

能量视角下的盾构机刀盘的结构变异重构设计

刘宏磊^{1,2}, 宋晨旭^{1,2}, 鲁睿^{1,2}, 李宝童^{1,2}, 洪军^{1,2}

(1. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安;

2. 西安交通大学现代设计及转子轴承系统教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为充分挖掘盾构机刀盘优化承载形态,在经典布局方案基础上进一步探索动力学承载结构变异重构机制,以显式拓扑优化方法为设计工具,驱动盾构机刀盘承载架构的变异与重构,结合能量有限元分析方法,通过引导并强化盾构机刀盘振动能量耗散,实现对结构动响应的抑制。针对某型土压平衡式盾构机刀盘结构进行了设计验证,结果表明:在相同开口率和载荷输入条件下,所设计的盾构机刀盘面结构对比原始结构,平均变形量减小了 24.49%,最大应力降低了 41.34%,静力学性能得到提升;优化结构相比于原始结构,其能量柔度改善超过 22.0%,最大动响应降低 7.8%,最小动响应降低 27.7%,动力学性得到有效提升。能量视角下的结构变异重构设计方法具有良好的工程应用价值,可为以盾构机为代表的大尺寸结构动力学设计提供一种新思路。

关键词: 盾构机刀盘;结构变异;能量有限元;拓扑优化

中图分类号: TH122 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202309012 **文章编号:** 0253-987X(2023)09-0109-14

Structural Variation and Reconstruction Design of Tunnel Boring Machine Cutterhead from the View of Energy

LIU Honglei^{1,2}, SONG Chenxu^{1,2}, LU Rui, LI Baotong^{1,2}, HONG Jun^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In order to fully explore the optimized load-bearing structure of the tunnel boring machine cutterhead, the variation and reconstruction mechanism for the dynamic load-bearing structure based on the classical layout scheme was further researched. Specifically, the explicit topology optimization method was used as a design tool to drive the variation and reconstruction of the load-bearing structure of the tunnel boring machine cutterhead and the EFEM was also used to achieve the suppression of the structural dynamic response by guiding and enhancing the dissipation of the vibration energy of the tunnel boring machine cutterhead. In this paper, the cutterhead structure of a certain type of the EPB tunnel boring machine was verified. The verification results show that under the same opening rate and load input conditions, compared with the original cutterhead structure, the average deformation of the cutterhead structure designed in the paper is reduced by 24.49%, the maximum stress is reduced by 41.34%, and the statics performance is improved; compared with the original cutterhead structure, the energy flexibility of the

optimized cutterhead structure is improved by more than 22.0%, the maximum dynamic response and the minimum dynamic response are reduced by 7.8% and 27.7% respectively, and the dynamic performance is effectively improved. Therefore, the structural variation and reconstruction design method from the view of energy proposed in this paper has great engineering application value and also provides a new idea for the dynamics design of large-size structures represented by tunnel boring machines.

Keywords: cutterhead panels; structural variation; energy finite element method; topology optimization

盾构机是当今隧洞挖掘的主力装备之一,其施工过程不造成地面沉降、不阻断交通运行、不需要大面积拆迁,具备良好的社会及生态价值,目前已广泛应用于铁路、公路、市政管线、城市立体交通等公共基础设施建设中。盾构机主要由刀盘、盾体、螺旋输送机、管片拼装机、后配套系统等组成。受地质结构多样性的影响,盾构机刀盘设计灵活多变,以适应不同地域土层环境的巨大差异。为快速响应市场需求,盾构设备制造厂家通常会根据不同的掘进直径对盾体、螺旋输送机、管片拼装机、后配套系统等组件进行模块化设计,除刀盘外的组件不仅产品类型丰富而且结构相对成熟。因此,刀盘结构设计与优化是盾构机设计的关键问题之一。

盾构机刀盘通常分为软土辐条式刀盘及复合辐板式刀盘,前者针对黏性土层、粉砂质黏性土层,后者主要用于岩石地层或复合地层掘进。刀盘设计的常规流程^[1]为:针对具体工程地质及掘进直径,选配合适的刀具类型,择优布置各类刀具轨迹及位置;依据设计规范^[2]计算确定刀具尺寸、刀间距和开口率,并以此为基础,进行刀盘主体承载架构选型设计,构建基础支撑模块、破碎刮渣模块;最终匹配传动连接模块及辅助保护模块,完成刀盘结构设计。在这一过程中,承载架构作为刀盘结构主体,其设计质量对盾构机力学性能与掘进效率具有重要影响,本研究将其作为设计对象。

在掘进破碎过程中,盾构机刀盘承受较大的轴向压力及强烈的冲击振动,易导致刀盘结构卷边变形甚至断裂破坏,影响掘进效率和施工安全,因此针对刀盘的动力学优化设计是盾构机设计的基础之一,也是研究重点之一。文献[3]以滨海复合地层掘进过程为研究对象,探索了匹配其动力学环境的刀盘受力性状及布置优化,提供了基于有限元方法的参数优化,构建了刀盘布局优化策略。文献[4]通过ANSYS软件对盾构机刀盘进行强度验算以及模态分析,采用蒙特卡罗抽样技术完成刀盘设计缺陷的辨识与优化改进,有效降低了刀盘结构最大动响应,

实现了产品减重降本。文献[5-6]则以提升刀盘低阶固有频率为目标,联合ANSYS动响应分析模块及尺寸优化方法实现对参数化刀盘关键结构尺寸的优化设计,降低了动态激励环境下的结构动响应。类似研究可见文献[7-9]。以上工作的共性在于利用经典有限元方法完成刀盘结构模态分析及动响应解算,并以此为基础优化既有结构的尺寸参数,规避刀盘共振、抑制结构动力学变形。值得注意的是,共振的本质是振动能量的不断堆积,而结构动响应则是能量传递的外在表现。受此启发,本文从能量角度思考盾构机刀盘设计方法,通过引导能量的传递与耗散解决动态结构设计问题。

这一研究需要两项基础工具,即能量视角下的振动分析工具及与之匹配的结构设计工具。也就是本研究所关注的能量有限元分析方法及实现刀盘变异重构的拓扑优化设计方法。

能量视角下的振动结构分析并非新事物。有限元方法是较为成熟的低频响应分析方法,已被成功应用于复合材料结构的低频动响应预示中^[10]。然而,采用常规有限元方法分析结构响应时,单元的尺寸必须小于波长的1/10才能得到较好的结果,这导致高频响应有限元分析的模型自由度数量非常高,对于大型结构,其计算成本是无法接受的。20世纪60年代,Lyon等^[11]及Maidanik等^[12]在针对大尺寸结构噪音分析的研究中提出了统计能量法。统计能量法将结构分解为若干个线性耦合的子系统结构,通过求解各个子系统振动能量在时间和空间上的平均值获得对结构振动性能的判断。该方法从能量角度解析了结构模块的振动分布,为振动能量的利用与引导奠定了技术基础。但该方法仅实现了子系统整体的能量计算,无法提供子系统内部各质点的振动能量信息^[13],因此无法为子系统内的局部材料变化提供计算依据,很难驱动子系统内的拓扑重构。基于统计能量法的结构优化多为针对子系统整体的厚度优化或材料属性优化,很难与设计自由度更高的拓扑优化相结合。进入90年代,能量有限元

的提出对上述困境带来了改变^[14-16]。能量有限元方法是在统计能量法的基础上发展起来的。1989年,Nefske等^[17]基于微单元边界上能量流和能量密度的一阶导数成正比关系的假设,得到了微单元中平均功耗和能量密度之间成正比这一关系式;将这两个关系代入微单元中的能量平衡关系式,得到一个近似于热传导方程的以能量密度为变量的二阶微分方程;用有限元法求解该微分方程,得到结构各点的响应,这即为能量有限元的雏形。Lase等^[18]采用类似方法建立了纵向振动杆的能量控制方程。Sun等^[19]对非保守耦合结构进行了能量流分析。1992年 Wohlever等^[20]针对 Nefske 的关于微单元中边界上的能量流和能量密度之间关系的假设,对杆和梁中的关系式做出了推导和处理,证明了该假设的正确性。Bouthier等^[14-15]把 Wohlever 的工作推广至薄膜和薄板,发现在二维结构中能量强度和能量密度的一阶导数成正比。Moens等^[21]将能量有限元法应用于具体结构,并进行了实验验证,且实验结果和理论计算结果基本吻合。Hong等^[22]开发了用于船舰结构分析的能量有限元软件,促进了能量有限元方法在工程实际中的应用。

在结构优化方面,目前常用的优化方法有尺寸优化、形状优化以及拓扑优化。拓扑优化相较于尺寸优化和形状优化具有更多的设计自由度,发展前景较好。1984年提出的均匀化方法^[23-24]是拓扑优化研究的起点之一。Bendsoe^[25]于1988年提出的变密度法是拓扑优化领域应用最广、影响最深的方法。该方法的理论简单明了,算法实现简单,因此被多数主流拓扑优化软件所采用,并已广泛用于解决各类工程结构优化问题。Wang等^[26]提出对设计结果进行映射处理,将处于闭区间 $[0,1]$ 内的连续伪密度投影为离散的 $\{0,1\}$ 形式,解决中间态伪密度所造成的结构模糊问题,保证了拓扑优化的存在性。Osher等^[27]提出了水平集法,该方法所描述的结构边界随广义时间不断变化,其边界在速度场函数的驱动下完成结构形状变化,并通过水平集间的重合与分裂实现所描述结构的拓扑变化。2014年郭旭等^[28-30]提出了移动可变形组件法,该方法通过驱动设计域内组件的变形与移动完成组件间重合与分裂,从而使组件间连接关系趋近最优拓扑形态。

综上所述,能量有限元法以能量流平衡微分方程为控制方程,使用有限元方法求解,可以计算任意局部位置的能量密度分布,故可在能量密度场中反映形状与拓扑的变化,这为盾构机刀盘结构的拓扑重构提供了基本分析工具。当前刀盘主体承载架构设计主要服务于刀具安装与泥石排泄,其自身动静

力学设计则多依赖校验-加强-校验模式,结构形态单一,具有较大设计裕量,为刀盘重构与创新提供了很大的设计空间。因此,本文以显式拓扑优化方法为设计工具,驱动刀盘经典承载架构的变异与重构,并结合能量有限元分析方法,强化对刀盘振动能量的引导与耗散,抑制结构动响应,以期盾构机结构动力学设计提供一种新思路。

1 能量有限元分析方法及改进

1.1 能量有限元计算概述

在能量有限元框架下,盾构机刀盘的板结构能量平衡示意图如图1所示。外部输入的振动能量 $\Pi_{\text{输入}}$ 加载于微元上,输入能量向外传递,并在传递过程中受阻尼影响逐渐衰减,因此输入能量可分解为单元内部的能量耗散 $\Pi_{\text{耗散}}$ 与单元间的能量交换 $\Pi_{\text{交换}}$ 。

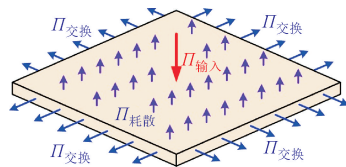


图1 微元内的能量平衡示意

Fig. 1 Diagram of the energy balance in a micro element

依据能量守恒定律,图1所示微元内能量流达成平衡,其表达式为

$$\Pi_{\text{输入}} = \Pi_{\text{交换}} + \Pi_{\text{耗散}} = - \int_{\Omega} \frac{c_g^2}{\eta \omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \langle e \rangle dV + \int_{\Omega} \eta \omega \langle e \rangle dV \quad (1)$$

式中: e 为能量密度; η 为阻尼; ω 为载荷的角频率; Ω 为微元体积; c_g 为弹性波的波群速度,波群速度的求解方式为

$$c_g = 2 \left[\frac{\omega^2 E (h)^2}{12(1-\lambda^2)\rho} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

其中: E 为弹性模量, λ 为泊松比, ρ 为微元材料密度, h 为微元厚度。因此,薄板的能量有限元本构方程即为其能量流微分平衡方程,该方程可写作

$$\Pi_{\text{in}}(x,y) = - \frac{c_g^2}{\eta \omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \langle e \rangle + \eta \omega \langle e \rangle \quad (3)$$

且其本构方程的积分弱形式为

$$\begin{aligned} 0 = & - \oint_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \left\{ \mathbf{n} \frac{c_g^2}{\eta \omega} \nabla \langle e \rangle \right\} d\Gamma^e + \\ & \int_{\Omega^e} \frac{c_g^2}{\eta \omega} \nabla \mathbf{N}^T \cdot \nabla \mathbf{N} \cdot \langle e \rangle dx dy + \\ & \int_{\Omega^e} \eta \omega \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot \langle e \rangle dx dy - \\ & \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \pi_{\text{in}}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{n}$ 为单元边界法向量; Γ^e 为单元边界; $\mathbf{N}$ 为形函数

向量;本文采用双线性插值函数构建形函数向量,如上式所示,其中 s 和 t 为有限元局部坐标下的横纵坐标; $\{e^e\}$ 为单元节点的能量密度。上式可写作矩阵形式

$$[\mathbf{K}^e]\{e^e\} = \{\mathbf{F}^e\} + \{\mathbf{Q}^e\} \quad (5)$$

$$\begin{cases} [\mathbf{K}^e] = \int_{\Omega^e} \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \mathbf{N}^T \cdot \nabla \mathbf{N} dx dy + \int_{\Omega^e} \eta\omega \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} dx dy \\ \{\mathbf{F}^e\} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \pi_{in}(x, y) dx dy \\ \{\mathbf{Q}^e\} = \oint_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \left\{ \mathbf{n} \frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e^e \rangle \right\} d\Gamma^e \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{K}^e$ 为单元能量矩阵; $\mathbf{F}^e$ 为单元内的振动能量输入; $\pi_{in}(x, y)$ 为点 (x, y) 处的能量输入; $\mathbf{Q}^e$ 为不连续能量密度场边界处的能量流。以上构建完成了板结构的单元能量矩阵,总能量矩阵可根据经典有限元组装方法组装。值得注意的是,这种组装方式所建立的设计域适用于连续的能量密度场,即设计域内所有单元材料及厚度连续或相同。当材料分布不连续时,设计域内能量传递将因材料分布的不连续变化而发生反射,进而形成不连续能量密度场,而其不连续性即通过 $\mathbf{Q}^e$ 表征,其详细解析过程如下。

1.2 单元边界不连续性分析

当设计域内相邻单元间材料不连续时(如不同厚度或材料),单元间的能量流传递将在单元边界处发生反射。这一反射导致相邻单元间能量密度不连续,从而形成了不连续的能量密度场。单元间能量流的反射与透射系数解析过程如下。

取弯曲波作为外部能量输入,能量透射与反射模型如图2所示,纵波与剪切波的计算与优化过程与弯曲波基本一致,其中单元1及单元2的垂直变形解析公式^[31]可写作

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= [A_{f1} \exp(-jk_{f1}x \cos \theta_1) + C_{f1} \exp(jk_{f1}x \cos \theta_1) + D_{f1} \exp(k_{f1}x \sqrt{1 + \sin^2 \theta_1})] \exp(-jk_{f1}y \sin \theta_1) \\ w_2(x, y) &= [A_{f2} \exp(-jk_{f2}x \cos \theta_2) + B_{f2} \exp(-k_{f2}x \sqrt{1 + \sin^2 \theta_2})] \cdot \exp(-jk_{f2}y \sin \theta_2) \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

且

$$\begin{cases} k_{f1} = \left(\omega_1^2 \frac{12\rho_1(1-\lambda_1^2)}{E_1 h_1^3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ k_{f2} = \left(\omega_2^2 \frac{12\rho_2(1-\lambda_2^2)}{E_2 h_2^3} \right)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad (8)$$

式中: ω_1 、 ω_2 分别为单元1、2的垂直变形; θ_1 为弯曲波的入射角及反射角; θ_2 为弯曲波射入单元2内的透射角; k_{f2} 、 k_{f1} 为弯曲波在单元1、2内传播的波数; A_{f1} 、 C_{f1} 、 D_{f1} 、 A_{f2} 、 B_{f2} 分别为入射波、反射波、单元1内的近场耗散波、透射波、单元2内的近场耗散波这5种波的波幅。

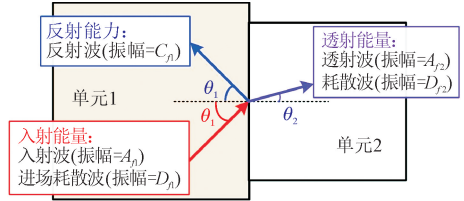


图2 不同厚度板单元间的能量反射与透射过程示意
Fig.2 Energy reflection and transmission between different plate elements

由于单元交界处两侧的弯曲波延边界具有相同的位移,因此存在

$$k_{f1} \sin \theta_1 = k_{f2} \sin \theta_2 \quad (9)$$

当 $k_{f2}/k_{f1} > \sin \theta_1$ 时,边界上的能量传递类型为能量部分反射,则单元2内的垂直位移为

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= [A_{f2} \exp(-jk_{f1}x \sqrt{(k_{f2}/k_{f1})^2 - \sin^2 \theta_1})] \cdot \exp(-jk_{f1}y \sin \theta_1) + [B_{f2} \exp(-k_{f1}x \cdot \sqrt{(k_{f2}/k_{f1})^2 + \sin^2 \theta_1})] \exp(-jk_{f1}y \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (10)$$

当 $k_{f2}/k_{f1} \leq \sin \theta_1$ 时,边界上的能量传递类型为能量全反射,则单元2内的垂直位移为

$$\begin{aligned} w_2(x, y) &= [A_{f2} \exp(-k_{f1}x \sqrt{\sin^2 \theta_1 - (k_{f2}/k_{f1})^2})] \cdot \exp(-jk_{f1}y \sin \theta_1) + [B_{f2} \exp(-k_{f1}x \cdot \sqrt{(k_{f2}/k_{f1})^2 + \sin^2 \theta_1})] \exp(-jk_{f1}y \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (11)$$

此外,两单元的变形 w_1 、 w_2 还遵循变形平衡、变形梯度连续、沿 y 轴力矩平衡以及沿 z 轴剪切力平衡4项条件,这4项条件可写为

$$\begin{cases} w_1 = w_2 \\ dw_1/dx = dw_2/dx \\ M_{xx1} = M_{xx2} \text{ 且 } M_{xz} = -Eh^3/12(1-\lambda^2)(\partial^2 w/\partial x^2 + \nu \partial^2 w/\partial y^2) \\ N_{xx1} = N_{xx2} \text{ 且 } N_{xz} = -Eh^3/12(1-\lambda^2)(\partial^3 w/\partial x^3 + (2-\lambda)\partial^3 w/\partial x \partial y^2) \end{cases} \quad (12)$$

式中: M_{xx1} 与 M_{xx2} 分别为单元 1、2 边界处沿 y 轴力矩; N_{xx1} 与 N_{xx2} 分别为单元 1、2 边界处沿 z 轴的剪切力。入射波、反射波及透射波的波幅 A_{f1} 、 A_{f2} 、 C_{f1} 可由上式联立得到。基于以上波幅计算,单元 1、2 间的弯曲波能量透射系数 r_{11} 与反射系数 τ_{12} 可写作

$$\left\{\begin{aligned}\tau_{12} &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{|A_{f2}|^2}{|A_{f1}|^2} \left[-E_2 h_2^3 / 12 (1 - \lambda_2^2) \right] k_{f2}^3 \right) \cdot \\ &\quad \cos \theta_2 d\theta_2 \\ r_{11} &= \int_0^{\pi/2} (|C_{f1}|^2 / |\bar{A}_{f1}|^2) \cos \theta_1 d\theta_1\end{aligned}\right.$$

(13)

本节旨在分析单元边界不连续性产生的原因,解析材料分布不连续单元间的能量透射与反射系数,这一解析过程将在下节用于实现不连续场内相邻单元间的耦合,有关本节内容的详细说明可见文献[33]。

1.3 不连续场的有限元模型改进

当相邻单元间材料分布不连续时,振动波在不连续边界处将发生波的反射,从而使得分析域内的能量密度场不连续。如图 3 所示,公共节点无法表征不连续密度场边界两侧各自不同的能量密度。鉴于这一问题,有必要在边界处增加新节点以表征不连续场。由于添加节点后的两个相邻单元不共用节点,因此可表征单元边界处不连续的物理量。

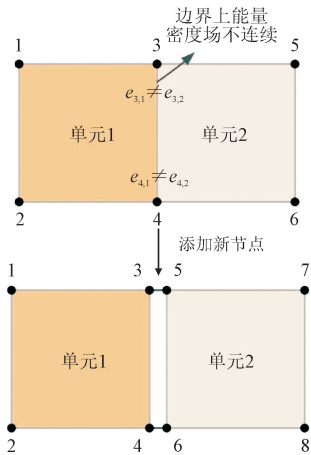


图 3 能量有限元框架下不连续物理场边界处的节点配置

Fig. 3 Node configuration at the boundary of discontinuous physical field

在建构经典不连续场有限元模型时,需要沿着分析域内不连续边界增设节点,以表征不连续边界两侧不同的物理量值。但是在优化迭代过程中(如图 4 所示),优化结构不断演化,将导致不连续物理场的形态持续变化,使得前次迭代中沿不连续边界插入的节点在之后的迭代中不再处于不连续边界上,能量有限元计算模型的网格不断失效,必须不断重建网格。这是不连续场拓扑优化的特殊需求,但重建网格将明显增加优化程序的结构复杂度,且实现过程较为耗时,因此拓扑优化实施过程一般强调避免有限元网格重建。

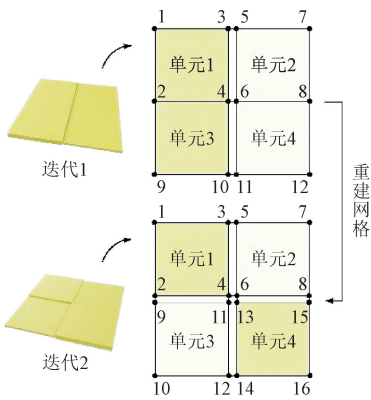


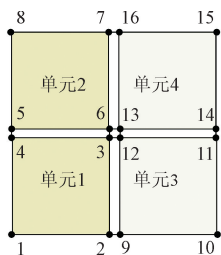
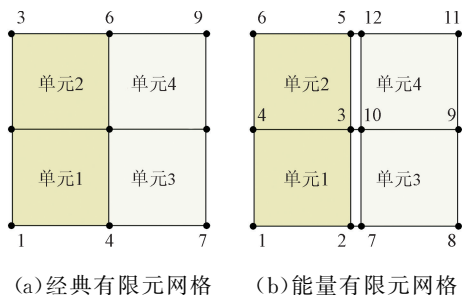
图 4 经典能量有限元节点配置随材料分布变化示意

Fig. 4 Changes in classical energy finite element node configuration varying with material distribution

为解决这一问题,本研究提出了一种定制化的有限元网格,该网格可用于计算任意材料分布的能量有限元分析问题,且无需网格重建。这一定制化网格的本质是在所有单元边界处都预先插入节点。由于所有可能的节点都已预先添置在有限元网格中,因此单元间的任意边界均可用于表征物理场的不连续边界,无需因不连续物理场的变化而重建网格。在此网格中,单元间相互独立不共用公共节点,因此命名此网格为“单元独立网格”。值得注意的是,此处对网格的改造将使得节点总数增加且相邻单元不再耦合,为有限元求解的计算量及单元间的能量传递造成困难。下文将针对这两个问题提供解决方法。

图 5(a)、(b)分别给出了经典有限元及经典能量有限元方法中,有限元网格节点的配置示意图。其中连续场内相邻单元间的耦合主要通过公共节点实现。然而,单元独立网格(图 5(c))中并不存在公

共节点,无法实现单元间的直接耦合,因此有必要建立新的有限元矩阵组装规则,对相邻且解耦的单元进行再耦合,保证能量在相邻单元间的连续有效传递。



(c)免网格重建的不连续场有限元所构建的单元独立网格

图5 经典有限元、经典能量有限元及免网格重建的不连续场有限元所使用的节点布局配置

Fig. 5 Node layout of classical finite element mesh, classical energy finite element mesh and reconstruction-free mesh

现以图6为例说明单元独立网格的矩阵组装规则。

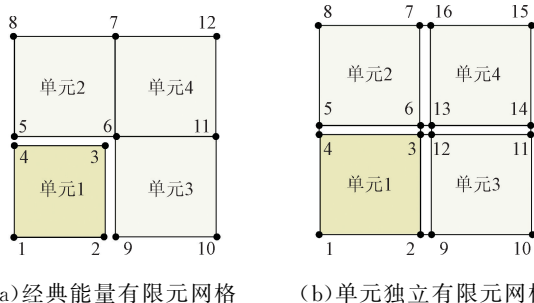


图6 经典有限元拓扑优化及能量有限元拓扑优化节点配置
Fig. 6 Node layout used in FEM-based topology optimization and EFEM-based topology optimization

步骤1 单元矩阵组装。依据经典有限元组装规则按照节点标号将所有单元能量矩阵沿对角线组装,由于不存在公共节点,单元间并未建立耦合,因此此时获得非耦合总能量矩阵。

步骤2 连续单元间再耦合。由于相邻单元间不共享节点,因此材料连续的相邻单元间则需通过以下步骤实现再耦合。假设节点 i, l, m, n 属于单元 A ,节点 j, k, p, q 属于单元 B 。节点 i 和节点 j 在非耦合总能量矩阵中的贡献分别被写作 $K_{i,i}, K_{i,l}, K_{i,m}, K_{i,n}$ 和 $K_{j,i}, K_{j,l}, K_{j,m}, K_{j,n}$ 。实现节点 i 和节点 j 再耦合的第一步是将节点 i 和节点 j 在矩阵中的贡献分别叠加至其耦合点。具体而言,即将 $K_{i,i}, K_{i,l}, K_{i,m}, K_{i,n}$ 叠加至 $K_{j,i}, K_{j,l}, K_{j,m}, K_{j,n}$,并将 $K_{j,j}, K_{j,k}, K_{j,p}, K_{j,q}$ 叠加至 $K_{i,j}, K_{i,k}, K_{i,p}, K_{i,q}$ 。这一操作实现材料连续的单元间的再耦合。

为准确呈现这一叠加耦合过程,本文以图7单元独立网格为例进行详细说明。这一网格中需要进行再耦合的节点包括:节点7-节点16、节点6-节点13、节点6-节点12、节点13-节点12、节点14-节点11。此类节点空间位置相同,材料及能量密度场连续,是由共享节点差分而成,需做再耦合处理。以节点6-节点13为例,其调整过程在图8中由红色线框标注: $K_{6,5}, K_{6,6}, K_{6,7}, K_{6,8}$ 叠加至 $K_{13,5}, K_{13,6}, K_{13,7}, K_{13,8}$ 所在位置,同时将 $K_{13,13}, K_{13,14}, K_{13,15}, K_{13,16}$ 叠加至 $K_{6,13}, K_{6,14}, K_{6,15}, K_{6,16}$ 所在位置。其他节点的再耦合过程也使用各自对应的颜色标注于图8中。



图7 再耦合节点分布示意图

Fig. 7 Schematic diagram of recoupling node distribution

步骤3 不连续单元间再耦合。材料不连续的单元间通过能量流矩阵 Q^e 实现单元耦合,能量流矩阵 Q^e 的再耦合方式与上述方法相同。

以上即为独立单元网格的组装规则,实际应用中可以使用单元矩阵及各个边界的耦合关系矩阵直接组合得到不连续场的总有限元矩阵,无需在设计域材料分布变化时重新划分网格。这为后续针对盾构机刀盘拓扑优化设计提供了基础分析工具。

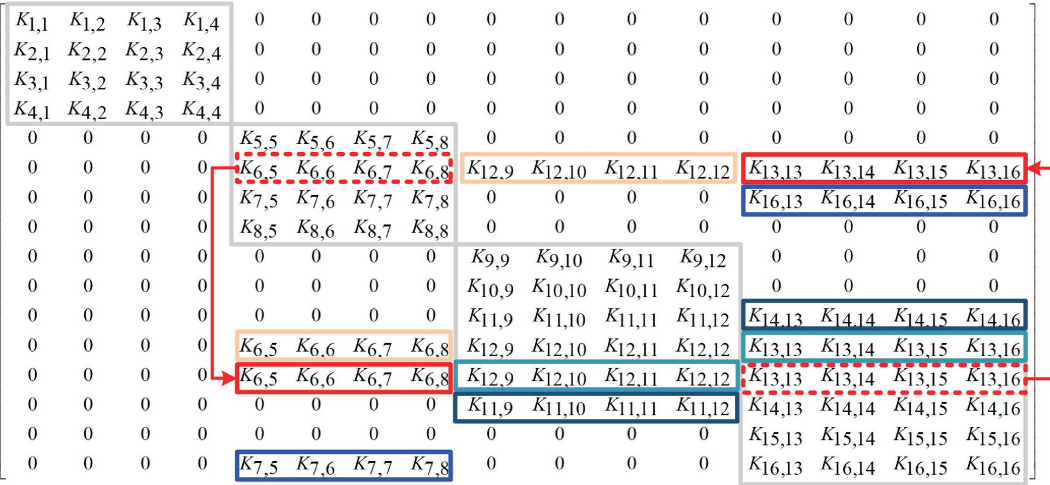


图 8 节点再耦合操作的矩阵调整示意图

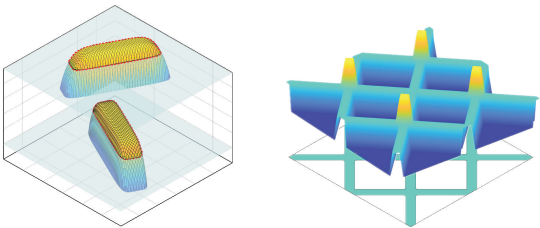
Fig. 8 Schematic diagram of matrix adjustment for node re coupling operation

2 盾构机刀盘结构拓扑优化设计

本文采用拓扑优化方法实现盾构机刀盘变异重构,具体地,先使用可移动可变形组件法实现刀盘板梁结构的显式几何描述及拓扑变换,再通过能量有限元方法解析结构动力学性能,驱动板梁结构中各组件位置及形状的演化,最终获得优化的拓扑形态。

2.1 可移动可变形组件法拓扑描述

可移动可变形组件法可实现对结构形态演进与拓扑变化^[29,32]的显式描述,其方法如图 9 所示。此类水平集使用几何特征(如图 9(a)、(b))中组件的长、宽、倾斜角、直径、中心点坐标)建立显式表达式,复杂结构由多个显式水平集函数描述的组件构成,结构拓扑变化由组件间合并与拆分实现。这是一种拉格朗日观点下的结构描述方式,每个组件即为一个拓扑子域,每个子域伴随着水平集函数的更新而变形,避免了欧拉观点下子域形态固定的问题。考虑到实际生产中所使用的 CAD 系统也采用显式描述方法,优化设计中使用显式水平集描述可为刀盘设计的实际应用带来更大的便利,因此本文以显式水平集作为基本形态描述手段。



(c)各组件的水平集归一化处理 (d)组装所有组件

图 9 水平集描述的数值构建路线

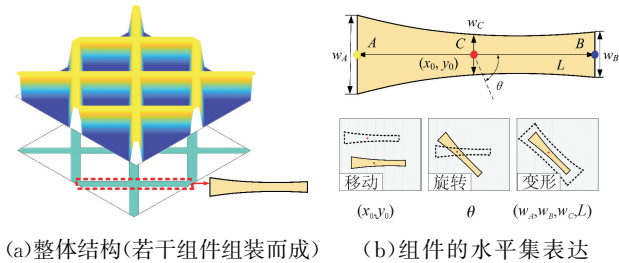
Fig. 9 Numerical description of level set

显式水平集描述的数值实现方法如图 9 所示,完整的结构是由若干个组件组合而成(图 9(a)),组件使用几何特征作为描述参数建立显式的水平集描述方法,每个组件的水平集函数式为

$$\varphi(x,y)=\left(\frac{\cos\theta(x-x_0)+\sin\theta(y-y_0)}{L/2}\right)^6+\left(\frac{-\sin\theta(x-x_0)+\cos\theta(y-y_0)}{T/2}\right)^6-1\tag{14}$$

式中: $\varphi(x,y)$ 为组件在点 (x,y) 处水平集; L 、 T 、 θ 、 x_0 、 y_0 分别为组件长、宽、倾斜角及中心点坐标。组件以几何特征为变量构建水平集描述如图 9(b)所示。

为获得整体结构的水平集总成,需将每个组件的水平集进行叠加组装。但直接叠加会造成不同水平集间的相互干扰,因此先行将各组件进行归一化处理,如图 9(c)所示。此处使用 Heaviside 函数实现水平集的归一化,其归一化表达式近似写作



(a)整体结构(若干组件组装而成) (b)组件的水平集表达

$$H(\varphi_q) = \frac{1}{\pi} \arctan(b\varphi_q) + 0.5 \quad (15)$$

式中: φ_q 与 $H(\varphi_q)$ 分别为归一化前后组件 q 的水平集; b 为一个较大的常数, 一般推荐 b 取 10 000。

将归一化后的水平集直接叠加即可获得结构整体的水平集(图 9(d)), 其中 $\varphi \geq 1$ 区域为组件覆盖区域, $\varphi = 0$ 区域为非组件覆盖区域。但是, 考虑到水平集在组件区域数值不一会对后续数值处理带来麻烦, 此时需将整体水平集进行二次归一化, 最终的水平集总成写作

$$\varphi_{\text{sum}} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(b\left(\sum_{q=1}^{n_{\text{com}}} H(\varphi_q) - 0.5\right)\right) + 0.5 \quad (16)$$

式中: n_{com} 为组件总数; φ_{sum} 为二次归一化后的水平集总成, 此时组件覆盖区域 $\varphi_{\text{sum}} = 1$, 非覆盖区域 $\varphi_{\text{sum}} = 0$ 。

至此, 对结构拓扑形态的表达已借助显式水平集方法完成。该表达方法独立运行, 既不受结构有限元计算工具选择的影响, 也不影响结构有限元计算设定。设计者可通过密度法投影^[32]将拓扑形态描述转化为结构计算模型。

2.2 可移动可变形组件法优化模型

以组件几何特征为设计变量, 在目标函数的指引下通过驱动组件连续变形与变布局, 迭代更新设计变量, 从而逐渐趋近目标函数最优形态, 实现对结构的演进式优化。优化的数学模型为

$$\begin{aligned} \text{Find } \mathbf{x} &= \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_{n_{\text{nod}}}\} \\ \mathbf{x}_j &= \{x_0, y_0, L, T, \theta\} \\ \text{Min } J(\varphi_{\text{sum}}(\mathbf{x})) \\ \text{s. t. } M(\varphi_{\text{sum}}(\mathbf{x})) &\leq M_0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为设计变量集合; 每个组件的设计变量 x_j 包括组件的长度 L 、宽度 T 、倾斜角 θ 及中心点坐标 (x_0, y_0) ; 目标函数 J 为刀盘能量柔度; 约束函数 M 为刀盘开孔率。由式(17)可知, 该优化数学模型为多变量连续寻优, 本文采用结构优化领域适用性良好的移动渐近线优化算法(MMA)进行求解。

2.3 可移动可变形组件法拓扑演化

结合以上内容, 刀盘结构拓扑演变的优化设计流程见图 10。

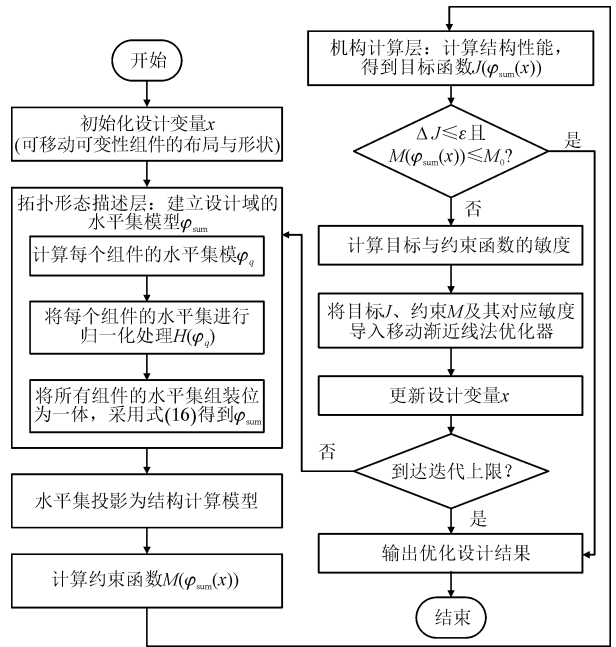


图 10 基于显式水平集描述的刀盘拓扑优化设计流程
Fig. 10 Cutterhead design based on explicit topology optimization

第 1 步 初始化, 即初始化组件的几何形态参数与优化参数, 选用合适的初始组件形状与布局。依据设计经验一般选用均匀的组件布局, 以降低优化方法的初始依赖性, 同时选用收敛速度较慢的优化参数, 防止优化快速收敛至局部最优解。

第 2 步 计算每个组件的水平集, 对所有组件的水平集进行归一化处理后, 将水平集组装为一体。对组装后的水平集进行二次归一化处理, 从而建立完成设计域的水平集描述。

第 3 步 利用投影方法将水平集描述转化为优化结构的物理场计算模型, 并使用能量有限元方法求解目标函数、约束函数及两者的敏度, 为基于梯度的优化求解提供数值实现基础。

第 4 步 变量更新。将目标函数、约束函数及其敏度代入移动渐近线优化器内, 实现优化收敛及设计变量的迭代更新。

第 5 步 优化终止条件。当迭代步数达到最大迭代次数时, 或者目标函数的变化低于最大允许误差 $\varepsilon = 0.05\%$ 时, 优化终止并输出结果。

基于显式水平集描述的拓扑优化方案实施过程清晰简单, 但需要注意的是, 此方法一般不能增加组件数量, 拓扑亏格的改变能力受到限制, 因此仍然存在初始依赖性。作者一般将本方法应用于对既有工程结构的进一步优化升级中, 此外, 上述组件的几何

变形能力较弱,更适合应用于对安全性要求较高,倾向简单传统几何结构的大型装备对象。

3 刀盘主体承载结构优化设计

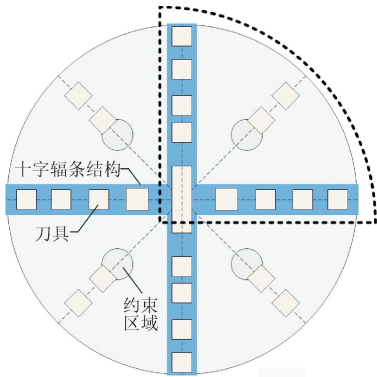
以兰州地铁 1 号线隧道施工所采用的某型土压平衡式盾构机为例(如图 11 所示),展示能量视角下的盾构机刀盘结构变异重构设计试试流程,并采用经典有限元分析软件完成对刀盘设计性能检验。



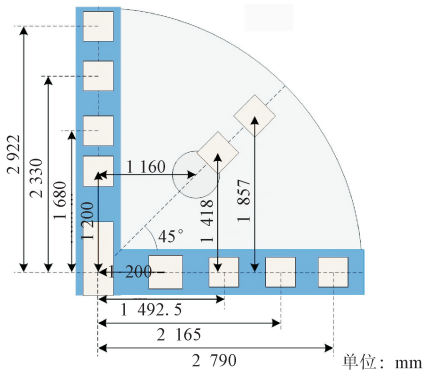
图 11 某型土压平衡盾构机刀盘面板结构^[5]
Fig. 11 The cutterhead panel of a certain earth pressure balance shield machine^[5]

该型盾构机工作地层有杂填土、黄土状土与砂卵石,采用复合辐板式刀盘设计。刀盘外径 6 310 mm,使用 4 辐条设计构型,辐条与面板间采用 5 条环形加强筋连接强化,刀盘背面采用法兰盘结构与主驱动装备相连,传动力通过与法兰盘相连接的 4 根梯形截面中空牛腿传递。刀盘开口率 47%。

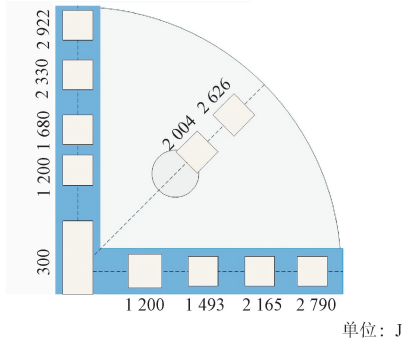
由于刀盘直径远大于厚度,因此将刀盘设计域模型简化为圆形板结构。刀盘设计边界条件如图 12 所示,橙色矩形区域为刀具布置位,蓝色十字区域为预设 4 辐条结构,刀具与辐条构型由设计者依据刀盘设计方法确定^[1],不参与优化设计。其他部分为刀盘设计域,用于布置刀盘加强筋结构,加强筋由大量矩形组件拼接而成,通过组件变形与组件间合并分离逐渐趋于最优构型。



(a)盾构机刀盘结构



(b)刀盘几何尺寸



(c)振动能量输入

图 12 刀盘结构设计边界条件
Fig. 12 Boundary condition of the cutterhead structure

假设刀盘与地层接触面各处的土质均匀一致,则各位置刀具振幅及所受支反力大小相同。然而,不同刀具所处位置到圆心距离存在差别,在刀盘每圈运动过程中,不同位置刀具刮研路程与刀具圆心距成正比。因此在相同时间内,考虑土质均匀一致条件,则刀具起伏振动周期数与刀具刮研路程正相关,即与刀具圆心距成正比。由于刀具对刀盘的振动能量输入为刀具受力与单位时间内起伏振动距离之积,因此刀具能量输入与刀具圆心距同样成正比。本案例能量输入即遵照上述分析,按比例加载在刀具区域。振动能量频率一般为 20~90 Hz,本案例选择 20、55、90 Hz 3 种载荷频率。

在以上边界条件及初始构型基础上,采用基于能量有限元的可移动可变形组件法进行刀盘结构的变异重构,其优化过程如图 13、14 所示。在 20、55、90 Hz 3 种载荷频率下,刀盘结构均由初始均匀交叉构型逐渐收敛至星形放射状,形成载荷区域与约束区域的直接连接。在图 14 所示的结构重组过程中,其开口率逐渐收敛至 47%,在 20、55、90 Hz 能量输入时,误差分别为-0.01%、0.07%、0.01%。能量柔度较初始构型分别下降 12.1%、12.5%、12.4%。

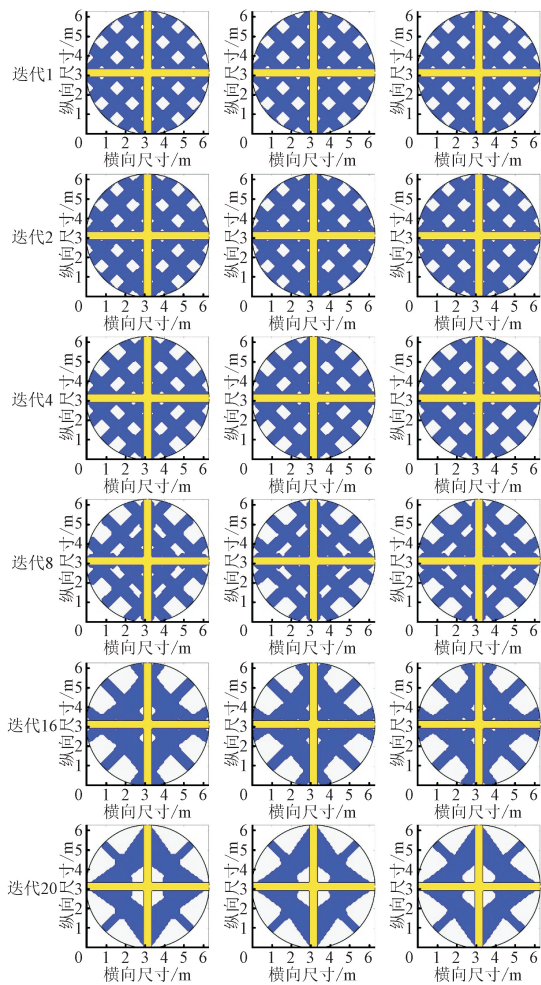
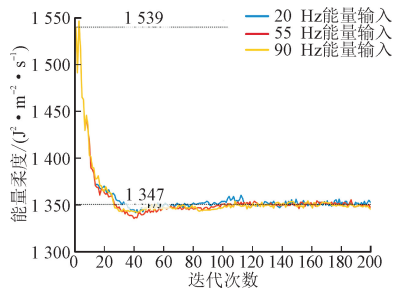
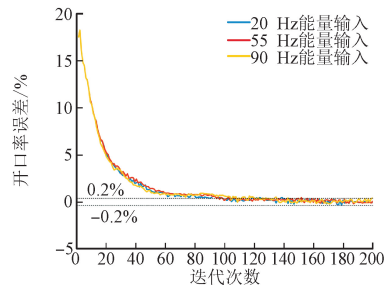


图 13 刀盘结构优化过程

Fig. 13 design process of the cutterhead optimization



(a)不同工况下优化迭代过程目标函数变化图



(b)不同工况下优化迭代过程约束函数变化图

图 14 优化结构能量柔度及开口率变化过程

Fig. 14 Variation of energy flexibility and opening ratio

对比兰州地铁 1 号线所使用的原始盾构机刀盘,其能量密度分析结果如图 15 所示。

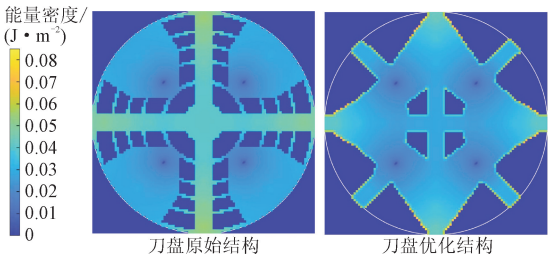


图 15 刀盘能量密度对比

Fig. 15 Comparison of cutterhead energy density

采用能量柔度计算公式

$$J = \sum e^e [F^e + Q^e] \quad (18)$$

其原始盾构机刀盘能量柔度为 $1\,729.7\text{ J}^2/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 优化后盾构机刀盘能量柔度为 $1\,348.4\text{ J}^2/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 其能量柔度降低 22.0% 。原始盾构机刀盘十字辐条区域能量耗散慢,累积量较大,优化后的刀盘振动能量耗散迅速,动力学性能有效提升。

为进一步验证优化设计结果有效性,借助 ANSYS Workbench 19.2 平台分别对刀盘原始结构和优化结构进行静力学数值分析和动力学数值分析。

首先,在 Static Structural 模块进行静力学分析,仿真边界条件如图 16 所示。采用相同网格划分方式对原始结构和优化结构构建网格,在相同载荷条件下,对比原始结构和优化结构的力学性能,仿真结果如图 17 所示。

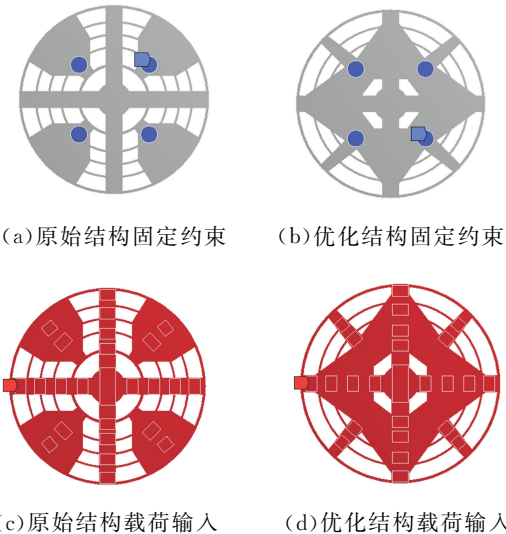


图 16 静力学分析边界条件

Fig. 16 Boundary conditions for statics analysis

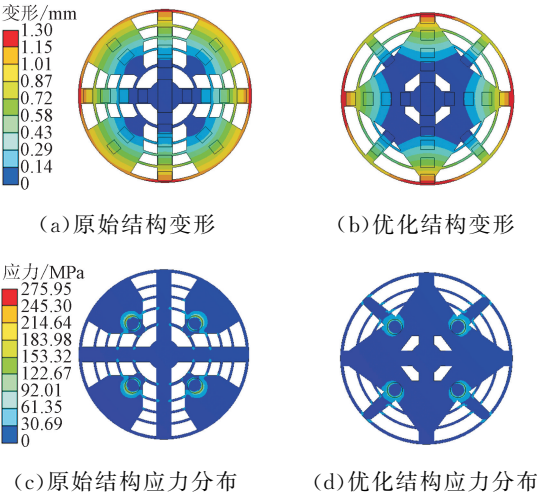


图 17 静力学分析结果
Fig. 17 Results of statics analysis

仿真结果显示,在 1 MPa 压力载荷条件下,原始结构和优化结构的最大变形相差较小,而原始结构的平均变形为 0.49 mm,最大应力为 275.95 MPa;优化结构的平均变形为 0.37 mm,最大应力为 161.86 MPa。优化结构的平均变形量比原始结构减小了 24.49%,最大应力降低了 41.34%,对比结果表明在相同载荷条件下,优化结构的静力学性能优于原始结构。

然后,在 Transient Structural 模块进行动力学分析。需要注意的是,前述设计过程中的能量载荷在 Transient Structural 模块中应做力载荷转化,前述能量输入与刀具圆心距位置成正比,这是由刀具振动频率不同所引发的,因此在 Transient Structural 模块中设定刀具振动频率和刀具圆心距成正比,分析边界条件如图 18 所示。

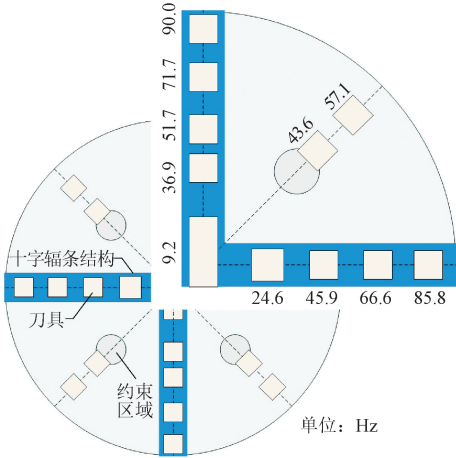


图 18 ANSYS 验证中所采用的边界条件
Fig. 18 Boundary conditions used in ANSYS verification

为保证对比结构的一致性,盾构机刀盘优化结构同样采用与原始结构相同的环形加强筋。其动响应对比结果如图 19 所示,刀盘优化结构质量较刀盘原始结构减少 1.1%,最大振动变形降低 7.8%,最小振动变形降低 27.7%。由于优化结构的载荷区域与约束区域连接路径较原始结构更宽大平直,更有利于刀盘振动能量的传递与耗散,因而优化结构的振动变形比原始结构的振动变形更小,图 19 所示振动变形分析结果更进一步说明优化结构的动力学性能更佳。

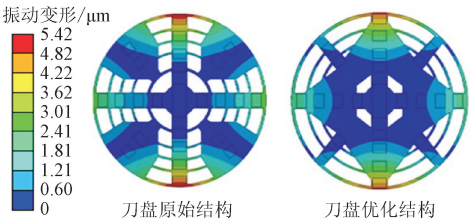
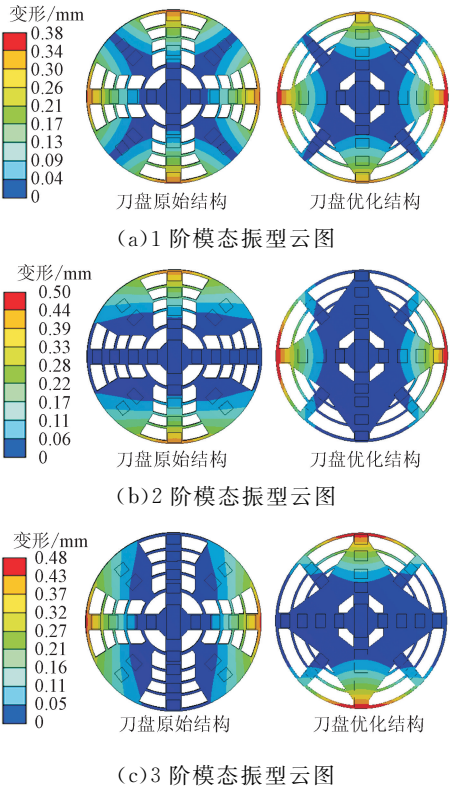


图 19 动响应对比分析
Fig. 19 Comparison of dynamic response

最后,在 Modal 模块对两种结构进行模态分析。模态分析中仅需给模型施加固定约束边界条件即可,原始结构和优化结构的固定约束边界条件施加方式依旧采取图 16(a)和图 16(b)所示方式,然后分别对两种结构进行模态分析。原始结构和优化结构的 1~6 阶固有频率如表 1 所示,前六阶振型云图两种结构的平均变形量如表 2 所示。



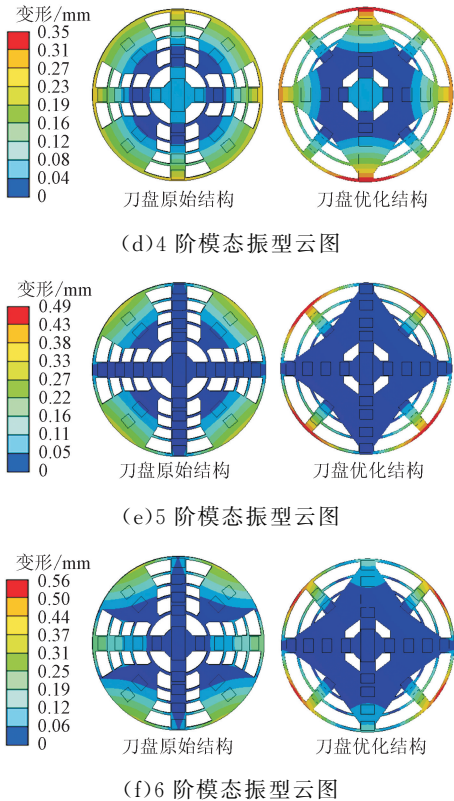


图 20 原始结构和优化结构的各阶振型云图

Fig. 20 Vibration clouds of each order for the original and optimized structures

表 1 原始结构和优化结构各阶固有频率

Table 1 Natural frequency for each order of the original and optimized structures

模态	固有频率/Hz	
	原始结构	优化结构
1 阶模态	85.39	88.85
2 阶模态	93.94	94.18
3 阶模态	94.00	95.27
4 阶模态	96.34	98.90
5 阶模态	109.77	129.59
6 阶模态	121.42	137.59

表 2 原始结构和优化结构的平均变形

Table 2 Average deformation of the original and optimized structures

模态	平均变形/mm	
	原始结构	优化结构
1 阶模态	0.092	0.086
2 阶模态	0.082	0.069
3 阶模态	0.082	0.071
4 阶模态	0.100	0.091
5 阶模态	0.084	0.065
6 阶模态	0.092	0.072

由模态分析结果可知,优化结构的各阶固有频率均高于原始结构,此外每一阶模态下的平均变形量均小于原始结构,说明优化后的结构具有较高的刚度性能。

综上,基于能量有限元的结构变异重构设计能够切实改善盾构机刀盘的力学性能,其方法有效性在能量视角下及经典力学视角下均得以验证。在盾构机刀盘设计过程中,往往还应该综合考虑诸如刀盘结构强度与刚度、刀具保护以及渣土排放等多种因素,故而在实际设计中还需要根据设计手册和经验方法等进行辅助设计与校核。本文所研究的以降低结构能量柔度为目标和以刀盘开口率为约束条件的刀盘优化结构相比于原始结构表现出良好的力学性能。这一研究工作可为以盾构机为代表的各类大尺寸振动结构设计提供一种新思路。

4 结 论

(1)本文以显式拓扑优化为基础工具,驱动盾构机刀盘承载架构的变异与重构,从而充分挖刀盘优化承载形态,拓宽了盾构机选型设计范围。

(2)本文从能量角度出发探索结构振动能量的引导与耗散实现途径,完善了相关分析计算设计框架,为盾构机结构力学设计提供了一种新思路。

(3)将该研究成果应用于土压平衡盾构机刀盘面板设计,优化结构的平均变形量比原始结构减小了 24.49%,最大应力降低了 41.34%,1~6 阶固有频率均得到提升,优化结构的动力学性能得到较好提升。

参考文献:

[1] 薛静. 基于参数化的盾构机复合式刀盘设计研究 [J]. 现代制造工程, 2022(11): 66-74.
XUE Jing. Research on compound cutterhead design of shield machine based on parameterization [J]. Modern Manufacturing Engineering, 2022(11): 66-74.
[2] 李帅远. 盾构机盘形滚刀破岩仿真及刀盘结构优化研究 [D]. 郑州: 郑州大学, 2020.
[3] 蒲亚平. 复合地层微型盾构机刀盘受力性状及布置优化 [J]. 华东交通大学学报, 2022, 39(3): 37-46.
PU Yaping. Mechanical property analysis and layout optimization of cutter-head of micro-shield machine in coastal composite stratum [J]. Journal of East China Jiaotong University, 2022, 39(3): 37-46.
[4] 韩伟锋, 李凤远, 周建军. 盾构刀盘有限元分析优化研究 [J]. 工程机械, 2014, 45(3): 31-36.

- HAN Weifeng, LI Fengyuan, ZHOU Jianjun. Finite element analysis and optimal research on shield cutter-head [J]. Construction Machinery and Equipment, 2014, 45(3): 31-36.
- [5] 李斌斌. 某型土压平衡式盾构机刀盘的力学分析与结构优化 [D]. 兰州: 兰州交通大学, 2017.
- [6] 周阳宗, 聂羽飞, 李杰, 等. 某型复合盾构刀盘的有限元静动态特性分析与优化 [J]. 现代隧道技术, 2015, 52(3): 144-149, 159.
- ZHOU Yangzong, NIE Yufei, LI Jie, et al. Static and dynamic FEM analyses and optimization of a mix-shield cutterhead [J]. Modern Tunnelling Technology, 2015, 52(3): 144-149, 159.
- [7] 霍军周, 蔡宝, 王亚杰, 等. 盾构机刀盘的力学分析与优化设计 [J]. 机械设计与制造, 2014(10): 57-60.
- HUO Junzhou, CAI Bao, WANG Yajie, et al. The mechanical analysis and optimal design support ribs of full-face TBM based on Dalian subway project [J]. Machinery Design & Manufacture, 2014(10): 57-60.
- [8] 敖日汗, 张义同. 盾构掘进中刀盘振动分析 [J]. 机械设计, 2010, 27(2): 27-29.
- AO Rihan, ZHANG Yitong. Analysis of cutter disc vibration in shield driving [J]. Journal of Machine Design, 2010, 27(2): 27-29.
- [9] 田继涛. 复合型土压平衡盾构机刀盘参数化辅助设计系统的研究与应用 [D]. 南京: 南京理工大学, 2019.
- [10] 解妙霞, 郭瑞峰, 李丽霞, 等. 能量有限元预示复合材料结构响应研究进展 [J]. 力学与实践, 2016, 38(4): 375-381.
- XIE Miaoxia, GUO Ruifeng, LI Lixia, et al. The energy finite element analysis for prediction of high frequency dynamic response of composite material structures [J]. Mechanics in Engineering, 2016, 38(4): 375-381.
- [11] LYON R H, MAIDANIK G. Power flow between linearly coupled oscillators [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1962, 34(5): 623-639.
- [12] RABCZUK T, BELYTSCHKO T. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(13): 2316-2343.
- [13] DONG Jun, CHOI K K, WANG Aimin, et al. Parametric design sensitivity analysis of high-frequency structural-acoustic problems using energy finite element method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 62(1): 83-121.
- [14] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Models of space-averaged energetics of plates [J]. AIAA Journal, 1992, 30(3): 616-623.
- [15] BOUTHIER O M, BERNHARD R J. Simple models of energy flow in vibrating membranes [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 182(1): 129-147.
- [16] AL BA'BA'A H, NOUH M. An investigation of vibrational power flow in one-dimensional dissipative phononic structures [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2017, 139(2): 021003.
- [17] NEFSKE D J, SUNG S H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams [J]. Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1989, 111(1): 94-100.
- [18] LASE Y, JEZEQUEL J. Analysis of a dynamic system based on a new energetic formulation[C]//International Congress on Intensity Techniques. Senlis, France, 1990.
- [19] SUN J C, LALOR N, RICHARDS E J. Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, I: theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 112(2): 321-330.
- [20] WOHLEVER J C, BERNHARD R J. Mechanical energy flow models of rods and beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 153(1): 1-19.
- [21] MOENS L, VANDEPITTE D, SAS P. Experimental validation of energy flow analysis on a two dimensional frame [EB/OL]. (1996-09-01) [2023-01-01]. <https://lirias.kuleuven.be/1747040?limo=0>.
- [22] HONG S Y, KWON H W, KIM J D. Car interior and exterior multi-domain noise analysis using energy flow analysis (EFA) software, NASEFAC++[C]//SAE 2007 Noise and Vibration Conference and Exhibition. Warrendale, PA, USA: SAE International, 2007: 2007-01-2174.
- [23] ABEYARATNE R, TRIANTAFYLIDIS N. An investigation of localization in a porous elastic material using homogenization theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(3): 481-486.
- [24] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224.
- [25] BENDSØE M P. Optimal shape design as a material distribution problem [J]. Structural Optimization, 1989, 1(4): 193-202.
- [26] WANG Fengwen, LAZAROV B S, SIGMUND O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization [J]. Structural and Mul-

- tidisciplinary Optimization, 2011, 43(6): 767-784.
- [27] OSHER S J, SANTOSA F. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I frequencies of a two-density inhomogeneous drum [J]. Journal of Computational Physics, 2001, 171(1): 272-288.
- [28] ZHANG Weisheng, LI Dong, YUAN Jie, et al. A new three-dimensional topology optimization method based on moving morphable components (MMCs) [J]. Computational Mechanics, 2017, 59(4): 647-665.
- [29] GUO Xu, ZHANG Weisheng, ZHONG Wenliang. Doing topology optimization explicitly and geometrically: a new moving morphable components based framework [J]. Journal of Applied Mechanics, 2014, 81(8): 081009.
- [30] ZHANG Weisheng, LIU Ying, DU Zongliang, et al. A moving morphable component based topology optimization approach for rib-stiffened structures considering buckling constraints [J]. Journal of Mechanical Design, 2018, 140(11): 111404.
- [31] 孙丽萍. 能量有限元法研究及其应用 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2004.
- [32] ZHANG Weisheng, YUAN Jie, ZHANG Jian, et al. A new topology optimization approach based on moving morphable components (MMC) and the ersatz material model [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(6): 1243-1260.

(编辑 亢列梅)