

双列圆锥滚子轴承拟静力学建模和刚度计算分析

张进华, 朱光浩, 黎铭, 洪军, 方斌

(西安交通大学现代设计与转子轴承系统教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对双列圆锥滚子轴承建模及求解过程复杂的问题,以切片法为基础,建立了双列圆锥滚子轴承的拟静力学模型,结合同伦-牛顿法,实现了对上述模型的求解,并针对不同工况条件下双列圆锥滚子轴承的刚度特性展开分析。分析结果表明:所建模型一定程度上克服了传统非线性迭代算法对初值的高依赖性;双列圆锥滚子轴承的刚度特性受轴承转速和预紧位移影响,在仅有预紧力的工况下,当转速从0增加到4 000 r/min时,轴承的径向、轴向刚度减小,当预紧位移从0.005 mm增加到0.015 mm时,径向、轴向刚度增加;当受轴向力且轴向力从10 kN增加到14 kN时,轴承径向、轴向刚度减小,当轴向力从14 kN增加到19 kN时,其径向、轴向刚度增加,转折点为第二列滚子与内滚道脱离点;增加转速时,出现脱离点所需的轴向力减小;增加预紧位移时,出现脱离点所需轴向力增加。

关键词: 双列圆锥滚子轴承;刚度特性;拟静力学模型;同伦-牛顿法

中图分类号: TH133.33 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202309011 **文章编号:** 0253-987X(2023)09-0098-11

Quasi-Static Modeling and Stiffness Calculation Analysis of Double Row Tapered Roller Bearings

ZHANG Jinhua, ZHU Guanghao, LI Ming, HONG Jun, FANG Bin

(Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The modeling and solving process of the double row tapered roller bearing is complex. To solve the problem, a quasi-static model of double row tapered roller bearings was established in the paper based on the slice method, and the solution of the model was realized by combining the homotopy algorithm and the Newton algorithm, which overcame the problem of the high dependence of the traditional nonlinear iterative algorithm on the initial value to a certain extent, and the stiffness characteristics of double row tapered roller bearings under different working conditions were analyzed. The calculation results show that the stiffness characteristics of double row tapered roller bearings are affected by bearing speed and preload displacement. Under the condition of only preload, the radial and axial stiffness of bearings decreases with the speed increasing from 0 r/min to 4 000 r/min, and increases with the preload displacement increasing from 0.005 mm to 0.015 mm. When the axial force increases from 10 kN to 14 kN, their radial and axial stiffness decreases, and when the axial force increases from 14 kN to 19 kN, their radial and

收稿日期: 2023-03-04。 作者简介: 张进华(1979—),男,教授;方斌(通信作者),男,助理教授。 基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2020YFB2009603);国家自然科学基金资金资助项目(52205281);中国博士后科学基金资助项目(2021M62551)。

网络出版时间: 2023-08-24

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20230823.1521.002.html>

axial stiffness increases, and the turning point is the separation point between the second row of rollers and the inner raceway. When the rotation speed increases, the axial force required to produce the separation point decreases, and when the preload displacement increases, the axial force required to produce the separation point increases.

Keywords: double row tapered roller bearings; stiffness characteristics; quasi-statics model; homotopy-Newton method

双列圆锥滚子轴承因其能同时承受径向、轴向及弯矩等多种载荷,且具有较高的刚度、承载能力及长寿命、高稳定性等优点而被广泛应用于风力发电、高铁等领域。由于圆锥滚子轴承内部结构及受力极为复杂,其受力与变形呈现出强非线性关系,因此双列圆锥滚子轴承的机械性能无法通过单列圆锥滚子轴承性能的简单线性叠加获得。可见,对双列圆锥滚子轴承的受力、刚度等特性进行单独建模分析是非常重要的^[1-3]。

早期的国外学者针对圆锥滚子轴承建立了不同的理论模型^[4-6],建立了滚动轴承分析的基础,但仍然存在精度不足等问题。Andréason^[7]基于矢量变换方法分析了低速圆锥滚子轴承内圈倾斜情况下的载荷分布及寿命特性,但忽略了惯性力的影响,因此无法适用于较高转速下的圆锥滚子轴承性能分析。Liu^[8]在 Andréason 的理论基础上,考虑离心力和陀螺力矩的影响,分析了复合载荷下转速、内圈倾斜角对轴承载荷分布和疲劳寿命的影响,但未对轴承的刚度特性进行分析。Lambert 等^[9-11]建立轴承模型分析过盈配合和间隙配合下轴承的刚度特性。Tong 等^[12-13]建立圆锥滚子轴承数学模型来分析制造、加载过程中产生的几何误差对轴承刚度、载荷的影响,及角度不对中对运行中的圆锥滚子轴承运行力矩的影响。此外,Tong 等^[14-15]还分别建立了有滚子直径误差的圆锥滚子轴承通用模型用于分析直径误差对轴承刚度、寿命的影响,并分析了滚子修形对轴承刚度的影响。Zhang 等^[16]建立滚子自转的仿真模型,分析滚子旋转对轴承润滑的影响。上述研究主要针对单列圆锥滚子进行建模分析,分别研究了复合载荷下,内圈倾斜、预紧等因素对轴承载荷分布、刚度、寿命的影响,为双列圆锥滚子建模提供了重要理论及模型基础。

近年来,双列圆锥滚子轴承逐步受到更多的关注。Becrea 等^[17]和 Nelias 等^[18]建立拟静力学模型分析游隙对双列圆锥滚子轴承的寿命的影响。Ai 等^[19]建立双列圆锥滚子轴承的热网络模型,结合轴承拟静力学模型,对不同工况下轴承热特性进行分

析。Yan 等^[20]建立双列圆锥滚子轴承的动力学模型,结合有限元方法对轴承热特性进行研究。Yang 等^[21]建立三自由度轴承模型,将角度偏差作为输入参数,分析了角度偏差对轴承寿命的影响。Zheng 等^[22]建立轴承拟静力学模型,分析了震荡载荷下轴承的寿命特性。综上所述,虽然近年来关于双列圆锥滚子轴承建模及性能分析的研究较多,但是对轴承刚度的研究较少。例如,对于双列圆锥滚子轴承,为进一步提供其寿命及承载能力,一般需要对其施加一定的预紧力,而关于预紧力对轴承刚度影响研究却很少。Xu 等^[23]建立双列球轴承模型,分析内圈不对中对轴承刚度的影响。Fang 等^[24-25]建立球轴承模型及刚度矩阵计算的数学方法,对球轴承在不同工况下的刚度特性进行了分析。研究表明,其刚度不仅存在明显的非线性现象,而且随着转速的增加表现出明显的“刚度软化”现象,而关于双列圆锥滚子轴承非线性刚度特性及软化行为的研究却鲜有报道。Zhang 等^[26]提出一种计算双列圆锥滚子轴承刚度的方法,并建立有限元模型对不同工况的刚度特性进行分析,但其采用牛顿-拉夫逊迭代法求解,求解效率及收敛性很大程度上依赖于迭代初值的选择。因此,有必要针对双列圆锥滚子轴承建模、求解方法及其刚度特性展开全面的研究。

本文在 Liu^[8]圆锥滚子轴承模型基础上,进一步构建双列圆锥滚子轴承模型,并将同伦延拓方法引入到非线性方程组的求解过程中,有效避免了传统牛顿-拉夫逊方法对于初值的高依赖性以及算法的稳定性问题。在上述模型的基础上,研究不同预紧位移、转速情况下,随轴向载荷的增加时,轴承的径向、轴向刚度的变化规律。

1 双列圆锥滚子轴承拟静力学模型

图 1 为双列圆锥滚子轴承几何特征。图中, R_s 为滚子大端弧面直径,mm; α 为滚子外圈接触角, $(^\circ)$; β 为滚子内圈接触角, $(^\circ)$; γ 为滚子轴线与轴承轴线夹角, $(^\circ)$; ρ_i 为滚子上任意点 ζ 轴到内滚道接触点的距离,mm; ρ_o 为滚子上任意点 ζ 轴到外滚道

接触点的距离,mm; r_m 为滚子大端中心到轴承轴线的距离,mm; r_n 为滚子大端中心到轴承两列中心线的距离,mm; l_a 为滚子有效接触长度,mm; ζ_o 为滚子上任意点到 ξ 轴的距离,mm; ν 为挡边角,($^\circ$); λ 为滚子大端圆弧半角,($^\circ$)。分析如图1所示的“背对背”式结构的双列圆锥滚子轴承几何特征剖面图,首先建立如图2所示的4种坐标系。引入第一坐标系(xyz),如图3所示,其中 z 轴为轴承的旋转中心线, x 轴以滚子相位 0° 处为正方向, y 轴以滚子相位 90° 处为正方向。设定轴承内圈旋转,外圈固定不动,第一坐标系相对于轴承外圈固定不动。

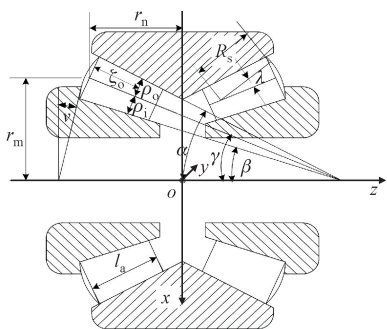


图1 双列圆锥滚子轴承几何特征

Fig.1 Geometric feature diagram of double-row tapered roller bearings

引入第二坐标系($x_2y_2z_2$),变形前第二坐标系和第一坐标系的坐标原点和坐标轴方向相同,但第二坐标系相对于轴承内圈固定,随着内圈歪斜变形而改变,变形后坐标系位置如图2所示。图中, δ_x 为轴承内圈沿 x 轴的平动位移,mm; δ_z 为轴承内圈沿 z 轴的平动位移,mm; γ_y 为轴承内圈绕 y 轴的转角位移,($^\circ$); u_ξ 为滚子大端中心沿 ξ 轴的平动位移,mm; u_ζ 为滚子大端中心沿 ζ 轴的平动位移,mm; φ_η 为滚子大端中心绕 η 轴的转角位移,($^\circ$)。

如图2所示,在滚子的大端面中心设定第三坐标系($\xi\eta\zeta$),其中 ξ 轴垂直于滚子中心线, ζ 轴沿滚子轴线方向, η 轴垂直于 xz 平面,第三坐标系相对于第一坐标系固定。

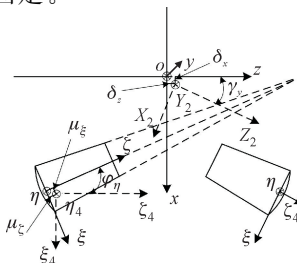


图2 不同坐标系位置图

Fig.2 Different coordinate system location

引入第四坐标系($\xi_4\eta_4\zeta_4$),未发生变形时,第四坐标系与第三坐标系的坐标原点和坐标轴方向相同,但第四坐标系相对于滚子固定,随滚子歪斜变形改变,变形后坐标系位置如图2所示。

图3所示,当轴承承受外载荷向量 $\mathbf{F} = (F_x \ F_z \ M_y)$ 时,轴承内圈将会沿 x 轴、 z 轴发生 δ_x 、 δ_z 的形变,绕 y 轴发生 γ_y 度的偏斜。滚子大端中心将沿 ξ 轴、 ζ 轴发生 u_ξ 、 u_ζ 的形变以及绕 η 轴发生 φ_η 度的偏斜。

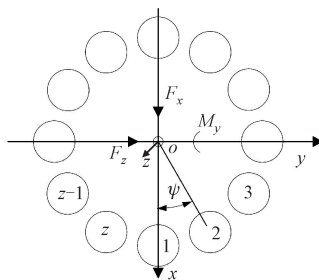


图3 轴承载荷施加和滚子相位图

Fig.3 Bearing load application and roller phase

1.1 外圈和滚子接触

如图1所示,未发生变形时,假定滚子和外滚道接触,第三坐标系中,在距离 ξ 轴 ζ_o 长度时, ζ 轴到外滚道接触点的距离为 ρ_o , $\rho_o(\zeta_o)$ 是关于长度 ζ_o 的一次函数;如图4所示,在第四坐标系中,当距离 ξ 轴 ζ_{ro} 长度时, ζ 轴到外滚道接触点的距离为 ρ_{ro} , $\rho_{ro}(\zeta_{ro})$ 是关于长度 ζ_{ro} 的一次函数。在第三坐标系下,假设位于外圈上外滚道和滚子表面接触点的向量为 $[\mathbf{r}_o]_k^3$ 。在第四坐标系下,假设位于滚子上外滚道和滚子表面接触点向量为 $[\mathbf{r}_{ro}]_k^4$ 。二者可以表示为

$$[\mathbf{r}_o]_k^3 = [\rho_o(\zeta_o) \ 0 \ \zeta_o]^3 \quad (1)$$

$$[\mathbf{r}_{ro}]_k^4 = [\rho_{ro}(\zeta_{ro}) \ 0 \ \pm \zeta_{ro}]^4 \quad (2)$$

式中: k 表示轴承的列数, $k=1$ 表示轴承左列, $k=2$ 表示轴承右列,下同;下标 o 表示外圈;下标 r 表示滚子;上标表示向量所处的坐标系,下同。式(2)中,由于左右两列滚子的第三和第四坐标系的方向不同,故 $k=1$ 取正号, $k=2$ 取负号。

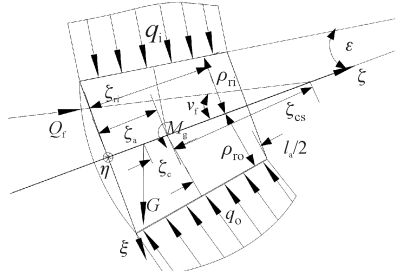


图4 单个滚子受力分析图

Fig.4 Single roller load analysis diagram

第三坐标系可以通过第一坐标系绕 z 轴旋转 ψ 度(如图3所示),绕 y 轴旋转 γ 度以及在 x, y, z 方向移动 $[\mathbf{r}_c]_k^1$ 得到。因此,外圈上接触点变形向量 $[\mathbf{r}_o]_k^3$ 可以在第一坐标系中表示为 $[\mathbf{r}'_o]_k^1$, 公式为

$$[\mathbf{r}'_o]_k^1 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\Psi]_k [\mathbf{r}_o]_k^3 \quad (3)$$

$$[\mathbf{r}_c]_k^1 = [r_m \cos \psi \quad r_m \sin \psi \quad \mp r_n]^1 \quad (4)$$

式中: $k=1$ 时, r_n 取负, $k=2$ 时, r_n 取正; ψ 代表滚子相位角; r_m 代表滚子大端中心到轴承轴线的距离, r_n 代表滚子大端中心到轴承两列中心线的距离, 计算公式为

$$r_m = D_w \sin \gamma / (2 \tan \epsilon) \quad (5)$$

$$r_n = l_n / 2 + \zeta_a \cos \gamma \quad (6)$$

其中, D_w 代表滚子大端直径, 滚子轴向和轴承轴线夹角 $\gamma = (\alpha + \beta) / 2$, α 代表滚子外圈延长线与轴承轴线夹角, β 代表滚子内圈延长线与轴承轴线夹角, $\epsilon = (\alpha - \beta) / 2$, l_n 代表两滚子质心距离, $[\Psi]_k$ 代表第三坐标系到第一坐标系的转换矩阵, 公式为

$$[\Psi]_k = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \pm \gamma & -\sin \psi & -\cos \psi \sin \pm \gamma \\ \sin \psi \cos \pm \gamma & \cos \psi & -\sin \psi \sin \pm \gamma \\ \sin \pm \gamma & 0 & \cos \pm \gamma \end{bmatrix} \quad (7)$$

滚子几何中心到滚子大端的距离为

$$\zeta_a = l_n \cos \epsilon / 2 + (D_w + d_w) \tan \epsilon / 4 \quad (8)$$

式中: l_a 代表滚子有效接触长度; d_w 代表滚子小端直径。

式中: $k=1$ 时, γ 取正, $k=2$ 时, γ 取负。

当滚子上接触点发生变形时, 第四坐标系中向量 $[\mathbf{r}_{ro}]_k^4$ 可以在第三坐标系中表示为 $[\mathbf{r}'_{ro}]_k^3$, 可表示为

$$[\mathbf{r}'_{ro}]_k^3 = [\mathbf{u}]^3 + [\mathbf{f}] [\mathbf{r}_{ro}]_k^4 \quad (9)$$

式中: $[\mathbf{u}]^3$ 代表滚子形变; $[\mathbf{f}]$ 代表第四坐标系到第三坐标系的转换矩阵。表示为

$$[\mathbf{u}]^3 = [u_\xi \quad 0 \quad u_\zeta]^3 \quad (10)$$

$$[\mathbf{f}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_\eta & 0 & \sin \varphi_\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_\eta & 0 & \cos \varphi_\eta \end{bmatrix} \quad (11)$$

向量 $[\mathbf{r}'_{ro}]_k^3$ 可以在第一坐标系中表示为 $[\mathbf{r}''_{ro}]_k^1$

$$[\mathbf{r}''_{ro}]_k^1 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\Psi]_k [\mathbf{r}'_{ro}]_k^3 \quad (12)$$

如图5(a)所示, 发生变形后, 假定接触点在滚子上的位置, 通过接触变形必须垂直于接触表面这一条件, 则可确定该接触点在外圈上的对应位置为

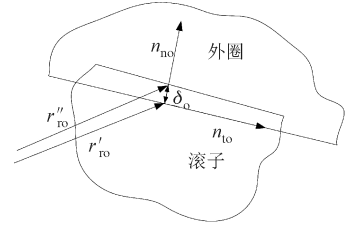
$$([\mathbf{r}''_{ro}]_k^1 - [\mathbf{r}'_o]_k^1) [\mathbf{n}_{to}]_k^1 = 0 \quad (13)$$

式中: $[\mathbf{n}_{to}]_k^1$ 代表接触点外滚道上单位切向量。

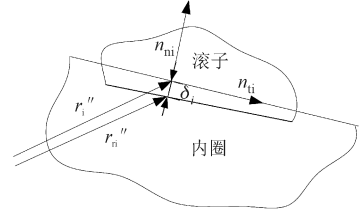
变形发生后, 对于给定的 ζ_r 值, 可以确定的 $\rho_r(\zeta_r)$ 值, 根据式(13)得到对应的 ζ_o 和 $\rho_o(\zeta_o)$ 值。则接触变形 δ_o 可以表示为

$$\delta_o = ([\mathbf{r}''_{ro}]_k^1 - [\mathbf{r}'_o]_k^1) [\mathbf{n}_{no}]_k^1 \quad (14)$$

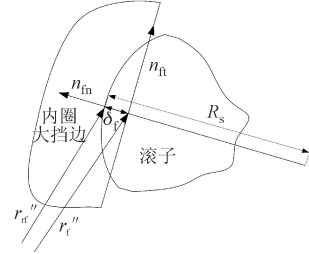
式中: $[\mathbf{n}_{no}]_k^1$ 代表垂直于接触点外滚道单位法向量。



(a) 滚子和外圈接触



(b) 滚子和内圈接触



(c) 滚子和内圈挡边接触

图5 滚子和外圈、内圈、内圈挡边接触示意图

Fig. 5 Diagram of contact between roller and outer ring, inner ring and inner ring flange

1.2 内圈和滚子接触

滚子未发生变形时, 位于内圈上滚子和内滚道接触点向量 $[\mathbf{r}_i]_k^3$ 在第三坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}_i]_k^3 = [\rho_i(\zeta_i) \quad 0 \quad \zeta_i]^3 \quad (15)$$

在内圈发生变形之前, 此时第一坐标系和第二坐标系重合, 向量 $[\mathbf{r}_i]_k^3$ 在第二坐标系中表示为 $[\mathbf{r}'_i]_k^2$

$$[\mathbf{r}'_i]_k^2 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\Psi]_k [\mathbf{r}_i]_k^3 \quad (16)$$

当轴承内圈沿 X 轴、 Z 轴产生 δ_x 、 δ_z 的形变及绕 Y 轴产生 γ_y 度的偏斜, 此时第一坐标系和第二坐标系不重合, 则 $[\mathbf{r}'_i]_k^2$ 可以在第一坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}''_i]_k^1 = [\delta]^1 + [\Gamma] [\mathbf{r}'_i]_k^2 \quad (17)$$

式中: $[\delta]^1$ 代表内圈形变; $[\Gamma]$ 代表第二坐标系到第一坐标系的转换矩阵。表示为

$$[\delta]^1 = [\delta_x \quad 0 \quad \delta_z]^1 \quad (18)$$

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos \gamma_y & 0 & \sin \gamma_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma_y & 0 & \cos \gamma_y \end{bmatrix} \quad (19)$$

未发生变形时,位于滚子上滚子和内滚道接触点向量 $[\mathbf{r}_{ri}]_k^4$ 在第四坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}_{ri}]_k^4 = [-\rho_{ri}(\zeta_{ri}) \quad 0 \quad \pm \zeta_{ri}]^4 \quad (20)$$

式中: $k=1$ 取正号, $k=2$ 取负号。

向量 $[\mathbf{r}_{ri}]_k^4$ 在第三坐标系中表示为 $[\mathbf{r}'_{ri}]_k^3$

$$[\mathbf{r}'_{ri}]_k^3 = [\mathbf{u}]^3 + [\mathbf{f}][\mathbf{r}_{ri}]_k^4 \quad (21)$$

向量 $[\mathbf{r}'_{ri}]_k^3$ 在第一坐标系中表示为 $[\mathbf{r}''_{ri}]_k^1$

$$[\mathbf{r}''_{ri}]_k^1 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\mathbf{\Psi}]_k[\mathbf{r}'_{ri}]_k^3 \quad (22)$$

如图5(b)所示,发生变形后,假定接触点在滚子上的位置,通过接触变形必须垂直于接触表面这一条件,则可确定该接触点在内圈上的对应位置为

$$([\mathbf{r}''_{ri}]_k^1 - [\mathbf{r}''_{ri}]_k^1)[\mathbf{n}_{ti}]_k^1 = 0 \quad (23)$$

式中: $[\mathbf{n}_{ti}]_k^1$ 代表接触点处内圈上单位切向量。

发生变形后,对给定的 ζ_{ri} 值可以求得 $\rho_{ri}(\zeta_{ri})$ 的值,根据式(23)可以求得对应的 ζ_i 和 $\rho_r(\zeta_i)$ 值。接触变形 δ_i 可以表示为

$$\delta_i = ([\mathbf{r}''_{ri}]_k^1 - [\mathbf{r}''_{ri}]_k^1)[\mathbf{n}_{ni}]_k^1 \quad (24)$$

式中: $[\mathbf{n}_{ni}]_k^1$ 代表接触点单位法向量。

1.3 内圈大挡边和滚子大端接触

在滚子发生变形前,滚子大端和内圈大挡边之间存在接触,则在第三坐标系中,内圈挡边上接触点位置向量 $[\mathbf{r}_f]_k^3$ 可以表示为

$$[\mathbf{r}_f]_k^3 =$$

$$[-R_s \sin(\gamma - v) \quad 0 \quad \pm (R_s \cos \lambda - R_s \cos(\gamma - v))]^3 \quad (25)$$

式中: $k=1$ 取正号, $k=2$ 取负号; R_s 代表滚子大端半径; v 代表挡边角; λ 代表滚子大端圆弧半角, $\lambda = \arcsin[D_w/(2R_s)]$ 。

未发生变形前,向量 $[\mathbf{r}_f]_k^3$ 在第二坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}'_f]_k^2 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\mathbf{\Psi}]_k[\mathbf{r}_f]_k^3 \quad (26)$$

当轴承受载,会产生变形,接触点位置发生改变。假设接触点在内圈挡边的切线方向上产生 ΔF 的变形,则 $[\mathbf{r}'_f]_k^2$ 发生变化,表示为

$$[\mathbf{r}'_f]_k^2 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\mathbf{\Psi}]_k[\mathbf{r}_f]_k^3 + (\Delta F \cos v \cos \psi \quad \Delta F \cos v \sin \psi \quad \pm \Delta F \sin v) \quad (27)$$

式中: $k=1$ 取正号, $k=2$ 取负号。

产生变形后,向量 $[\mathbf{r}'_f]_k^2$ 在第一坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}''_f]_k^1 = [\mathbf{\delta}]^1 + [\mathbf{I}][\mathbf{r}'_f]_k^2 \quad (28)$$

滚子大端面上接触点位置向量 $[\mathbf{r}_{rf}]_k^4$ 在第四坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}_{rf}]_k^4 = [-R_s \sin v_i \quad 0 \quad \pm (R_s \cos \lambda - R_s \cos v_i)]^4 \quad (29)$$

式中: $k=1$ 取正号, $k=2$ 取负号; v_i 为接触点和滚子轴线夹角 $v_i = \gamma - v \mp \varphi_\gamma$; $k=1$ 取负, $k=2$ 取正。

内圈变形后,向量 $[\mathbf{r}_{rf}]_k^4$ 向量在第三坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}'_{rf}]_k^3 = [\mathbf{u}]^3 + [\mathbf{f}][\mathbf{r}_{rf}]_k^4 \quad (30)$$

向量 $[\mathbf{r}'_{rf}]_k^3$ 在第一坐标系中表示为

$$[\mathbf{r}''_{rf}]_k^1 = [\mathbf{r}_c]_k^1 + [\mathbf{\Psi}]_k[\mathbf{r}'_{rf}]_k^3 \quad (31)$$

通过接触变形必须垂直于接触表面这一条件计算 ΔF

$$([\mathbf{r}''_{rf}]_k^1 - [\mathbf{r}''_{rf}]_k^1)[\mathbf{n}_{fi}]_k^1 = 0 \quad (32)$$

接触变形 δ_i 可以表示为

$$\delta_i = ([\mathbf{r}''_{rf}]_k^1 - [\mathbf{r}''_{rf}]_k^1)[\mathbf{n}_{fi}]_k^1 \quad (33)$$

1.4 接触力和接触变形

对于滚子和滚道接触的载荷变形关系,Palmgren^[4]提出以下变形公式

$$\delta = 3.84 \times 10^{-5} Q^{0.9} / l_a^{0.8} \quad (34)$$

式中: δ 代表接触变形; Q 代表接触载荷; l_a 为接触长度。

考虑到载荷求解的精确性,将接触长度划分为 n 份切片,每个切片长度 w ,则接触长度 $l_a = nw$ 。令 $q = Q/l_a$,则式(34)可变形为

$$\begin{cases} q_n = \delta_n / [1.24 \times 10^{-5} (nw)^{0.11}], & \delta_n > 0 \\ q_n = 0, & \delta_n \leq 0 \end{cases} \quad (35)$$

式中: δ_n 代表切片接触变形; q_n 为第 n 个切片的接触载荷。

内圈大挡边和滚子大端面接触为赫兹点接触,根据文献[19]得到滚子大端面和内圈大挡边接触力

$$Q_f = \frac{\pi E' k_o}{3} \sqrt{2 \epsilon_f R (\delta_f / T)^3} \quad (36)$$

式中: E' 代表大挡边当量弹性模量, $E' = 1 / ((1 - v_{\Pi}^2) / E_f + (1 - v_r^2) / E_r)$; v_{Π} 、 v_r 、 E_r 、 E_f 分别代表内圈大挡边和滚子的泊松比和弹性模量; $k_o = 1.0339 (R_\eta / R_\xi)^{0.636}$, R_η 、 R_ξ 分别代表滚子和内圈大挡边处等效曲率半径

$$\begin{cases} 1/R_\eta = 1/R_s \\ 1/R_\xi = 1/R_s + 1 / [(r_m - D_w \cos \gamma + h_f \cos v) / \sin v] \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} R = R_\eta R_\xi / (R_\eta + R_\xi) \\ \epsilon_f = 1.0003 + 0.5968 R_\xi / R_\eta \\ T = 1.5277 + 0.6023 \ln(R_\eta / R_\xi) \end{cases} \quad (38)$$

其中, $h_f = D_w / 2 - R_s \sin(\gamma - v)$ 。

1.5 离心力和陀螺力矩

假定轴承在运动过程中,滚子和滚道之间存在纯滚动,即两个物体在接触处表面速度相等。轴承

内圈以 ω_i 角速度转动,外圈保持固定。滚动体的公转角速度(ω_c)和自转角速度(ω_R)分别为^[4]

$$\omega_c = \omega_i [d_m - (D_w + d_w) \cos((\alpha + \beta)/2)/2] / d_m \quad (39)$$

$$\omega_R = \frac{d_m}{D_w + d_w} \left(1 - \left(\frac{(D_w + d_w) \cos[(\alpha + \beta)/2]/2}{d_m} \right)^2 \right) \omega_i \quad (40)$$

式中 d_m 代表节圆直径。

离心力可以表示为^[4]

$$F_c = d_m m \omega_c^2 / 2 \quad (41)$$

式中: m 代表滚子质量。

$$m = \frac{1}{3} \rho \pi h \left(\left(\frac{d_w}{2} \right)^2 + \frac{D_w}{2} \frac{d_w}{2} + \left(\frac{D_w}{2} \right)^2 \right) \quad (42)$$

式中: h 代表滚子轴线长度; ρ 代表材料密度。

陀螺力矩表示为^[4]

$$M_g = J \omega_c \omega_R \sin[(\alpha + \beta)/2] \quad (43)$$

式中: J 代表转动惯量。

根据文献[20]可得

$$J = \frac{\rho \pi}{4 \tan^3 \epsilon} [((D_w/2)^5 - (d_w/2)^5) (\tan^2 \epsilon + 4)/5 - d_w ((D_w/2)^4 - (d_w/2)^4) + d_w^2 ((D_w/2)^3 - (d_w/2)^3)/3] - m(\zeta_c + h/2)^2 \quad (44)$$

式中: $\zeta_c = \zeta_a - 5h/12$, 如图4所示。

1.6 平衡方程

在本文的拟静力学模型中,忽略保持架和滚动接触中的摩擦力的影响。对于单个滚子,内圈变形后滚子发生3个自由度(u_ξ 、 u_ζ 、 φ_γ)的变形,单个滚子的局部平衡方程为

$$\left(\int_0^{l_a} q_i d\zeta_i - \int_0^{l_a} q_o d\zeta_o \right) \cos \epsilon + Q_i \sin v_i + F_c \cos(\gamma - \varphi_\gamma) = 0 \quad (45)$$

$$\left(\int_0^{l_a} q_i d\zeta_i + \int_0^{l_a} q_o d\zeta_o \right) \sin \epsilon - Q_i \cos v_i + F_c \sin(\gamma - \varphi_\gamma) = 0 \quad (46)$$

$$M_g + \left(\int_0^{l_a} q_i [(\zeta_a - \zeta_i) \cos \epsilon + \rho_r \sin \epsilon] d\zeta_i \right) \cos \epsilon - \left(\int_0^{l_a} q_o [(\zeta_a - \zeta_o) \cos \epsilon + \rho_r \sin \epsilon] d\zeta_o \right) - Q_i \zeta_{cs} \sin v_i + F_c \zeta_c \cos(\gamma - \varphi_\gamma) = 0 \quad (47)$$

式中: $\zeta_{cs} = R_s \cos \lambda - \frac{l_a}{2} \cos \epsilon + \frac{D_w + d_w}{4} \tan \epsilon$ 。

在得到各个滚子切片的接触力后可以得到轴承平衡方程为

$$\begin{cases} F_r - \sum_{j=1}^z Q_{ro1j} - \sum_{j=1}^z Q_{ro2j} = 0 \\ F_a - \sum_{j=1}^z Q_{ao1j} + \sum_{j=1}^z Q_{ao2j} = 0 \\ M - \sum_{j=1}^z M_{r1j} + \sum_{j=1}^z M_{r2j} = 0 \end{cases} \quad (48)$$

式中: $Q_{rok} = \int_0^{l_a} q_{ok} d\zeta_o \cos \alpha \cos \varphi$ 代表单滚子径向载荷;

$Q_{aok} = \int_0^{l_a} q_{ok} d\zeta_o \sin \alpha$ 代表单滚子轴向载荷。

单滚子倾覆力矩为

$$M_{rk} = \int_0^{l_a} [q_{ok} \sin \alpha (r_m + \rho_o \cos \gamma \mp \zeta_o \sin \gamma) + q_{ok} \cos \alpha (r_n - \rho_o \sin \gamma \mp \zeta_o \cos \gamma)] \cos \varphi d\zeta_o \quad (49)$$

式中: $k=1$ 取负号, $k=2$ 取正号; F_r 、 F_a 、 M 代表3个方向的外载荷。

联立式(43)~(45),构建成 $3+2 \times 3Z$ 个非线性方程组。双列圆锥滚子轴承滚子数相较于一般轴承滚子数成双倍增加,有利于减少单个滚子的接触载荷,提高轴承寿命和承载能力,但求解规模巨大,求解难度增加。

2 同伦-牛顿法模型求解

对于一般的非线性方程组,通常采用 Newton-Raphson 迭代算法进行直接求解,而 Newton-Raphson 算法对迭代初值依赖性高,不合适的初值选取将导致算法的收敛性及收敛效率下降,因此确定迭代初值的范围是至关重要的。本文选用同伦-牛顿法扩大非线性方程组的迭代初值选择范围。

在数学中,对于任意给定的两个实函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 通过下式构建两者的联系。设 $t \in [0, 1]$, 构造如下的实函数

$$H(x, t) = \tan x + (1 - t)f(x) \quad (50)$$

式中 t 为嵌入变量。可以得到,当 $t=0$ 时, $H(x, 0) = f(x)$; 当 $t=1$ 时, $H(x, 1) = g(x)$ 。当嵌入变量 t 从0增加到1时,函数 $H(x, t)$ 从 $f(x)$ 连续变化到 $g(x)$ 。因此,函数 $H(x, t)$ 建立起了 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的联系,在拓扑理论中,这种连续的变化称为同伦。

将牛顿迭代法和同伦思想结合,以1.6节中 $3+2 \times 3Z$ 阶非线性方程组 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为例,构造同伦算子

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - t)\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (51)$$

式中, $\mathbf{x}$ 为代入非线性方程组的一组解向量,令 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$=F(x)-F(x_0)$),其中 x_0 为迭代初始向量,则 $H(x,t)$ 可以表示为

$$H(x,t)=F(x)+(t-1)F(x_0) \tag{52}$$

当嵌入变量 t 从 0 增加到 1,对 $H(x,t)$ 进行牛顿拉夫森迭代

$$x^{m+1}=x^m-[H'(x^m,t)]^{-1}H(x^m,t) \tag{53}$$

式中: $H'(x^m,t)$ 代表方程的雅克比矩阵。

如图 6 所示,同伦-牛顿迭代算法步骤如下:

(1)初始设置嵌入变量为 1,将预估初值和轴承基本参数代入式(43)~(46),进行 Newton-Raphson 迭代,计算迭代后的解向量和迭代前解向量的二范数。

(2)通过二范数判断两次解向量的接近程度,若 2 范数不满足小于零的条件,则将嵌入变量的值缩小,本文选择单次缩小 0.1,在保证嵌入变量为正的前提下,找到满足求解 $F(x)$ 的最小嵌入变量。

(3)当 2 范数满足条件后,判断当前解向量对应函数值是否满足设定误差,不满足则继续迭代,直至满足迭代误差。

(4)判定嵌入变量是否为 1:若不为 1,则增加嵌入变量的值,继续上述步骤;若为 1 则输出解向量,此解向量为 $F(x)$ 的解。

通过同伦-牛顿法扩大了拟静力学的迭代初值搜索范围,克服了传统牛顿法对初值的强依赖性。

3 刚度模型求解

根据多自由度非线性系统的刚度定义,轴承的刚度可以表示为轴承所受外载荷矢量 $F=(F_x \ F_z \ M_y)$ 对内圈位移矢量 $\delta=(\delta_x \ \delta_z \ \gamma_y)$ 的偏微分计算。因此双列圆锥滚子轴承的刚度矩阵可以表示为

$$K=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial z} & \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial z} & \frac{\partial M}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$K=\sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^z\begin{bmatrix} \frac{\partial F_{xjk}}{\partial x} & \frac{\partial F_{xjk}}{\partial z} & \frac{\partial F_{xjk}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_{zjk}}{\partial x} & \frac{\partial F_{zjk}}{\partial z} & \frac{\partial F_{zjk}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial M_{jk}}{\partial x} & \frac{\partial M_{jk}}{\partial z} & \frac{\partial M_{jk}}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \tag{55}$$

式中: $F_{xjk}=f(x,z,\varphi,\xi,\zeta,\eta)$; k 代表轴承列数; j 代表滚子数。

以 F_{xjk} 为例, F_{xjk} 代表单个滚子所承受的外力,是包含 6 个未知量的方程。根据刚度定义考虑对内圈变形的偏导,构建滚子变形和内圈变形的关系。假设滚子变形是内圈变形的函数,如 $\xi=f(x,z,\varphi)$,从而根据隐函数链式求导法则得到

$$\frac{\partial F_{xjk}}{\partial x}=\frac{dF_{xjk}}{dx}+\frac{\partial F_{xjk}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial F_{xjk}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial F_{xjk}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{56}$$

以 $\partial \xi / \partial x$ 为例

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=-\frac{1}{J}\left|\frac{\partial (F_1,F_2,F_3)}{\partial (x,\zeta,\eta)}\right| \tag{57}$$

式中: $F_1、F_2、F_3$ 代表式(45)、(46)、(47); J 代表行列式, $J=\left|\frac{\partial (F_1,F_2,F_3)}{\partial (\xi,\zeta,\eta)}\right|$ 。

4 案例分析

在上述模型的基础上,以两种型号的双列圆锥滚子轴承为例,对不同工况下双列圆锥滚子轴承的刚度特性进行分析,轴承 1 型号为 352226,轴承 2 结构参数来自文献[27],详细参数见表 1。

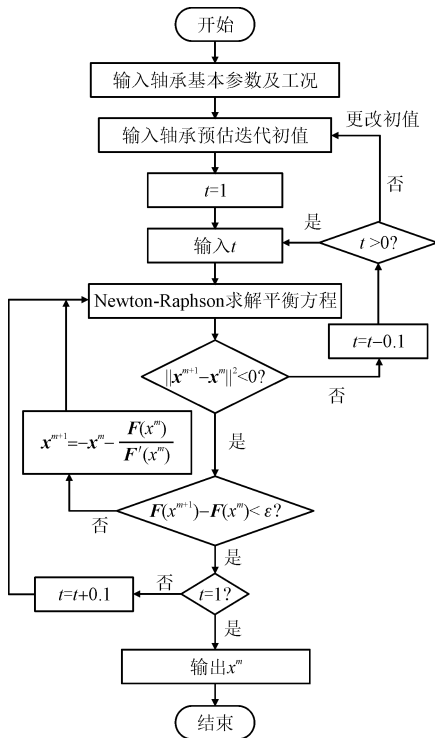


图 6 双列圆锥滚子轴承同伦-牛顿迭代算法设计流程

Fig. 6 Homotopy-Newton iterative algorithm design for double-row tapered roller bearings

表 1 双列圆锥滚子轴承主要参数

Table 1 Main parameters of double row tapered roller bearing

参数	轴承 1	轴承 2
单列滚子个数 Z	21	39
滚子-外滚道接触角 $\alpha_o/(^\circ)$	10	15.11
滚子-内滚道接触角 $\alpha_i/(^\circ)$	7.8	11.11
滚子-挡边接触角 $\nu/(^\circ)$	8.1	11.65
滚子大端直径 D_w/mm	24	17.56
滚子小端直径 d_w/mm	20.4	16.15
滚子有效长度 l_n/mm	47.7	18.97
轴承节圆直径 d_m/mm	179	155
两列滚子质心距离 l_n/mm	77	40
弹性模量 $E/(10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1})$	2.06	2.06
泊松比	0.3	0.3

4.1 模型对比验证

首先,验证本文提出的模型的准确性,以轴承 1 为例,分别把本文模型的刚度计算结果和文献[21]模型的刚度计算结果进行对比。如图 7 所示,在转速为 0,预紧力 100 N,轴向载荷为 8 000 N 时,随着径向载荷的增加,轴承的径向刚度增加趋势明显,轴向刚度变化趋势不明显。可以看出本文的刚度模型和周献文模型^[28]的刚度模型在变化趋势和量级上具有良好的一致性,表明本文模型的准确性较好。

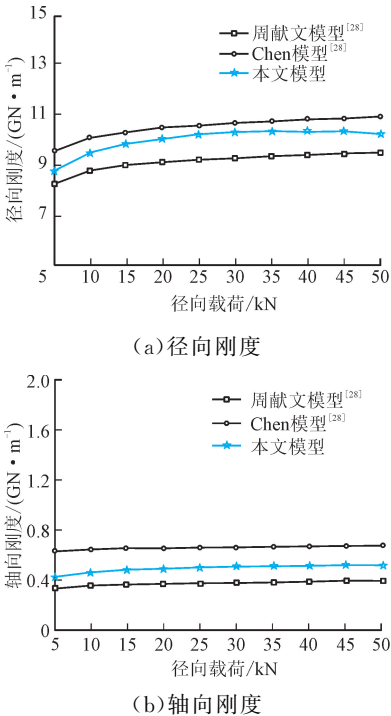


图 7 刚度模型结果准确性对比

Fig. 7 Comparison of results accuracy of stiffness models

4.2 多工况下双列圆锥滚子轴承载荷及刚度分析

本文的轴承刚度分析主要从转速和轴承预紧位移两方面展开。

图 8 所示为不同预紧位移且轴承仅存在预紧位移的情况下,轴承的径向和轴向刚度随转速的变化曲线。随着轴承转速的增加,轴承的径向刚度和轴向刚度会逐渐减小;同时,随着安装预紧位移从 0.005 mm 增加到 0.015 mm,同一转速下轴承的径向刚度和轴向刚度增加,轴承的径向刚度和轴向刚度随转速降低的趋势变缓。

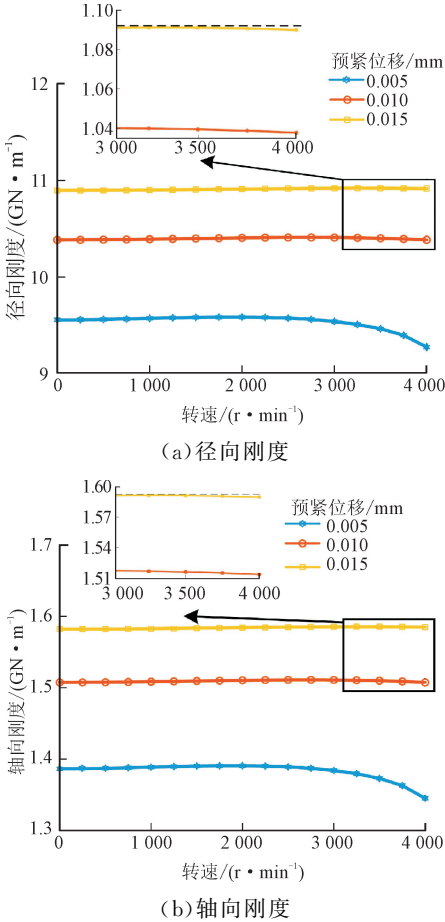


图 8 不同预紧位移下轴承刚度随转速的变化

Fig. 8 Curve of bearing stiffness changing with rotation speed under different preload displacement

图 9 为转速 2 000 r/min,预紧位移 0.01 mm 条件下,轴承的径向和轴向刚度随轴向力的变化曲线。可以明显看出,随着轴向力的增加,轴承的径向刚度和轴向刚度都会产生先下降后上升的趋势,且都产生了一个较大的转折点。从图 10 的单列轴承刚度可以看出,第一列轴承的径向、轴向刚度始终存在稳定上升的趋势,而第二列的径向、轴向刚度变化和两列轴承总的变化趋势一致,可以知道双列轴承的突

变原因主要在于第二列轴承。进一步对第二列轴承的载荷分布进行分析,如图 11 所示,随着轴向力的增加,第一列轴承持续受载,内圈力逐渐增加,而第二列轴承在轴向力增加到 14 kN 时,滚子和内滚道无接触力,表明滚子和内滚道已经脱离接触。

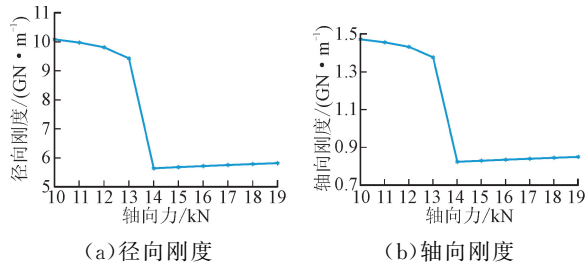


图 9 轴承刚度随轴向力的变化

Fig. 9 Curve of bearing stiffness changing with axial force

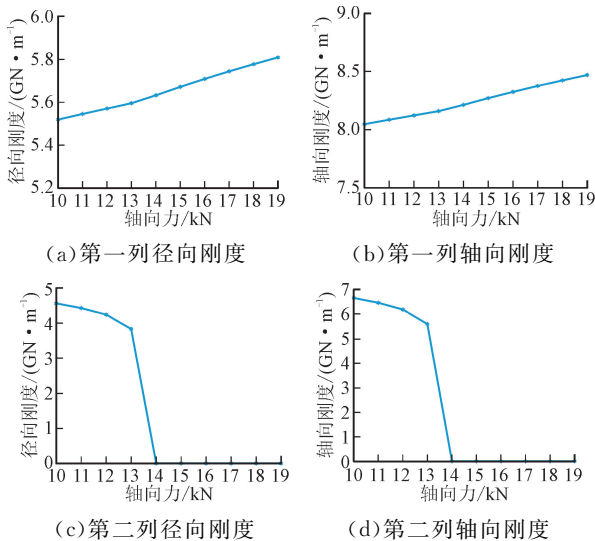


图 10 单列轴承刚度随轴向力的变化

Fig. 10 Stiffness curve of single row bearing with axial force

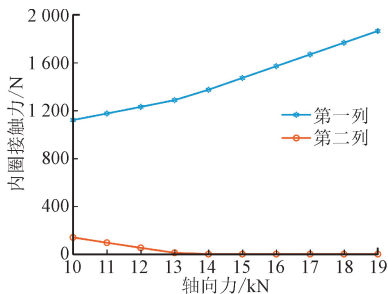


图 11 单列轴承内圈力随轴向力的变化

Fig. 11 Variation curve of inner ring force with axial force of single row bearing

图 12 是不同转速下轴承刚度随轴向力的变化曲线。可以看出,当转速为 0、2 000、4 000 r/min

时,轴承的径向和轴向刚度随轴向力增加均存在先减小后增加的趋势,且都存在一个明显的转折点,由上文分析可知,此转折存在原因是第二列轴承的内圈和滚子脱离接触。同时,转速增加使第二列轴承的内圈和滚子脱离接触的最小轴向力越小,即转速增加,第二列滚子更容易脱离接触,使得第一列轴承受载更加严重,更易受损。因此在只承受轴向力的情况下,应控制轴承的转速,以延长轴承的使用寿命。

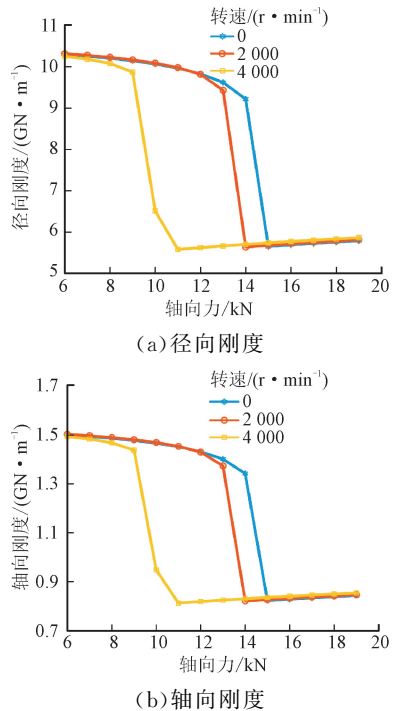
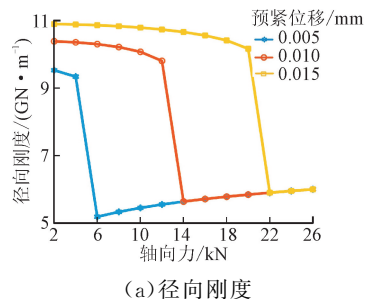


图 12 不同转速下轴承刚度随轴向力的变化

Fig. 12 Curve of bearing stiffness changing with axial force at different rotational speeds

图 13 为不同预紧位移下轴承的径向和轴向刚度随轴向力的变化曲线。可以看出,在预紧位移为 0.005、0.010、0.015 mm 时,随轴向力的增加,轴承的径向、轴向刚度也存在先减小后增加的趋势;随着预紧位移的减小,使第二列滚子脱离接触的最小轴向力逐渐变小。可见,随着预紧位移的增加,轴承承受轴向力的能力增强。



(a) 径向刚度

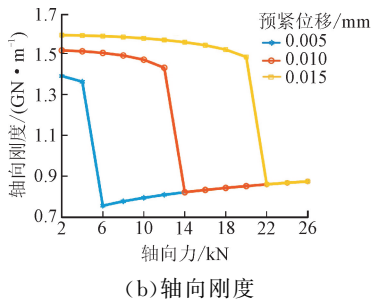


图 13 不同预紧位移下轴承刚度随轴向力的变化
Fig. 13 Curve of bearing stiffness changing with axial force under different preload displacement

图 14 为轴向力 4 kN 时,随着预紧位移的增加,双列圆锥滚子轴承的径向刚度、轴向刚度的变化趋势。可以看出,随着预紧位移的增加,轴承刚度从不变到增加,表明轴承从单列受载到双列受载的过程,可以获得在单轴向力下双列圆锥滚子轴承存在使轴承不发生滚子脱离的最小预紧位移。

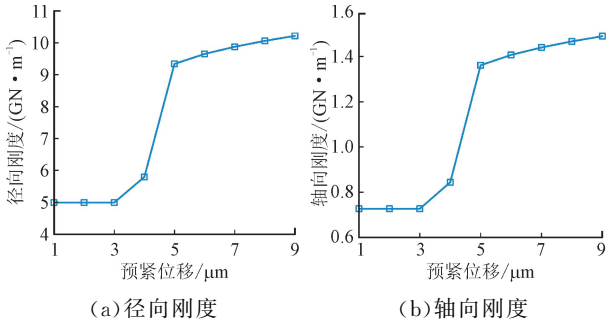


图 14 轴承刚度随预紧位移的变化
Fig. 14 Curve of bearing stiffness changing with preload displacement

综上,预紧位移对轴承是至关重要的,预紧位移使得双列圆锥滚子轴承不易产生滚子脱离滚道的现象,保障了在轴向力条件下,双列圆锥滚子轴承的承载能力。

5 结 论

通过多坐标矢量变换及切片的方法,建立了考虑转速和陀螺力矩的双列圆锥滚子轴承的拟静力学模型,此模型可用于不同载荷工况下的轴承受载计算。在此模型基础上,结合轴承刚度定义,对轴承的刚度进行求解,揭示了不同工况下轴承的刚度变化规律,深入探究了转速和预紧位移与轴承刚度的关系,得出以下结论。

(1)对于仅存在预紧位移的双列圆锥滚子轴承,当转速从 0 增加到 4 000 r/min 时,其径向、轴向刚度减小;当预紧位移从 0.005 mm 增加到 0.015 mm

时,这种变化趋势逐渐变缓。

(2)对于只承受轴向力的双列圆锥滚子轴承而言,轴向力从 10 kN 增加到 14 kN 时,其径向、轴向刚度减小;轴向力从 14 kN 增加到 19 kN 时,其径向、轴向刚度增加。当第二列滚子脱离滚道时,刚度的趋势发生变化。

(3)对于不同转速,仅受轴向力的双列圆锥滚子轴承而言,当转速从 0 r/min 增加到 4 000 r/min 时,第二列滚子更容易发生脱离现象。

(4)对于不同预紧位移下,仅受轴向力的双列圆锥滚子轴承而言,随着预紧位移从 0.015 mm 减小到 0.005 mm,第二列滚子更容易发生脱离现象。

参考文献:

[1] HAN Yaoyu, YANG Lihua, XU Tengfei. Analysis of static stiffness fluctuation in radially loaded ball and roller bearings [J]. Archive of Applied Mechanics, 2021, 91(4): 1757-1772.

[2] ZHENG Jingyang, JI Jinchun, YIN Shan, et al. Internal loads and contact pressure distributions on the main shaft bearing in a modern gearless wind turbine [J]. Tribology International, 2020, 141: 105960.

[3] ZHENG Jingyang, JI Jinchun, YIN Shan, et al. The load distribution of the main shaft bearing considering combined load and misalignment in a floating direct-drive wind turbine [C]//2018 3rd International Conference on Power and Renewable Energy. Les Ulis Cedex, France: EDP Sciences, 2018: 07009.

[4] PALMGREN A. Ball and roller bearing engineering [M]. 3rd ed. Burbank, USA: Philadelphia SKF Industries Inc., 1959: 30-51.

[5] JONES A B. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions [J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(2): 309-320.

[6] HARRIS T A, KOTZALAS M N. Rolling bearing analysis: advanced concepts of bearing technology [M]. 5th ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2006: 8-12.

[7] ANDRÉASON S. Load distribution in a taper roller bearing arrangement considering misalignment [J]. Tribology, 1973, 6(3): 84-92.

[8] LIU J Y. Analysis of tapered roller bearings considering high speed and combined loading [J]. Journal of Lubrication Technology, 1976, 98(4): 564-572.

[9] LAMBERT R J, POLLARD A, STONE B J. Some characteristics of rolling-element bearings under oscillating conditions: part 1 theory and rig design [J].

- Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers; Part K Journal of Multi-Body Dynamics, 2006, 220(3): 157-170.
- [10] LAMBERT R J, POLLARD A, STONE B J. Some characteristics of rolling-element bearings under oscillating conditions. Part 2: experimental results for interference-fitted taper-roller bearings [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers; Part K Journal of Multi-Body Dynamics, 2006, 220(3): 171-179.
- [11] LAMBERT R J, POLLARD A, STONE B J. Some characteristics of rolling-element bearings under oscillating conditions. Part 3: experimental results for clearance-fitted taper-roller bearings and their relevance to the design of spindles with high dynamic stiffness [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers; Part K Journal of Multi-Body Dynamics, 2006, 220(3): 181-190.
- [12] TONG V C, HONG S W. The effect of angular misalignment on the running torques of tapered roller bearings [J]. Tribology International, 2016, 95: 76-85.
- [13] TONG V C, HONG S W. Characteristics of tapered roller bearing with geometric error [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2015, 16(13): 2709-2716.
- [14] TONG V C, HONG S W. Effects of roller profile on the stiffness of tapered roller bearings [J]. Journal of Automation and Control Engineering, 2015, 3(2): 151-156.
- [15] TONG V C, HONG S W. Study on the stiffness and fatigue life of tapered roller bearings with roller diameter error [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers; Part J Journal of Engineering Tribology, 2017, 231(2): 176-188.
- [16] ZHANG Yunjia, RUAN Dengfang. Investigation on the lubrication performances and thermal characteristics of the tapered roller bearing [C]//ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. New York, USA: ASME, 2017: V010T11A032.
- [17] BERCEA I, CRETU S, NÉLIAS D. Analysis of double-row tapered roller bearings; part I model [J]. Tribology Transactions, 2003, 46(2): 228-229.
- [18] NÉLIAS D, BERCEA I, MITU N. Analysis of double-row tapered roller bearings, part II - results: prediction of fatigue life and heat dissipation [J]. Tribology Transactions, 2003, 46(2): 240-247.
- [19] AI Siyuan, WANG Wenzhong, WANG Yunlong, et al. Temperature rise of double-row tapered roller bearings analyzed with the thermal network method [J]. Tribology International, 2015, 87: 11-22.
- [20] YAN Ke, WANG Ning, ZHAI Qiang, et al. Theoretical and experimental investigation on the thermal characteristics of double-row tapered roller bearings of high speed locomotive [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2015, 84: 1119-1130.
- [21] YANG Lihua, XU Tengfei, XU Haoliang, et al. Mechanical behavior of double-row tapered roller bearing under combined external loads and angular misalignment [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 142-143: 561-574.
- [22] ZHENG Jingyang, JI Jinchen, YIN Shan, et al. Fatigue life analysis of double-row tapered roller bearing in a modern wind turbine under oscillating external load and speed [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers; Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2020, 234(15): 3116-3130.
- [23] XU Tengfei, YANG Lihua, WU Wei, et al. Effect of angular misalignment of inner ring on the contact characteristics and stiffness coefficients of duplex angular contact ball bearings [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 157: 104178.
- [24] FANG Bin, ZHANG Jinhua, YAN Ke, et al. A comprehensive study on the speed-varying stiffness of ball bearing under different load conditions [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 136: 1-13.
- [25] FANG Bin, YAN Ke, HONG Jun, et al. A comprehensive study on the off-diagonal coupling elements in the stiffness matrix of the angular contact ball bearing and their influence on the dynamic characteristics of the rotor system [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 158: 104251.
- [26] ZHANG Henghai, SHI Wenku, LIU Guozheng, et al. A method to solve the stiffness of double-row tapered roller bearing [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019: 1857931.
- [27] 胡浪, 王文中, 赵自强, 等. 双列圆锥滚子轴承滚子大端-引导边润滑接触分析 [J]. 摩擦学学报, 2013, 33(1): 22-28.
- HU Lang, WANG Wenzhong, ZHAO Ziqiang, et al. Lubricated contact analysis of roller large end-flange in double-row tapered roller bearing [J]. Tribology, 2013, 33(1): 22-28.
- [28] 周献文. 双列圆锥滚子轴承力学特性分析与测试试验研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2021.

(编辑 亢列梅)