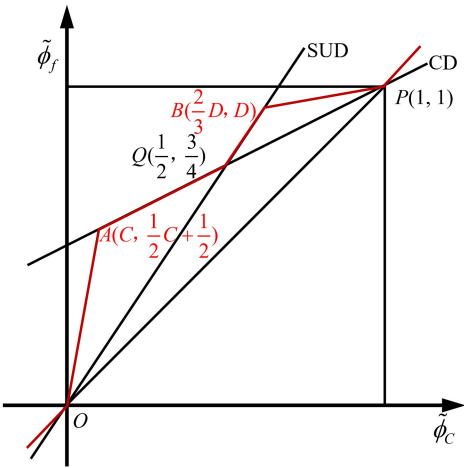


图 8 性能可控高阶有界格式示意图

Fig. 8 Schematic of high-order bounded scheme with controllable performance

$$\tilde{\phi}_f = \begin{cases} \tilde{\phi}_c, & \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_c \geq 1 \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2C})\tilde{\phi}_c, & 0 < \tilde{\phi}_c \leq C \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{\phi}_c, & C < \tilde{\phi}_c \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\tilde{\phi}_c, & \frac{1}{2} < \tilde{\phi}_c \leq \frac{2}{3}D \\ \frac{1-D}{1-2/3D}(\tilde{\phi}_c - \frac{2}{3}D) + D, & \frac{2}{3}D < \tilde{\phi}_c < 1 \end{cases} \quad (15)$$

AHB 格式的非均分网格表达式为

$$\bar{\phi}_f = \begin{cases} \bar{\phi}_c, & \bar{\phi}_c \leq 0, \bar{\phi}_c \geq 1 \\ \left(\frac{1}{2C\tilde{x}_c} \frac{\tilde{x}_c - \tilde{x}_f}{\tilde{x}_c - 1} + \frac{\tilde{x}_f - 1}{\tilde{x}_c - 1} \right) \bar{\phi}_c, & 0 < \bar{\phi}_c \leq 2C\tilde{x}_c \\ \frac{\tilde{x}_c - \tilde{x}_f}{\tilde{x}_c - 1} + \frac{\tilde{x}_f - 1}{\tilde{x}_c - 1} \bar{\phi}_c, & 2C\tilde{x}_c < \bar{\phi}_c \leq \tilde{x}_c \\ \frac{\tilde{x}_f}{\tilde{x}_c} \bar{\phi}_c, & \tilde{x}_c < \bar{\phi}_c \leq (4D - 3) \\ \frac{(\tilde{x}_f/\tilde{x}_c)n - 1}{n - 1} \bar{\phi}_c + 1 - \frac{(\tilde{x}_f/\tilde{x}_c)n - 1}{n - 1}, & \left(\frac{\tilde{x}_c}{\tilde{x}_f} - \tilde{x}_c \right) + \tilde{x}_c = n \\ & n < \bar{\phi}_c < 1 \end{cases} \quad (16)$$

AHB 格式中可调参数 C 值越小, 对应于图 7 中线段 OA 斜率就越大, 均分网格下变化范围为 $[0, 0.5]$; D 值越大对应于线段 BP 斜率越小, 均分网格下变化范围为 $[0.75, 1.0]$ 。以单阶梯突变的纯对流问题为例对 C, D 取值的影响进行说明, 其控制方程为 $\frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} = 0$ 。计算边界条件如图 9 所示, 几何区域大小为 1×1 , 流速方向平行于 45° 对角线且在整个区域大小相同, 即 $u = v = 1$ 。变量分布在 45° 对角线处会有阶梯突变。采用均分网格内节点法离散, 网格数为 61×61 , 通过延迟修正方法实施高阶有界格式, 整场迭代初值为 0, 收敛标准基于残差的无穷范数

$$N_{\text{err}} = \max(|\phi^{n+1} - \phi^n|) \quad (17)$$

式中 ϕ^{n+1}, ϕ^n 为相邻两迭代步的待求变量向量。设置迭代收敛标准为 $N_{\text{err}} \leq 1 \times 10^{-8}$, 最大外迭代次数为 5 000。

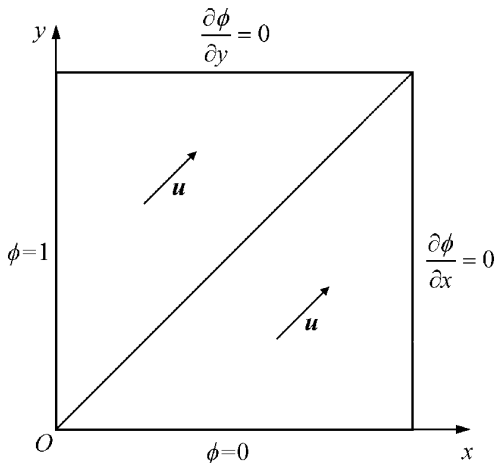
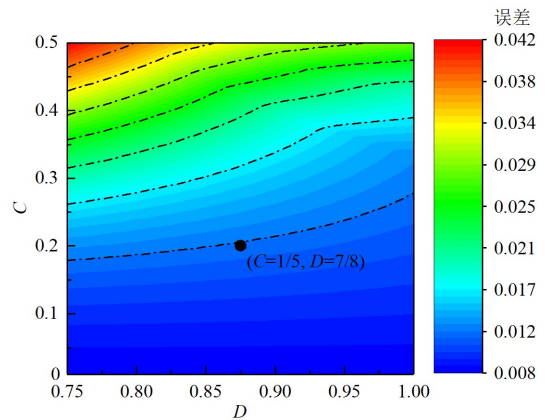


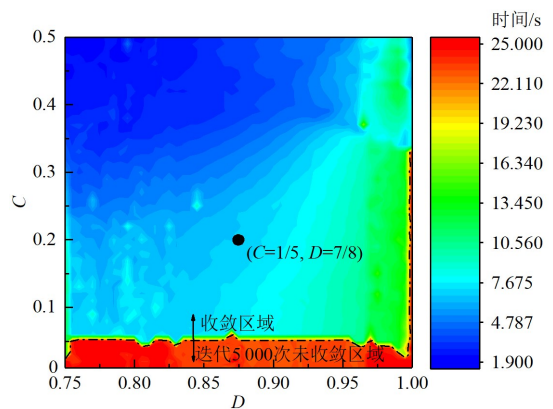
图 9 二维单阶梯突变纯对流问题示意图

Fig. 9 Schematic of the two-dimensional convective problem with a sharp interface

为保证不同 C, D 取值情况下, 绝大部分区域均可获得收敛解, 松弛因子为 0.1。平均误差、计算时间随 C, D 取值的变化如图 10 所示, 其中平均误差由 $x = 0.5$ 处中垂线待求变量结果获得。



(a) 平均误差



(b) 计算时间分布

图 10 对于单阶梯突变纯对流问题, AHB 格式可调参数 C, D 变化范围内的平均误差和计算时间分布

Fig. 10 Mean error and computation time of AHB scheme with various values of adjustable parameters C and D for the convective problem with a sharp interface

由图 10(a)可知,当 C 值越大、 D 值越小时,平均误差越大。另外从平均误差等值线可看出, C 值变化对平均误差的影响更明显,这是由于在阶梯突变处 ($\bar{\phi}_c, \bar{\phi}_f$) 大致取在线段 OA 上所致。通过图 10(b)可知,当 C 值越大、 D 值越小时,计算时间越短,并且当 C 值小于 0.05 或 D 值取 1 时,会造成无法收敛。综合来看,AHB 格式的高精度和高计算效率之间互相制约,可根据案例需求来调节 C 、 D 取值。

基于图 10 所示计算结果,本文推荐 C 、 D 取值分别为 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{7}{8}$,并将得到的新格式命名为 ABC 格式 (accuracy, boundedness and convergence rate-balanced scheme),均分网格下表达式为

$$\bar{\phi}_f = \begin{cases} \bar{\phi}_c, & \bar{\phi}_c \leq 0, \bar{\phi}_c \geq 1 \\ 3\bar{\phi}_c, & 0 < \bar{\phi}_c \leq \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{\phi}_c, & \frac{1}{5} < \bar{\phi}_c \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\bar{\phi}_c, & \frac{1}{2} < \bar{\phi}_c \leq \frac{7}{12} \\ \frac{3}{10}\bar{\phi}_c + \frac{7}{10}, & \frac{7}{12} < \bar{\phi}_c < 1 \end{cases} \quad (18)$$

(A_x, A_y)和(B_x, B_y)在均分和非均分网格下的值分别为($\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$)、($\frac{7}{12}, \frac{7}{8}$)和($\frac{2\tilde{x}_c}{5}, \frac{3\tilde{x}_c-5\tilde{x}_f+2\tilde{x}_c\tilde{x}_f}{5(\tilde{x}_c-1)}$)、($\frac{1}{2}(\frac{\tilde{x}_c}{\tilde{x}_f}+\tilde{x}_c), \frac{1}{2}(1+\tilde{x}_f)$)。

2.3 案例分析

为了说明本文所提 ABC 格式的特性,本节以多个经典问题为例,对比分析其与 MINMOD、SMART、HOAB、SUPERBEE、MUSCL,以及 $C=\frac{1}{8}$ 和 $D=\frac{15}{16}$ 取值下的 AHB 格式 (special adjustable high-order bounded scheme,简称 SAHB 格式)在计算精度、收敛速率和健壮性方面的异同。如无特殊说明,最大亚松弛因子选取的方法为从 0.1 开始,以 0.05 的增幅递增,直至发散,取满足收敛的最大值。松弛因子越大,健壮性越强。

2.3.1 单阶梯突变的纯对流问题

该问题计算参数与 2.2 小节单阶梯突变的纯对流问题相同。松弛因子为 0.2 时各高阶有界格式在 $x=0.5$ 处中垂线的变量分布如图 11 所示。由图 11 可知,MINMOD 格式假扩散最严重,待求变量在阶梯处平缓变化与解析解差距最大,SMART、MUSCL 格

式与解析解的差距次之, SUPERBEE、SAHB、HOAB 和 ABC 这 4 种格式均可较好地捕捉到阶梯突变结果。表 3 给出了松弛因子为 0.8、0.6、0.4、0.2 时各格式平均误差、迭代次数和计算时间,迭代次数为 5 000 表示该格式并未完全收敛。由表 3 可知,各格式之间计算精度、收敛速率和健壮性差别较大,且没有一种格式能在多个方面明显优于其他格式。单阶梯突变纯对流问题采用不同高阶有界格式的平均误差如图 12 所示,单阶梯突变纯对流问题采用不同高阶有界格式的最大松弛因子如图 13 所示,可知 SUPERBEE、SAHB、HOAB 和 ABC 格式计算精度相对较高,但这些格式达到收敛标准对松弛因子的要求较高,尤其是 SUPERBEE 格式,在测试中并未收敛。在这 4 种计算精度相对较高的格式中,ABC 格式可获得的最大松弛因子为 0.45,小于 HOAB 格式,但前者收敛过程更加稳定,所需的收敛时间明

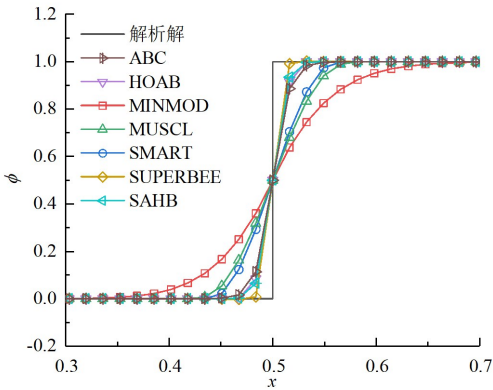


图 11 单阶梯突变纯对流问题中垂线计算结果
Fig. 11 Variable profile at the mid-vertical line for the convective problem with a sharp interface

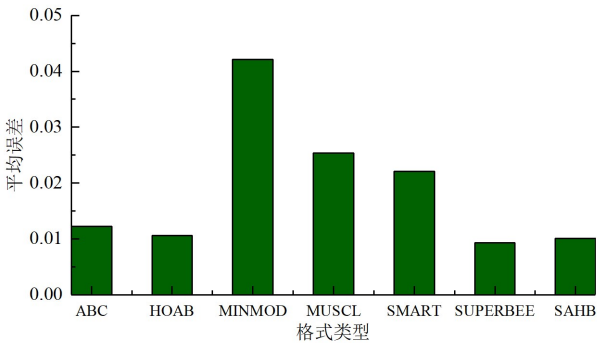


图 12 单阶梯突变纯对流问题采用不同高阶有界格式的平均误差
Fig. 12 Mean error of high-order bounded schemes for the convective problem with a sharp interface

显小于后者,并且计算效率接近可取高松弛因子的 MINMOD、MUSCL 格式,单阶梯突变纯对流问题采用不同高阶有界格式的计算时间如图 14 所示。

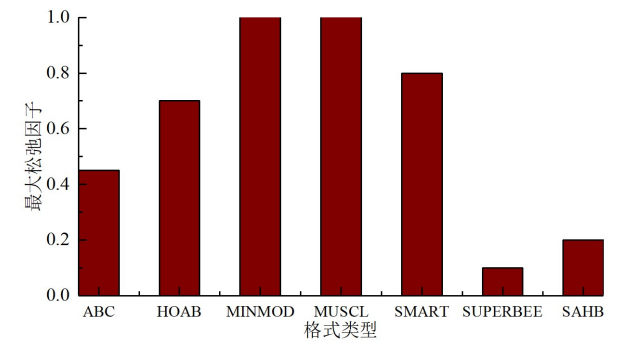


图 13 单阶梯突变纯对流问题采用不同高阶有界格式的最大松弛因子

Fig. 13 Maximum relaxing factor of high-order bounded schemes for the convective problem with a sharp interface

因此,ABC 格式具有良好的收敛速率和健壮性,且计算精度较高。计算时间为不同松弛因子下计算收敛所需的最短时间,后文如无特殊说明,均与此相同。

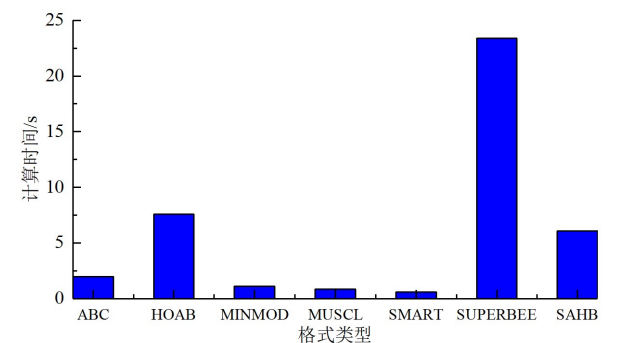


图 14 单阶梯突变纯对流问题采用不同高阶有界格式的计算时间

Fig. 14 Computation time of high-order bounded schemes for the convective problem with a sharp interface

表 3 单阶梯突变纯对流问题中各高阶有界格式计算性能

Table 3 Computational performance of high-order bounded schemes for the convective problem with a sharp interface									
格式名称	平均误差	松弛因子 0.8		松弛因子 0.6		松弛因子 0.4		松弛因子 0.2	
		迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s
ABC	0.012 2	5 000	25.59	5 000	25.02	381	1.99	751	4.64
HOAB	0.010 6	5 000	24.96	1 906	9.80	2 831	13.67	5 000	24.85
MINMOD	0.042 1	66	0.54	81	0.98	116	0.82	216	1.31
MUSCL	0.025 4	121	0.78	161	1.21	236	1.32	461	2.60
SMART	0.022 1	111	0.62	141	0.94	211	1.18	416	2.22
SUPERBEE	0.009 3	5 000	24.51	5 000	24.36	5 000	23.57	5 000	23.82
SAHB	0.010 1	5 000	26.09	5 000	26.94	5 000	26.97	996	6.07

2.3.2 Smith-Hutton 纯对流问题

第一个案例基于均匀流场进行分析,为对比不均匀流场中不同高阶有界格式的计算性能,采用 Smith-Hutton 纯对流问题进行研究。如图 15 所示,几何区域大小为 $2\text{ m}\times 1\text{ m}$,区域中存在旋转流场,通过边界条件控制:下边界被分成左、右两部分,左半边入口为第一类边界条件,变量分布满足双曲正切函数 $\phi = 1 + \tanh[\alpha(1 + 2x)]$,其中 α 取 40;右半边出口为第二类边界条件,界面法向导数为 0。该问题的解析解为 $\phi = 1 + \tanh[\alpha(1 - 2x)]$ 。采用均分网格内节点法对计算区域进行离散,网格数为 120×60 ,求解方法与案例 1 相同。

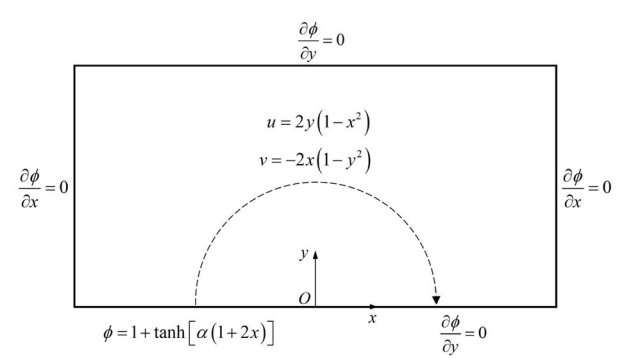


图 15 Smith-Hutton 纯对流问题示意图

Fig. 15 Schematic of the Smith-Hutton convection problem

松弛因子为 0.2 时各高阶有界格式在右半部分出口处的变量分布如图 16 所示。由于其解析解分布为双曲正切函数,因此变量分布并非完全的阶梯突变。由图 16 可知,该问题中各格式计算精度差异与前两个案例大致相同, **SUPERBEE**、**SAHB**、**HOAB** 和 **ABC** 格式的计算结果更接近解析解。表 4 和图 17~19 给出了该问题中各格式的计算精度、收敛速率和健壮性对比结果。不同于第一个算例, **ABC** 的计算精度、收敛速率、健壮性均优于 **HOAB**、**MUSCL** 格式。 **MUSCL**、**SUPERBEE** 和 **SAHB** 格式未完全收敛。

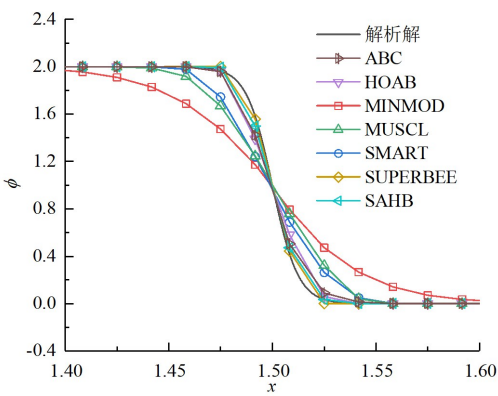


图 16 Smith-Hutton 纯对流问题出口变量分布
Fig. 16 Variable profile of the Smith-Hutton convection problem at the outlet

表 4 Smith-Hutton 纯对流问题中各高阶有界格式计算性能

格式名称	平均误差	松弛因子 0.8		松弛因子 0.6		松弛因子 0.4		松弛因子 0.2	
		迭代次数		迭代次数		迭代次数		迭代次数	
		迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s
ABC	0.005 2	5 000	57.04	5 000	56.75	496	5.68	986	11.21
HOAB	0.006 2	5 000	56.14	5 000	57.61	5 000	55.76	1 531	17.27
MINMOD	0.046 8	76	1.14	101	1.40	146	1.88	281	3.29
MUSCL	0.022 4	5 000	55.33	5 000	57.34	5 000	55.22	5 000	56.55
SMART	0.018 2	5 000	56.71	5 000	57.51	261	2.87	436	5.06
SUPERBEE	0.003 9	5 000	54.14	5 000	55.72	5 000	53.61	5 000	53.66
SAHB	0.002 8	5 000	57.89	5 000	60.04	5 000	58.68	5 000	57.24

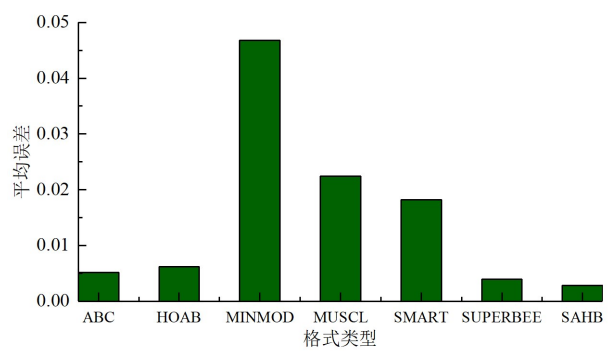


图 17 Smith-Hutton 纯对流问题采用不同高阶有界格式的平均误差
Fig. 17 Mean error of high-order bounded schemes for the Smith-Hutton convection problem

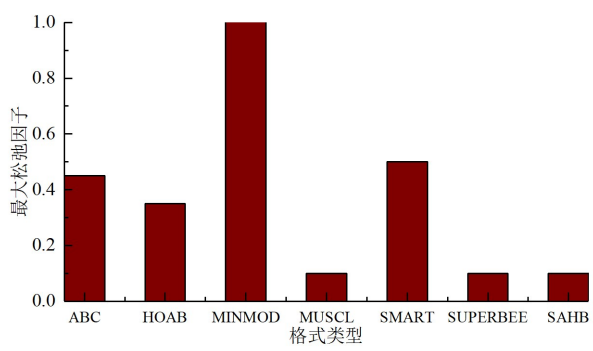


图 18 Smith-Hutton 纯对流问题采用不同有界格式的最大松弛因子
Fig. 18 Maximum relaxing factor of high-order bounded schemes for the Smith-Hutton convection problem

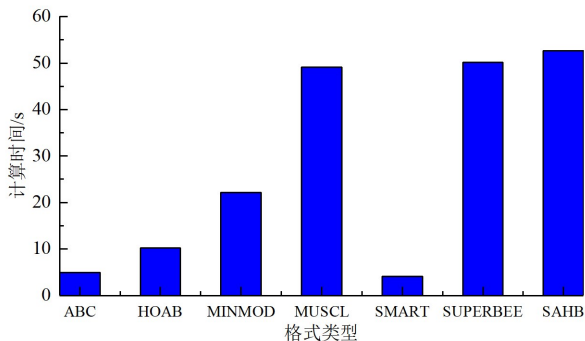


图 19 Smith-Hutton 纯对流问题采用不同高阶有界格式的计算时间

Fig. 19 Computation time of high-order bounded schemes for the Smith-Hutton convection problem

2.3.3 顶盖驱动问题

上述两个案例均为二维纯对流问题,为了分析本文所提出的高阶有界格式在三维对流扩散问题以及非线性流动问题中的计算性能,本小节采用三维方腔顶盖驱动问题对此进行研究。雷诺数为 1 000,所有壁面均为无滑移,采用 $50 \times 50 \times 50$ 的结构化均分网格对计算区域进行离散。采用 SIMPLE 算法对该问题进行求解,收敛标准为动量方程、连续性方程余量的二范数分别小于 6.0×10^{-6} 、 1.0×10^{-10} ,对于收敛困难的 SUPERBEE 格式,动量方程收敛标准采用 1.0×10^{-4} 。

本文采用文献[25]中 $z=0.5$ 平面与 $x=0.5$ 平面相交线上的 u 方向速度的计算结果作为基准解,进一步计算了相同网格节点位置处、不同格式计算结果与基准解之间的相对差异,如图 20 所示。对比结果表明,ABC 格式平均相对偏差最小,HOAB 格式、SAHB 格式次之。不同于上述给定流场问题,SUPERBEE 格式无法收敛且计算精度最低。

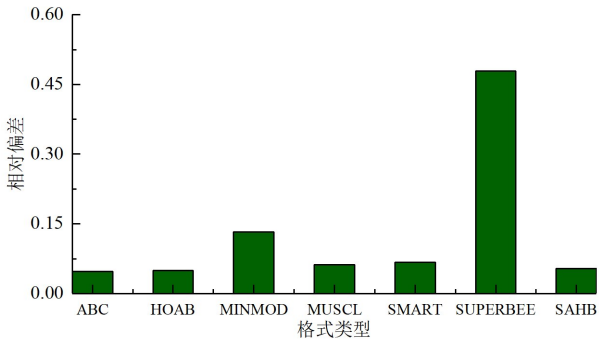


图 20 三维顶盖驱动问题采用不同高阶有界格式的相对偏差

Fig. 20 Relative error of different discrete schemes of convection term for the three-dimensional lid-driven flow problem

计算时间对比结果如图 21 所示。由图 21 可以看出,ABC 与 MINMOD、MUSCL 格式的收敛所需时间均在 1 000 s 左右,且明显低于其他高阶有界格式。此外,采用经典的 QUICK 格式得到的计算时间为 922 s,与 ABC 格式差异不大。

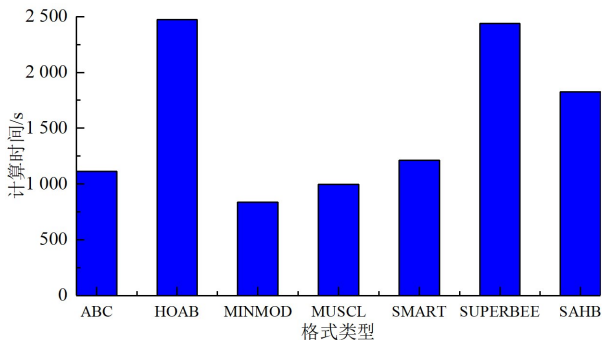


图 21 三维顶盖驱动问题采用不同对流项离散格式的计算时间

Fig. 21 Computation time of different discrete schemes of convection term for the three-dimensional lid-driven flow problem

采用不同对流项离散格式的最大松弛因子如图 22 所示。由图 22 可以看出,采用 ABC、MINMOD 和 MUSCL 格式时,亚松弛因子均可取到 0.85,且大于其他高阶有界格式。此外,采用 QUICK 格式的最大松弛因子同为 0.85。这表明 ABC 格式具有较高的求解健壮性。

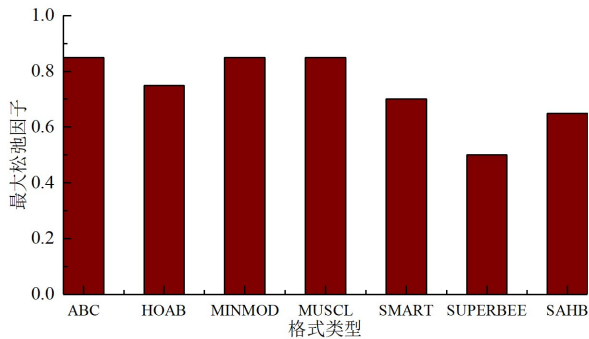


图 22 三维顶盖驱动问题采用不同对流项离散格式的最大松弛因子

Fig. 22 Maximum relaxing factor of different discrete schemes of convection term for the three-dimensional lid-driven flow problem

综上,对于阶梯突变、Smith-Hutton 纯对流和顶盖驱动问题,所测试的现有格式均无法兼顾计算精度、收敛速率和健壮性,且这些格式在不同问题下的表现不同。为了进一步对比说明 ABC 格式在计

算精度、收敛速率和健壮性方面的综合表现,以上述 3 个算例为对象,对不同格式的计算精度、计算时间和最大松弛因子进行分别排名,并以排名大小为分数进行加权平均得到总分,总分越小意味着综合表现越佳。为了提高对比的可靠性,分别采用两种不同的排名方式和权重因子。两种排名方式为:①考虑计算精度和计算时间因编程风格和计算机运行状态不同而导致的差异,当两种格式差异较小时,认为两者一致,并列排名;②不考虑编程风格和计算机运

行状态差异带来的偏差,直接根据计算精度和计算时间的大小进行排名。两种权重因子为:①计算精度、计算时间、最大松弛因子的权重取值分别为 0.5、0.25、0.25;②计算精度、计算时间、最大松弛因子的权重取值均为 1/3。不同排名方式下不同高阶有界格式在 3 种经典算例中的计算性能排名如表 5~8 所示,可知 ABC 格式虽然在不同问题中的计算精度、收敛速率和健壮性的排名不同,但均整体表现最优,具有求解精度高、收敛快、健壮性好的特点。

表 5 各高阶有界格式计算性能对比(排名方式①,权重系数①)

Table 5 Computational performance score of high-order bounded schemes (Ranking method ①, weight coefficient ①)

格式名称	单阶梯突变排名			Smith-Hutton 流动排名			顶盖驱动问题排名			综合得分	综合排名
	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子		
ABC	1	3	5	3	1	2	1	2	1	6.00	1
HOAB	1	5	4	3	3	4	1	6	4	9.00	3
MINMOD	7	3	1	7	4	1	6	1	1	12.75	6
MUSCL	5	1	1	5	5	5	1	2	1	9.25	4
SMART	5	1	3	5	1	2	1	2	4	8.75	2
SUPERBEE	1	7	7	1	5	5	7	6	7	13.75	7
SAHB	1	5	6	1	5	5	1	5	6	9.50	5

表 6 各高阶有界格式计算性能对比(排名方式①,权重系数②)

Table 6 Computational performance score of high-order bounded schemes (Ranking method ①, weight coefficient ②)

格式名称	单阶梯突变排名			Smith-Hutton 流动排名			顶盖驱动问题排名			综合得分	综合排名
	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子		
ABC	1	3	5	3	1	2	1	2	1	6.33	1
HOAB	1	5	4	3	3	4	1	6	4	10.33	4
MINMOD	7	3	1	7	4	1	6	1	1	10.33	4
MUSCL	5	1	1	5	5	5	1	2	1	8.67	3
SMART	5	1	3	5	1	2	1	2	4	8.00	2
SUPERBEE	1	7	7	1	5	5	7	6	7	15.33	7
SAHB	1	5	6	1	5	5	1	5	6	11.67	6

表 7 各高阶有界格式计算性能对比(排名方式②,权重系数①)

Table 7 Computational performance score of high-order bounded schemes (Ranking method ②, weight coefficient ①)

格式名称	单阶梯突变排名			Smith-Hutton 流动排名			顶盖驱动问题排名			综合得分	综合排名
	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子		
ABC	4	4	5	3	2	3	1	3	1	8.50	1
HOAB	3	6	4	4	3	4	2	7	4	11.5	2
MINMOD	7	3	1	7	4	1	6	1	1	12.75	6
MUSCL	6	2	1	6	5	5	4	2	1	12.00	5
SMART	5	1	3	5	1	2	5	4	5	11.5	2
SUPERBEE	1	7	7	2	6	5	7	6	7	14.5	7
SAHB	2	5	6	1	7	5	3	5	6	11.5	2

表 8 各高阶有界格式计算性能对比(排名方式②,权重系数②)

Table 8 Computational performance score of high-order bounded schemes (Ranking method ②, weight coefficient ②)

格式名称	单阶梯突变排名			Smith-Hutton 流动排名			顶盖驱动问题排名			综合得分	综合排名
	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子	计算误差	计算时间	最大松弛因子		
ABC	4	4	5	3	2	3	1	3	1	8.67	1
HOAB	3	6	4	4	3	4	2	7	4	12.33	5
MINMOD	7	3	1	7	4	1	6	1	1	10.33	2
MUSCL	6	2	1	6	5	5	4	2	1	10.67	4
SMART	5	1	3	5	1	2	5	4	5	10.33	2
SUPERBEE	1	7	7	2	6	5	7	6	7	16.00	7
SAHB	2	5	6	1	7	5	3	5	6	13.33	6

3 结 论

本文对有限容积法对流项离散格式的稳定性 and 有界性进行了较为深入的研究,主要结论如下。

(1)通过对流项离散格式的稳定性分析,发现内、外节点法边界相邻节点的对流项稳定性条件与内点的存在较大差异;对于 SGSD 格式,存在多种权重系数计算方法。

(2)根据常见高阶有界格式线型为分段线性函数的特点,推导得到通用的分段线型高阶有界格式 GHB,并给出了均分、非均分网格下常见格式的折点取值。

(3)提出了通过调节 C、D 两个控制因子实现性能可控的高阶有界格式 AHB 格式,并通过参数优化得到了综合性能较优的 ABC 格式。采用不同的高阶有界格式计算了 3 个经典算例,并对计算误差、计算时间和最大松弛因子进行综合评估,结果表明在不同评估方法下,ABC 格式在计算精度、收敛速率和健壮性的整体性能方面均表现最优。

参考文献:

[1] 陶文铨. 计算传热学的近代进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[2] ZHANG Di, JIANG Chunbo, LIANG Dongfang, et al. A refined volume-of-fluid algorithm for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes [J]. Journal of Computational Physics, 2014, 274: 709-736.

[3] 宇波, 李敬法, 孙东亮. 数值传热学实训 [M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[4] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

[5] GRESHO P M, LEE R L. Don't suppress the wiggles—they're telling you something! [J]. Computers

& Fluids, 1981, 9(2): 223-253.

[6] YU B, TAO W Q, ZHANG D S, et al. Discussion on numerical stability and boundedness of convective discretized scheme [J]. Numerical Heat Transfer: Fundamentals, 2001, 40(4): 343-365.

[7] LEONARD B P, DRUMMOND J E. Why you should not use 'hybrid', 'power-law' or related exponential schemes for convective modelling: there are much better alternatives [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20(6): 421-442.

[8] NI Mingjiu, TAO Wenquan, WANG Shangjin. Stability-controllable second-order difference scheme for convection term [J]. Journal of Thermal Science, 1998, 7(2): 119-130.

[9] LI Z Y, TAO W Q. A new stability-guaranteed second-order difference scheme [J]. Numerical Heat Transfer: Fundamentals, 2002, 42(4): 349-365.

[10] BORIS J P, BOOK D L. Flux-corrected transport: a fluid transport algorithm that works [J]. Journal of Computational Physics, 1973, 11(1): 38-69.

[11] ZALESAK S T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids [J]. Journal of Computational Physics, 1979, 31(3): 335-362.

[12] TÓTH G, ODSTRČIL D. Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 128(1): 82-100.

[13] JASAK H, WELLER H G, GOSMAN A D. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, 31(2): 431-449.

[14] ZHANG Di, JIANG Chunbo, YANG Chen, et al. Assessment of different reconstruction techniques for implementing the NVSF schemes on unstructured meshes [J]. International Journal for Numerical Methods in

- Fluids, 2014, 74(3): 189-221.
- [15] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1983, 49(3): 357-393.
- [16] COELHO P J. Application of high resolution NVD and TVD differencing schemes to the discrete ordinates method using unstructured grids [J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2014, 143: 3-15.
- [17] FERREIRA V G, DE QUEIROZ R A B, LIMA G A B, et al. A bounded upwinding scheme for computing convection-dominated transport problems [J]. Computers & Fluids, 2012, 57: 208-224.
- [18] GASKELL P H, LAU A K. Curvature-compensated convective transport: a new boundedness-preserving transport algorithm [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8(6): 617-641.
- [19] ZHU J, RODI W. A low dispersion and bounded convection scheme [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 92(1): 87-96.
- [20] WEI Jinjia, YU Bo, TAO Wenquan, et al. A new high-order-accurate and bounded scheme for incompressible flow [J]. Numerical Heat Transfer: Fundamentals, 2003, 43(1): 19-41.
- [21] KEMM F. A comparative study of TVD-limiters—well-known limiters and an introduction of new ones [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011, 67(4): 404-440.
- [22] ZHANG Di, JIANG Chunbo, LIANG Dongfang, et al. A refined volume-of-fluid algorithm for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes [J]. Journal of Computational Physics, 2014, 274: 709-736.
- [23] ZHANG Di, JIANG Chunbo, LIANG Dongfang, et al. A review on TVD schemes and a refined flux-limiter for steady-state calculations [J]. Journal of Computational Physics, 2015, 302: 114-154.
- [24] 王贤钢, 俞茂铮, 陶文铨. 一种稳定性与精度协调一致的二阶差分格式 [J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(11): 1194-1198.
WANG Xiangang, YU Maozheng, TAO Wenquan. Stability-accuracy-compatible second-order difference scheme [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(11): 1194-1198.
- [25] DING H, SHU C, YEO K S, et al. Numerical computation of three-dimensional incompressible viscous flows in the primitive variable form by local multiquadric differential quadrature method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(7/8): 516-533.

(编辑 赵炜 亢列梅)