

二维非均匀介质内辐射与瞬态导热耦合传热分析

马菁¹, 孙勇飞¹, 孙亚松², 李新宇²

(1. 长安大学汽车学院, 710064, 西安; 2. 西北工业大学动力与能源学院, 710072, 西安)

摘要: 充分利用间断谱元法对非规则区域良好适应性、数值稳定、局部高阶收敛性等优点, 开展了二维非均匀介质内辐射与瞬态导热耦合传热分析。在求解过程中, 将空间计算域离散为多个不重合的单元, 并在单元内采用高阶谱节点进行离散。对于非均匀介质内离散坐标形式的辐射传递方程, 根据离散角度上的辐射能传递方向, 确定单元间的上下游关系, 并采用迎风格式来实现单元间辐射信息的有效传递; 对于瞬态能量守恒方程, 采用全隐格式进行瞬态项离散。通过多组非均匀介质内辐射与瞬态导热耦合传热算例, 发现了间断谱元法具有随单元数增加的线性收敛特性, 以及随单元内节点数增加的指数收敛特性; 通过与文献中结果对比, 发现最大相对误差均小于1%, 验证了间断谱元法的正确性和有效性; 随着辐射与导热耦合参数的增加, 导热在耦合传热所占比重会加大, 非均匀介质带来的温度场非均匀性会减弱, 达到稳态的时间变长。

关键词: 非均匀介质; 高温热辐射; 瞬态导热; 间断谱元法; 迎风格式

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202306015 **文章编号:** 0253-987X(2023)06-0133-09

Thermal Analysis of Coupled Radiation and Transient Conduction in Two-Dimensional Heterogeneous Media

MA Jing¹, SUN Yongfei¹, SUN Yasong², LI Xinyu²

(1. School of Automobile, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

2. School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Taking the advantages of the flexibility to deal with irregular geometry, numerical stability, and high-order local convergence, the discontinuous spectral element method (DSEM) was used for thermal analysis of coupled radiation and transient conduction in two-dimensional heterogeneous media. In the solving process, the spatial computational domain was discretized into several elements separated from each other, and high-order spectral nodes were used to discretize these elements. For the discrete coordinate form of the radiative transfer equation in a heterogeneous medium, the direction of radiant energy in a discrete angle was based to determine the upstream and downstream elements. Then, the upwind scheme was imposed to transmit radiation information in elements. For the transient energy conservation equation, the fully implicit difference scheme was adopted to discretize the transient term. Several examples of coupled radiation and transient conduction in the heterogeneous medium were chosen to test the linear convergence

收稿日期: 2022-10-12。 作者简介: 马菁(1986—), 女, 副教授; 孙亚松(通信作者), 男, 副教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51976173); 江苏省自然科学基金资助项目(BK20201204); 中央高校基本业务费(5000210779)。

网络出版时间: 2023-03-06

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.t.20230303.1533.009.html>

characteristic with increasing number of elements, and the exponential convergence characteristics with increasing nodes in the element. By comparing the results with those in the literature, it was found that the maximum relative error was less than 1% in all cases, which confirmed the accuracy and efficiency of the discontinuous spectral element method. With an increase in radiation and thermal coupling parameters, the proportion of heat conduction in coupled heat transfer increased while the non-uniformity of the temperature field caused by heterogeneous media decreased. Consequently, a longer time was required for it to reach steady-state.

Keywords: heterogeneous media; high-temperature thermal radiation; transient conduction; discontinuous spectral element method; upwind scheme

随着航空发动机推重比和总效率需求的不断提高,发动机涡轮进口温度也不断提升^[1]。目前,先进的航空发动机涡轮进口温度约 2 000 K^[2],此时在发动机高温部件涂层内,高温热辐射在耦合传热过程中所占比重愈来愈大^[3]。为精确分析高温部件涂层内的温度分布,需要开展非均匀介质内辐射与导热的耦合传热研究。在研究过程中,需要将辐射传递方程和能量守恒方程进行耦合求解。通常是从辐射传递方程中获取的辐射强度信息,然后通过辐射强度信息计算辐射源项并将其代入能量守恒方程,实现辐射与瞬态导热的耦合求解。

早在 1992 年,Chu 等^[4]采用球形谐波法(SPH)研究了一维同心圆球内辐射与瞬态导热耦合传热,分析了光学厚度和散射相函数分布对辐射热流的影响。Aouled 等^[5]开发了一种基于有限切比雪夫变换(FCT)的方法来分析一维辐射与导热耦合问题。Wang 等^[6-7]采用间断有限元分析了参与性介质的辐射与导热耦合传热问题。Feng 等^[8]进一步采用该方法分析了瞬态辐射与导热耦合问题。Mishra 等^[9-12]提出针对辐射传递方程和能量守恒方程不同的数值特性,采用不同的数值方法求解。例如,采用离散传递法(DTM)来求解辐射传递方程,采用格子玻尔兹曼法(LBM)^[13]来求解能量守恒方程。Sun 等^[14]采用有限容积法(FVM)来求解辐射传递方程,采用 LBM 来求解能量守恒方程。并且在求解过程中,将 FVM、LBM 用相同的离散网格,这样有利于耦合传热过程中信息传递。对于非均匀介质内辐射与导热耦合传热问题,易红亮等^[15]采用有限元法分析二维方腔内辐射与瞬态导热耦合问题。研究了折射率分布、衰减系数、散射反照率和散射相函数对瞬态耦合传热的影响规律。但上述文献中采用的方法属于低阶数值方法,为了提升对辐射与瞬态导热耦合问题的计算精度和计算效率,迫切需要发展一种高阶的数值方法。

近年来,人们提出了一种间断谱元法(DSEM)^[16-18]。该方法通过数值通量来传递相邻单元之间的信息,释放了单元之间的连续性^[19-20],并通过对间断单元内的谱离散,实现了单元内的局部高阶收敛^[21]。它兼具间断有限元法对非规则区域良好适应性和谱方法的高阶收敛性,目前逐渐被用于热辐射问题分析^[22-23]。

本文采用 DSEM 对二维非均匀介质内的辐射与瞬态导热耦合问题求解。在求解过程中,对离散坐标形式的辐射传递方程采用 DSEM 进行离散,并通过迎风格式实现离散单元之间的信息传递;对瞬态能量守恒方程,采用相同的 DSEM 离散网格对空间进行离散,并采用全隐格式对瞬态项进行离散。通过多组二维算例,检验 DSEM 对求解非均匀介质内辐射与瞬态导热耦合传热问题的正确性。进一步测试了 DSEM 的自适应收敛特性:随着单元数的增加,呈现线性收敛特性;随着单元内节点数的增加,呈现指数收敛特性。并分析了辐射与导热耦合参数、折射率分布对瞬态耦合传热的影响。

1 非均匀介质内辐射与导热耦合模型

二维非均匀介质内辐射与导热耦合传热模型如图 1 所示,分析二维方腔内充满非均匀介质的辐射与瞬态导热耦合传热过程,介质具有吸收、发射和散射特性,且其折射率是空间分布函数。在能量传输过程中,能量会发生弯曲,相应的辐射传递方程为^[24]

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial x} + \eta \frac{\partial I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial y} + (k_a + k_s) I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega}) + \\ & \frac{1}{n \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\mu \kappa \frac{\partial n}{\partial x} + \eta \kappa \frac{\partial n}{\partial y}) I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega}) \right] + \\ & \frac{1}{n \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\cos \varphi \frac{\partial n}{\partial y} - \sin \varphi \frac{\partial n}{\partial x} \right) I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega}) \right] = \\ & n^2 k_a I_b(s) + \frac{k_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega}') \varphi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' \quad (1) \end{aligned}$$

式中: $I(\mathbf{s}, \boldsymbol{\Omega})$ 为在空间位置 $\mathbf{s}$ 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的辐射强

度; μ 、 η 和 ξ 为方向余弦; n 为介质折射率; k_a 、 k_s 为吸收、散射系数; θ 、 φ 为极角、方位角; I_b 为黑体辐射强度; $\varphi(\Omega', \Omega)$ 为散射相函数。

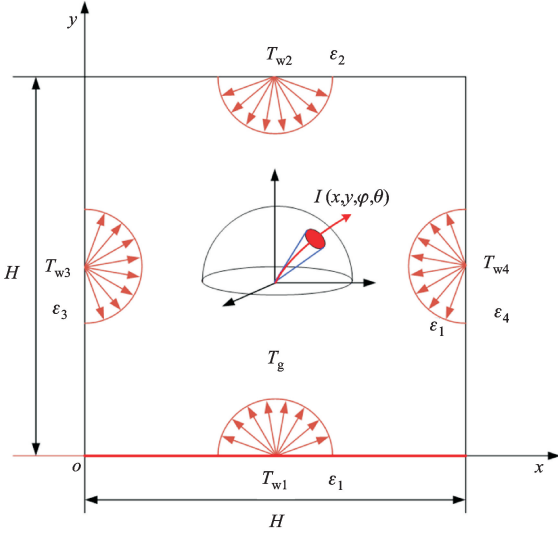


图1 二维非均匀介质内辐射与导热耦合传热模型

Fig. 1 Coupled radiative and conductive heat transfer model within two-dimensional heterogeneous media

方腔壁面均为不透明、漫反射和灰体壁面,相应的辐射边界条件为

$$I(s_w, \Omega) = n^2 \epsilon_w I_b(s_w) + \int_{n_w \cdot \Omega' < 0} I(s_w, \Omega') |n_w \cdot \Omega'| d\Omega', n_w \cdot \Omega' \geq 0 \quad (2)$$

式中: w 代表壁面; ϵ_w 为壁面发射率; $I_b(s_w)$ 为壁面黑体辐射强度; n_w 为垂直于壁面内法向的单位向量。

在辐射与瞬态导热耦合传热过程中,瞬态能量守恒方程^[9]为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - k_a (4n^2 \sigma T^4 - \int_{4\pi} I d\Omega) \quad (3)$$

式中: ρ 为介质密度; c_p 为比定压热容; T 为温度; λ 为介质的导热系数; σ 为 Stefan-Boltzmann 常数。

对于瞬态能量守恒方程,本文考虑的边界条件和初始条件为

$$T(s_w, t) = T_w \quad (4)$$

$$T(s, 0) = T_0 \quad (5)$$

2 间断谱元法离散

2.1 辐射传递方程的离散

辐射传递方程的计算域离散如图2所示,对辐射传递方程,在角度上采用离散坐标法离散,在空间

上采用间断谱元法离散。

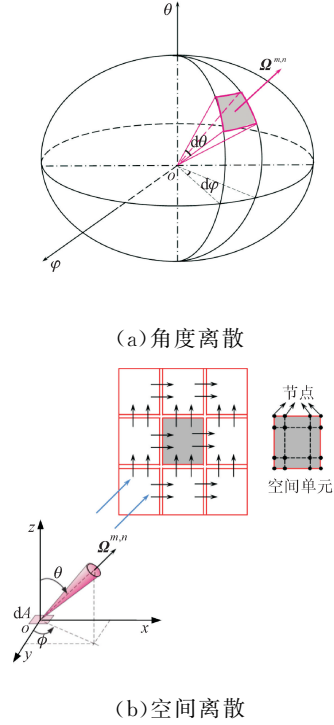


图2 辐射传递方程的计算域离散

Fig. 2 Computational domain discretization of radiative transfer equation

非均匀参与性介质内,离散坐标形式的辐射传递方程可改写为

$$\mu^m \frac{\partial I^{m,n}}{\partial x} + \eta^n \frac{\partial I^{m,n}}{\partial y} + \delta^{m,n} I^{m,n} = S^{m,n}, \quad m = 1, 2, \dots, N_\theta, n = 1, 2, \dots, N_\varphi \quad (6)$$

$$\delta^{m,n} = k_a + k_s + \frac{1}{w_\theta^n} \max(\chi_\theta^{m,n+1/2}, 0) +$$

$$\frac{1}{w_\theta^n} \max(-\chi_\theta^{m,n-1/2}, 0) +$$

$$\frac{1}{w_\varphi^m} \max(\chi_\varphi^{m+1/2,n}, 0) + \frac{1}{w_\varphi^m} \max(-\chi_\varphi^{m-1/2,n}, 0) \quad (7)$$

$$S^{m,n} = n^2 k_a I_b + \frac{k_s}{4\pi} \sum_{m'=1}^{N_\theta} \sum_{n'=1}^{N_\varphi} I^{m',n'} \varphi^{m,n;m',n'} w^{m'} w^{n'} + \frac{I^{m,n+1}}{w_\theta^n} \max(-\chi_\theta^{m,n+1/2}, 0) + \frac{I^{m,n-1}}{w_\theta^n} \max(\chi_\theta^{m,n-1/2}, 0) + \frac{I^{m+1,n}}{w_\varphi^m} \max(-\chi_\varphi^{m+1/2,n}, 0) + \frac{I^{m-1,n}}{w_\varphi^m} \max(\chi_\varphi^{m-1/2,n}, 0) \quad (8)$$

式中: $\delta^{m,n}$ 为衰减变量; $S^{m,n}$ 为源项; N_θ 、 N_φ 为角度上天顶角、圆周角的离散数; $\chi_\theta^{m,n\pm 1/2}$ 、 $\chi_\varphi^{m\pm 1/2,n}$ 为角项微分项系数; w_θ^n 、 w_φ^m 为角度离散权重。

相应地,辐射边界条件的角度离散形式为

$$I_{w}^{m,n} = n^2 \epsilon_w I_{b,w} + \sum_{m'=1}^{N_\theta} \sum_{n'=1}^{N_\varphi} I_{m',n'} | \mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\Omega}^{m',n'} | \omega_{\theta}^{m'} \omega_{\varphi}^{n'} | \mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\Omega}^{m,n} \geq 0 \quad (9)$$

如图2(b)所示,将空间计算域离散为多个不重合的有限元 V_e ,并在有限元内进行谱节点离散。 $\boldsymbol{\Omega}^{m,n}$ 方向上的辐射强度在有限元内可离散为

$$I^{m,n} = \sum_{j=1}^{N_e} I_j^{m,n} \varphi_j \quad (10)$$

式中: N_e 为有限元内谱节点离散数; φ_j 为节点基函数。

根据伽辽金加权余量法^[25],对式(6)乘以权函数 φ_i ,并进行积分

$$\int_{V_e} \mu^{m,n} \frac{\partial I^{m,n}}{\partial x} \varphi_i dV + \int_{V_e} \eta^{m,n} \frac{\partial I^{m,n}}{\partial y} \varphi_i dV + \int_{V_e} \delta^{m,n} I^{m,n} \varphi_i dV = \int_{V_e} S^{m,n} \varphi_i dV \quad (11)$$

根据格林公式,式(11)可改写为

$$\mathbf{K}^{m,n} \mathbf{I}^{m,n} = \mathbf{F}^{m,n} \quad (12)$$

矩阵 $\mathbf{K}^{m,n}$ 、列向量 $\mathbf{F}^{m,n}$ 的元素为

$$K_{i,j}^{m,n} = - \left(\int_{V_e} \mu^{m,n} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dV + \int_{V_e} \eta^{m,n} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dV \right) + \int_{D, Out} \mu^{m,n} \varphi_i \varphi_j dy + \int_{D, Out} \eta^{m,n} \varphi_i \varphi_j dx + \int_{V_e} \delta^{m,n} \varphi_i \varphi_j dV \quad (13)$$

$$F_i^{m,n} = - \int_{D, In} \mu^{m,n} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{N_e} I_{old,j}^{m,n} \varphi_j \right) dy - \int_{D, In} \eta^{m,n} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{N_e} I_{old,j}^{m,n} \varphi_j \right) dx + \int_{V_e} S^{m,n} \varphi_i dV \quad (14)$$

式中: $\int_{D, In}$ 、 $\int_{D, Out}$ 表示边界上流入及流出的数值通量,在迎风间断方案中,流入的数值通量为已知; $I_{old,j}^{m,n}$ 为辐射强度的上一次迭代值。

如图2(b)所示,在某个离散角度 $\boldsymbol{\Omega}^{m,n}$ 上,根据辐射能束的传输规律,确定空间离散单元之间的上下游关系。利用迎风格式,在上游边界单元处,通过式(15)、(16)引入边界条件,然后采用逐单元计算策略获取每个单元上的辐射强度

$$K_{i,j}^{m,n} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (15)$$

$$F_i^{m,n} = I_i^{m,n} \quad (16)$$

2.2 瞬态能量守恒方程的离散

与辐射强度类似,有限元 V_e 上温度可近似为

$$T = \sum_{j=1}^{N_e} T_j \varphi_j \quad (17)$$

式中: N_e 为有限元 V_e 内谱节点离散数; T_j 为节点温度值; φ_j 为节点基函数。

类似的,根据伽辽金加权余量法,对式(3)乘以权函数 φ_i ,并进行积分

$$\rho_p \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial t} \varphi_i dV = \lambda \int_{V_e} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \varphi_i dV - k_a \int_{V_e} \left(4n^2 \sigma T^4 - \int_{4\pi} I d\Omega \right) \varphi_i dV \quad (18)$$

参考文献[26]进行分部积分,式(18)改写为

$$\rho_p \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial t} \varphi_i dV = \lambda \int_D \frac{\partial T}{\partial x} \varphi_i dy - \lambda \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dV + \lambda \int_D \frac{\partial T}{\partial y} \varphi_i dx - \lambda \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dV - \kappa_a \int_{V_e} \left(4n^2 \sigma T^4 - \int_{4\pi} I d\Omega \right) \varphi_i dV \quad (19)$$

对于第一类温度边界条件,方程右边第一项和第三项为零。式(19)可简化为

$$\rho_p \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial t} \varphi_i dV = - \lambda \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dV - \lambda \int_{V_e} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dV - \kappa_a \int_{V_e} \left(4n^2 \sigma T^4 - \int_{4\pi} I d\Omega \right) \varphi_i dV \quad (20)$$

对瞬态项采用全隐格式,式(20)可改写为

$$(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{\Delta t}) T^{k+1} = \frac{\mathbf{B}}{\Delta t} T^k - \mathbf{C} \quad (21)$$

式(21)中矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的分量为

$$A_{i,j} = \lambda \int_{V_e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dV$$

$$B_{i,j} = \rho_p \int_{V_e} \varphi_i \varphi_j dV$$

$$C_i = k_a \int_{V_e} \left[4n^2 \sigma (T_{old}^{k+1})^4 - \int_{4\pi} I^{k+1} d\Omega \right] \varphi_i dV$$

式中 T_{old}^{k+1} 为第 $k+1$ 时层中上一次迭代的温度值。

2.3 耦合传热的离散求解步骤

(1)计算域离散:选择空间离散单元数 N ,单元内插值节点数 N_e ,角度离散数 N_θ 、 N_φ ,对辐射传递方程的角度和空间计算域,以及能量守恒方程的空间计算域进行离散。

(2)温度场和辐射强度场初始化:根据初始条件,对温度场和辐射强度场进行初始化,确定时间步

长 Δt , 导热系数 λ 和参与性介质辐射参数。

(3)时间层推进: $k=1,2,\cdots,N_t$ 。

(4)获取 $k+1$ 时层的温度场和辐射强度场:在离散角度方向上,开始组装矩阵 $\mathbf{K}^{m,n}$ 和 $\mathbf{F}^{m,n}$,求解方程(11)获取 $k+1$ 时层的辐射强度 $\mathbf{I}^{m,n}$;根据方程(19)组装矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$,求解方程(18)获取 $k+1$ 时层的温度 T^{k+1} 。如果同时满足收敛条件 $|I-I_{\text{old}}|/|I_{\text{old}}|\leq 10^{-6}$ 和 $|T^{k+1}-T_{\text{old}}^{k+1}|/|T_{\text{old}}^{k+1}|\leq 10^{-6}$,则迭代终止,开始下一时层的计算;否则继续进行循环迭代。

(5)重复步骤(4),并记录每一时层的温度场和辐射强度场,达到稳态 ($|T^{k+1}-T^k|/|T^k|\leq 10^{-6}$) 时停止计算,输出结果。

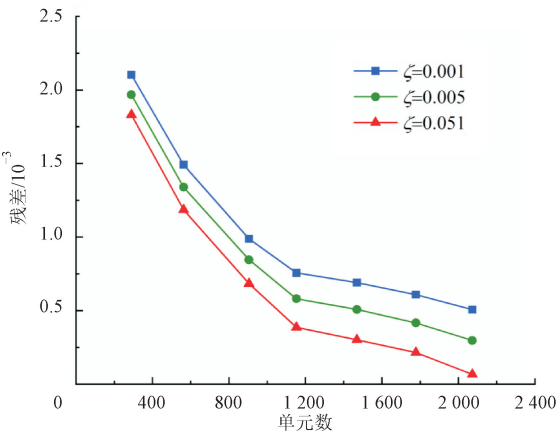
3 网格无关性分析及模型验证

首先,进行网格无关性验证工作。方腔内充满了吸收、发射及散射参与性介质,介质的折射率为 $n(x,y)=1+2(x+y)/H$,底壁面温度 $T_{w1}=1\,000\text{ K}$,其余 3 个壁面温度 $T_{w2}=T_{w3}=T_{w4}=500\text{ K}$ 。整个温度场初始温度分布 $T_g=500\text{ K}$,辐射-导热参数 $N_{\text{cr}}=\lambda(k_a+k_s)/(4\sigma T_{w1}^3)=0.01$,吸收系数 $\kappa_a=1\text{ m}^{-1}$,散射系数 $\kappa_s=0$ 。空间单元内节点数 $N_e=7$ 。参考温度为 $T_{\text{ref}}=1\,000\text{ K}$ 。表 1 给出了空间及角度网格组合对沿底壁面中心线($x/H=0.5$)上稳态无量纲温度($T\cdot T_{\text{ref}}^{-1}$)的影响。从表 1 可以看出,当空间网格数 $N_x\geq 7$ 、 $N_y\geq 7$,角度离散方向数 $N_\theta\geq 10$ 、 $N_\varphi\geq 20$,各点温度变化值均小于 0.07% ,满足网格无关性要求。因此,在后续研究分析中,本文选用 $N_x=7$ 、 $N_y=7$ 、 $N_\theta=10$ 和 $N_\varphi=20$ 作为计算条件。

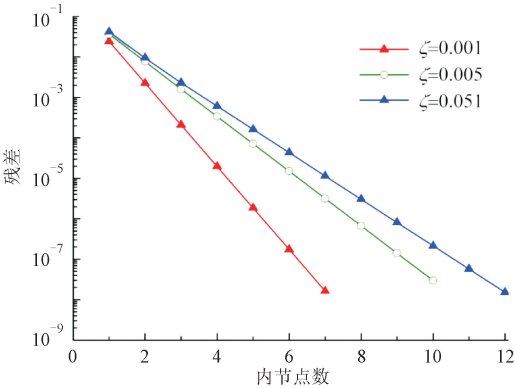
表 1 空间网格和角度方向对无量纲温度分布的影响
Table 1 The effects of different spatial elements and angular directions on dimensionless temperature

N_x	N_y	N_θ	N_φ	$y\cdot H^{-1}$			
				0.05	0.35	0.65	0.95
1	1	10	20	0.884 0	0.697 7	0.617 9	0.535 9
3	3	10	20	0.867 5	0.697 8	0.611 1	0.543 3
5	5	10	20	0.864 6	0.697 7	0.611 0	0.543 3
7	7	10	20	0.864 8	0.697 6	0.610 9	0.544 1
9	9	10	20	0.864 6	0.697 5	0.610 9	0.544 2
7	7	6	12	0.869 3	0.700 8	0.609 0	0.543 5
7	7	10	20	0.864 8	0.697 6	0.610 9	0.544 1
7	7	14	28	0.864 2	0.696 8	0.611 3	0.543 8

间断谱元法结合了间断有限元和谱方法的优点,它的最大特点是具有自适应收敛特性;随着单元数的增加,呈现线性收敛特性;随着单元内节点数的增加,呈现指数收敛特性。图 3 给出了不同时刻下随空间单元数和单元内节点数变化的残差收敛曲线。图中横坐标为单元数或单元内节点数,纵坐标为相对于基准解的积分平均误差。从图 3 可以看出:随着空间单元数增加,间断谱元法具有线性收敛速度;随着空间单元内节点数的增加,间断谱元法的收敛速度非常快,呈现指数收敛速度。



(a)空间单元数



(b)单元内节点数

图 3 残差收敛速度

Fig. 3 The convergence rate of residual error

其次,为了验证基于间断谱元法的耦合传热模型的正确性、有效性,选用了与文献[9]、[15]类似的算例。图 4 给出了下壁面中心线上在不同无量纲时刻 $z=l(k_a+k_s)^2t/(\rho c_p)$ 的无量纲温度分布。从图 4 可以看出,在不同时刻,间断谱元法的计算结果与离散传递法、有限元方法的结果均吻合得较好,且最大相对误差分别为 0.65% 、 0.78% 。因此,间断谱元法是能够有效分析非均匀介质内的辐射与瞬态导热耦合传热问题的。

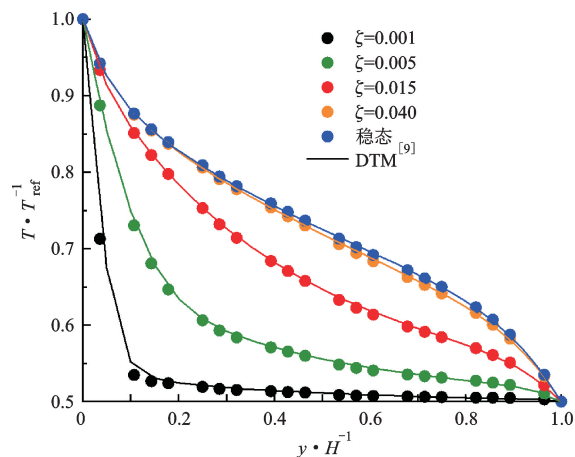
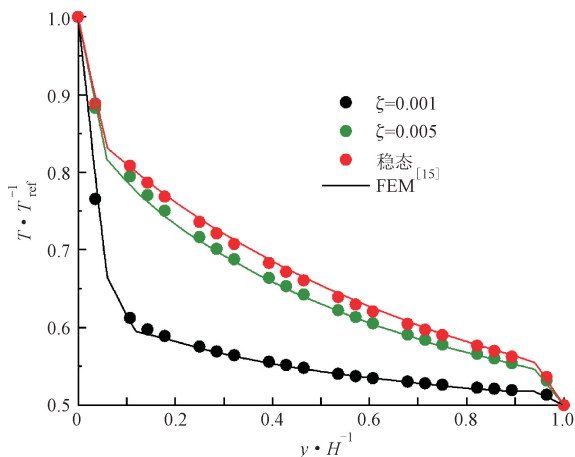
(a) $n(x, y) = 1$ (b) $n(x, y) = 1 + 2(x + y)/H$

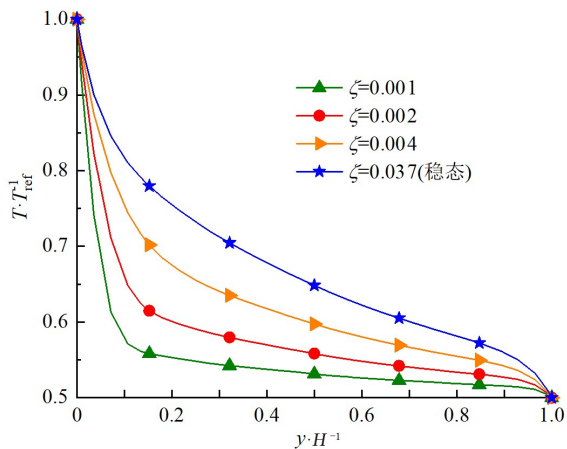
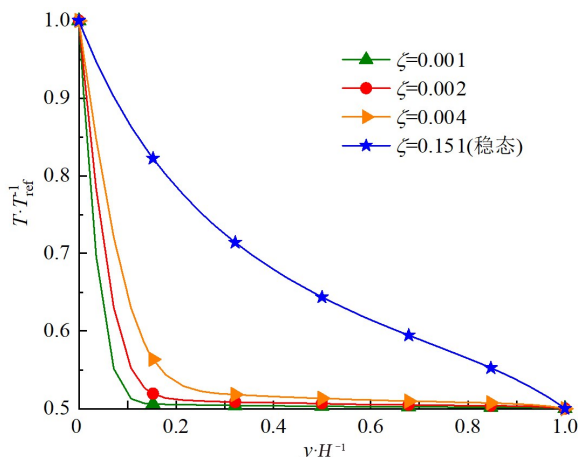
图 4 下壁面中心线上瞬态无量纲温度分布

Fig. 4 The distribution of transient dimensionless temperature along the bottom centerline

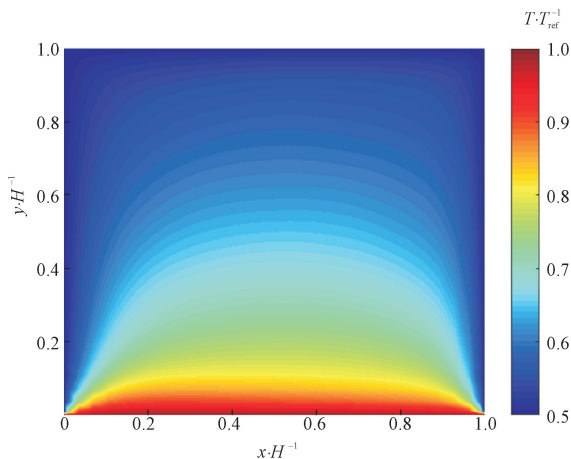
4 结果分析与讨论

4.1 辐射与导热耦合参数对瞬态耦合传热的影响

在本算例中,介质为非均匀的各向异性散射性介质,散射性函数为 $\varphi = 1 + \Omega' \Omega$,折射率分布为 $n(x, y) = 1 + 2(x + y)/H$,散射系数为 $k_s = 0.5 \text{ m}^{-1}$,吸收系数为 $k_a = 0.5 \text{ m}^{-1}$ 。壁面为黑体壁面,边界条件为 $T_{w1} = 1000 \text{ K}$ 和 $T_{w2} = T_{w3} = T_{w4} = 500 \text{ K}$,初始条件为 $T_g = 500 \text{ K}$ 。在本算例中,参考温度为 $T_{\text{ref}} = 1000 \text{ K}$,无量纲温度为 $T \cdot T_{\text{ref}}^{-1}$ 。图 5 给出了 N_{cr} 为 0.01、0.1 两种情况下底壁面中心线上无量纲温度随时间变化曲线。对比图 5(a)、图 5(b)可以看出,随着 N_{cr} 的增大,热传导占比增加,到达稳态时所用无量纲时间越长,且温度场趋向于线性分布发展。

(a) $N_{\text{cr}} = 0.01$ (b) $N_{\text{cr}} = 0.1$ 图 5 N_{cr} 对下壁面中心线上瞬态无量纲温度分布的影响Fig. 5 The effect of N_{cr} on the distribution of transient dimensionless temperature along the bottom centerline

为了直观理解 N_{cr} 对整场耦合传热的影响,图 6 给出了 $N_{\text{cr}} = 0.01, 0.1$ 时,耦合传热达到稳态后全场无量纲温度分布云图。

(a) $N_{\text{cr}} = 0.01$

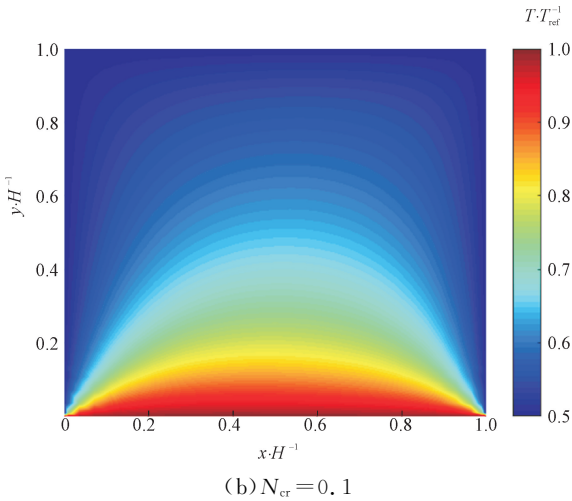


图 6 N_{cr} 对稳态温度场分布云图

Fig. 6 The effect of N_{cr} on the contour plot of steady state temperature distribution

当 $N_{cr}=0.01$ 时,由于热辐射起主要作用,且介质是非均匀参与性介质,温度场呈不对称分布;当 $N_{cr}=0.1$ 时热传导占比逐渐增强,热辐射占比逐渐减弱,会消除非均匀介质所带来的温度场非均匀性,整体温度场向对称性分布发展。

4.2 非均匀介质折射率分布对瞬态耦合传热的影响

进一步分析介质的折射率分布对辐射与导热耦合传热的影响,辐射与导热耦合参数 $N_{cr}=0.01$, 介质吸收系数 $k_a=1\text{ m}^{-1}$, 介质吸收系数 $k_s=0$, 壁面为黑体壁面,参考温度 $T_{ref}=1\text{ }000\text{ K}$,无量纲温度为 $T\cdot T_{ref}^{-1}$ 。参考文献[27],采用的非线性介质折射率分布为非线性分布 $n(x)=5[1-0.902\text{ }5(x/H)^2]^{0.5}$ 。同时,为了比较其影响,给出了介质均匀分布 $n(x,y)=1$ 的结果,图 7 给出了两种折射率分布条件下底壁面中心线上无量纲温度分布,从图 7 可以看出:在相同时刻,均匀折射率的无量纲温度温升较为缓慢,温度分布相对陡峭;而非线性折射率的无量纲温

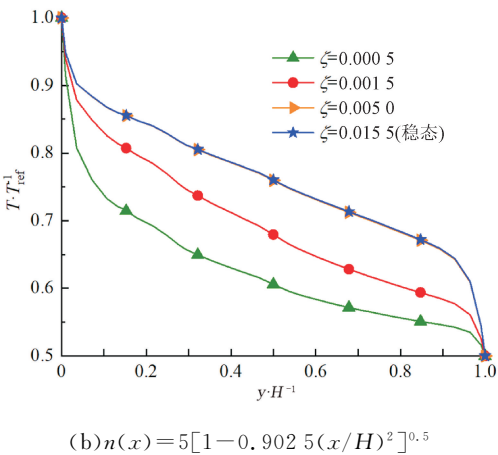


图 7 不同折射率分布时下壁面中心线上温度分布

Fig. 7 The temperature distribution along bottom centerline for different graded indexes

度的稳升较为迅速,温度分布相对平缓。非线性折射率达到稳态的时间比均匀折射率要短,为了更好地分析折射率对整场温度分布的影响,图 8 给出了稳态时的温度分布云图。

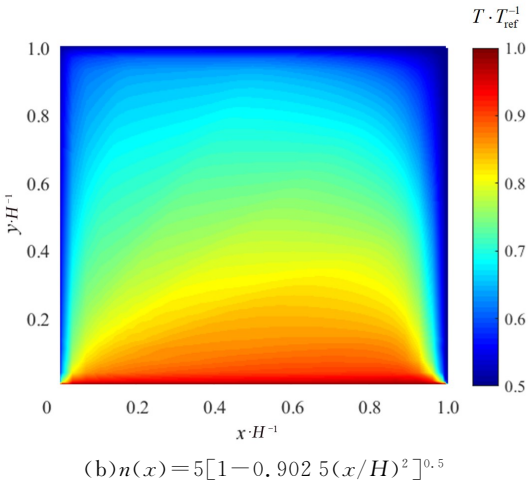
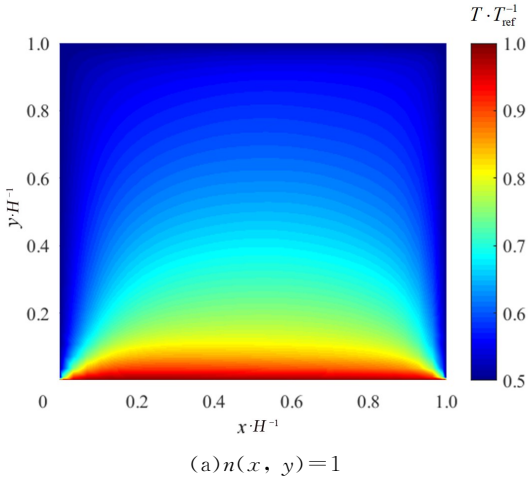
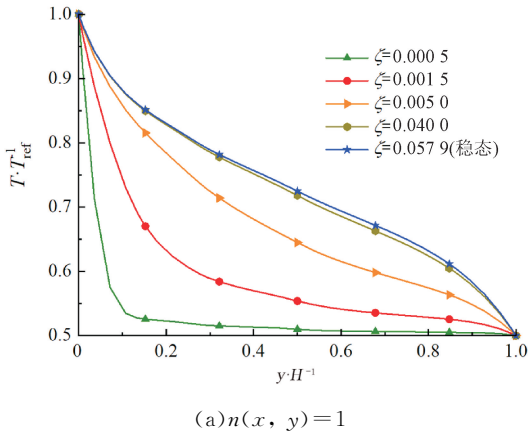


图 8 不同折射率分布下稳态温度场分布云图

Fig. 8 The contour plot of steady state temperature distribution for different grad indexes



从图8可以看出,均匀折射率的温度分布呈左右对称趋势,而非线性折射率的温度分布呈现左右非对称分布,非线性折射率的整场温度要比均匀折射率的高。

5 结 论

本文构建了基于间断谱元法的求解器,并用于二维非均匀介质内辐射与瞬态导热耦合传热分析。在求解的过程中,通过迎风间断谱元法求解辐射传递方程获得相应辐射强度信息,并将其以辐射源项的形式耦合进能量守恒方程;然后,通过谱元法求解瞬态能量守恒方程获得相应温度场分布。得到如下主要结论:

(1)间断谱元法对二维非均匀介质内辐射与导热耦合传热问题有较好的求解性能,计算结果与文献中离散传递法和有限元结果吻合良好;

(2)间断谱元法有较好的自适应收敛特性,随着单元内节点数的增加,计算结果呈指数收敛;

(3)随着 N_{cr} 的增加,在耦合传热中导热占比会增加,会消除非均匀介质所带来的温度场非均匀性,整体温度场向对称性分布发展,且到达稳态的时间要变长;

(4)介质折射率对耦合传热温度分布有明显影响,与均匀介质相比,非均匀介质内温度呈现非对称分布,且整体温度更高。

参考文献:

- [1] 林左鸣. 战斗机发动机的研制现状和发展趋势 [J]. 航空发动机, 2006, 32(1): 1-8.
LIN Zuoming. The current development and future trends of fighter engines [J]. Aeroengine, 2006, 32(1): 1-8.
- [2] 朱惠人, 张丽, 郭涛, 等. 高温透平叶片的传热与冷却 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2017.
- [3] SIEGEL R. Internal radiation effects in zirconia thermal barrier coatings [J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 1996, 10(4): 707-709.
- [4] CHU H S, WENG L C. Transient combined conduction and radiation in anisotropically scattering spherical media [J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 1992, 6(3): 553-556.
- [5] AOULED-DLALA N, SGHAIER T, SEDDIKI E. Numerical solution of radiative and conductive heat transfer in concentric spherical and cylindrical media [J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2007, 107(3): 443-457.
- [6] WANG Cunhai, FENG Yanyan, YUE Kai, et al. Discontinuous finite element method for combined radiation-conduction heat transfer in participating media [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2019, 108: 104287.
- [7] 王存海, 郑树, 张欣欣. 非规则形状介质内辐射-导热耦合传热的间断有限元求解 [J]. 物理学报, 2020, 69(3): 143-151.
WANG Cunhai, ZHENG Shu, ZHANG Xinxin. Discontinuous finite element solutions for coupled Radiation-Conduction heat transfer in irregular media [J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(3): 143-151.
- [8] FENG Yanyan, WANG Cunhai. Discontinuous finite element method applied to transient pure and coupled radiative heat transfer [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2021, 122: 105156.
- [9] MISHRA S C, TALUKDAR P, TRIMIS D, et al. Computational efficiency improvements of the radiative transfer problems with or without conduction-a comparison of the collapsed dimension method and the discrete transfer method [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2003, 46(16): 3083-3095.
- [10] MISHRA S C, ROY H K. Solving transient conduction and radiation heat transfer problems using the lattice Boltzmann method and the finite volume method [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 223(1): 89-107.
- [11] MISHRA S C, KRISHNA C H, KIM M Y. Analysis of conduction and radiation heat transfer in a 2-D cylindrical medium using the modified discrete ordinate method and the lattice Boltzmann method [J]. Numerical Heat Transfer: Applications, 2011, 60(3): 254-287.
- [12] SASMAL A, MISHRA S C. Analysis of conduction and radiation heat transfer in a differentially heated 2-D square enclosure [J]. Heat Transfer: Asian Research, 2017, 46(4): 384-408.
- [13] MUKHERJEE A, MISHRA S C, MONDAL P K. Numerical analysis of combined-mode dual-phase-lag heat conduction and radiation in an absorbing, emitting, and scattering cylindrical medium [J]. Numerical Heat Transfer: Applications, 2017, 71(7): 769-788.
- [14] SUN Yujia, ZHANG Xiaobing. Analysis of transient conduction and radiation problems using lattice Boltzmann and finite volume methods [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016, 97: 611-617.
- [15] 易红亮, 甄欠, 何凯, 等. 梯度折射率介质瞬态辐射-导热耦合传热 [J]. 工程热物理学报, 2010, 31(11): 1941-1944.

- YI Hongliang, ZHEN Bing, HE Kai, et al. Transient coupled radiative-conductive heat transfer in a graded index medium [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2010, 31(11): 1941-1944.
- [16] LI Wanai, PAN Jianhua, REN Yuxin. The discontinuous Galerkin spectral element methods for compressible flows on two-dimensional mixed grids [J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 364: 314-346.
- [17] CHAUDHURI A, JACOBS G B, DON W S, et al. Explicit discontinuous spectral element method with entropy generation based artificial viscosity for shocked viscous flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 332: 99-117.
- [18] SUN Yasong, LI Sida, ZHOU Ruirui, et al. Spatial-angular spectral element method with discontinuous Galerkin schemes for radiative transfer in 2D irregular enclosures with obstacles based on unstructured spatial elements [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2022, 280: 108082.
- [19] LI Sida, SUN Yasong, ZHENG Aozhou, et al. A limiter of discontinuous finite element method for thermal radiation heat transfer [J]. *Heat Transfer Research*, 2022, 53(8): 75-97.
- [20] POZRIKIDIS C. Introduction to finite and spectral element methods using MATLAB [M]. 2nd ed. New York, USA: CRC Press, 2014.
- [21] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, et al. Spectral methods: fundamentals in single domains [M]. Berlin, Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [22] ZHAO J M, LIU L H. Discontinuous spectral element method for solving radiative heat transfer in multidimensional semitransparent media [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2007, 107(1): 1-16.
- [23] WANG Wenkai, ZHOU Ruirui, LI Benwen. Discontinuous spectral element method for radiative heat transfer in axisymmetric cylindrical medium [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2019, 226: 29-39.
- [24] LIU L H, ZHANG L, TAN H P. Finite element method for radiation heat transfer in multi-dimensional graded index medium [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2006, 97(3): 436-445.
- [25] 李新宇. 非均匀介质内辐射换热与瞬态热传导分析 [D]. 西安: 西北工业大学, 2021.
- [26] DIGNE F, MICHEL J. Formulae for two-variable green functions [J]. *Journal of Algebra*, 2022, 610: 270-280.
- [27] LIU L H. Benchmark numerical solutions for radiative heat transfer in two-dimensional medium with graded index distribution [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2006, 102(2): 293-303.

(编辑 赵炜)