

# RV 减速器摆线针齿传动机构线外啮入冲击研究

纪姝婷, 李佳林, 张跃明

(北京工业大学材料制造学部, 100124, 北京)

**摘要:** 针对摆线针齿传动机构啮合间隙引起的线外啮入冲击, 进而导致 RV 减速器传动误差突变和振动冲击增大的问题, 基于 H-C(亨特-克罗斯利)接触碰撞模型和 Hertz(赫兹)接触碰撞变形规律, 提出考虑摆线轮齿廓修形参数和机构设计参数的线外啮入冲击力模型与分析方法。首先, 基于线外啮入冲击产生机理, 确定了理论啮入点与实际啮入点, 明确了弹性扭转角的计算方法。其次, 基于 H-C 接触碰撞模型与 Hertz 接触碰撞变形规律, 提出了考虑阻尼力的摆线针齿传动线外啮入冲击力模型。然后, 采用多变量拟合方法, 构建了摆线轮移距修形和偏心距与啮入冲击力的映射关系, 揭示了摆线针齿传动机构线外啮入冲击的影响机制。最后, 应用 Ansys 瞬态动力学模块进行摆线针齿传动机构碰撞动态力的仿真计算。结果表明: 啮入冲击力随负移距修形量的减小而增加, 随正移距修形量的增大而增加, 随偏心距的减小而增加; 理论和仿真得到的最大冲击力误差为 7.98%, 尚在允许范围内, 验证了线外啮入冲击模型的可行性。该研究结果可为 RV 减速机摆线针齿传动机构的设计与优化提供理论依据。

**关键词:** 摆线针齿传动; 啮入冲击; 偏心距; 移距修形; 瞬态动力学

**中图分类号:** TH132.4; TH113.1 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.7652/xjtuxb202309013 **文章编号:** 0253-987X(2023)09-0123-10

## Study on Off-Line Meshing-in Impact Characteristics of Cycloid-Pin Gear Drive Mechanism of RV Reducer

Ji Shuting, Li Jialin, Zhang Yueming

(Beijing University of Technology, Faculty of Materials and Manufacturing, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Based on the H-C contact collision model and the Hertz contact collision deformation law, the meshing-in impact force model and analysis method considering cycloid gear tooth profile modification parameters and mechanism design parameters was proposed in the paper with a view to solving the problems such as sudden change of transmission error and increased vibration impact in RV reducers caused by off-line meshing-in impact due to the existence of clearance in the cycloid-pin gear drive mechanism. Firstly, based on the mechanism of how off-line meshing-in impact happened, the theoretical meshing-in point and the actual meshing-in point were determined and the calculation method of elastic torsion angle was clarified. Secondly, based on the H-C contact collision model and the Hertz contact collision deformation law, the meshing-in impact force model of the cycloid-pin gear drive mechanism considering damping force was proposed. Then, by using the multivariate fitting method, the mapping relationship between the design pa-

收稿日期: 2023-02-16。 作者简介: 纪姝婷(1988—)女, 副教授; 张跃明(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(51905009); 河北省重点研发计划资助项目(20311802D)。

网络出版时间: 2023-03-16

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20230315.1757.004.html>

rameters such as cycloid gear radial-moving modification and eccentricity and the meshing-in impact force was constructed, and the influence mechanism of the off-line meshing-in impact characteristics of the cycloid-pin gear drive mechanism was revealed. Finally, the Ansys transient dynamics module was used to simulate the collision dynamic force of the cycloid-pin gear drive mechanism. The results show that the meshing-in impact force increases with the decrease of the negative radial-moving modification amount, the increase of the positive radial-moving modification amount and the decrease of the eccentricity; the maximum impact force error between theory and simulation result is 7.98%, which is in the allowable range and proves the feasibility of the off-line meshing-in impact model. The research results can provide a theoretical basis for the design and optimization of the cycloid-pin gear drive mechanism of RV reducers.

**Keywords:** cycloid-pin gear drive; meshing-in impact; eccentricity; radial-moving modification; transient dynamics

工业机器人是先进制造业的支撑设备, RV 减速器作为工业机器人的核心零部件之一, 占整机成本的 25% 左右, 对工业机器人的各项技术指标如传动精度、寿命、可靠性等均有重要影响<sup>[1]</sup>。RV 减速器有两级传动, 第一级为渐开线行星齿轮传动, 第二级为摆线针齿传动。摆线针齿传动是 RV 减速器核心传动机构, 对其传动精度影响较大<sup>[2]</sup>。

在齿轮传动中, 由于制造误差、齿廓修形、轮齿变形等原因, 实际啮入点会偏离理论啮入点, 在实际啮合公法线方向上产生相对速度, 引起啮合冲击<sup>[3]</sup>。典型的啮合冲击包括啮入冲击、节点冲击和啮出冲击, 其中啮入冲击对传动性能影响最为显著<sup>[4]</sup>。国内外相关学者对机构的啮入冲击进行了大量研究。Huang 等通过建立直齿圆柱齿轮冲击模型, 研究了瞬态冲击对齿轮润滑的影响<sup>[5]</sup>。周长江等通过对渐开线齿轮线外啮入机理的研究, 提出了求解线外啮入冲击力的方法, 建立了线外啮入冲击摩擦模型<sup>[6]</sup>。Hu 等通过建立行星传动系统的啮合冲击模型, 计算出啮合冲击点、啮合冲击时间和冲击力, 并考虑了载荷作用下各部件偏心误差和安装误差对齿轮啮合位置的影响<sup>[7]</sup>。Vedmar 等<sup>[8]</sup>采用有限元方法, 计算了齿轮非线性 Hertz 变形量, 提出了直齿轮动态啮合力计算模型。王峰等阐述了人字齿轮啮入冲击位置、速度及冲击力的推导过程, 简要分析了冲击力与重合度的关系<sup>[9]</sup>。张卫青等研究了齿廓修形及重合度对螺旋锥齿轮冲击力的影响<sup>[10]</sup>。

在摆线针齿传动过程中, 啮合力是研究啮入冲击过程的基础。Su 等计算了标准摆线轮和修形后的摆线轮与针齿之间的啮合力<sup>[11]</sup>。Hsieh 研究了摆线针齿的接触和碰撞条件, 以及在传递过程中的啮合力变化, 并建立了摆线针齿传动系统两种动力

学分析模型<sup>[12]</sup>。Xu 等提出摆线针齿传动的啮合位置的判定方法, 分析了轴承对摆线针齿传动载荷分布的影响<sup>[13]</sup>。Zhang 等建立了摆线针齿传动的啮合力学模型, 并计算出摆线针齿啮合副间的接触应力和接触刚度分布<sup>[14]</sup>。Yu 等研究了摆线针齿啮合侧隙对啮合力的影响<sup>[15]</sup>。Ren 等通过建立摆线针齿行星传动的动力学方程, 分析了摆线针齿啮合副的动态啮合刚度及系统的传动误差, 探讨了摆线针齿啮合侧隙对啮合力的影响<sup>[16]</sup>。Blagojevic 等利用 Solidworks 和 Matlab 软件, 设计了一种新型单级摆线针齿减速器, 并建立动力学方程对其进行运动学分析<sup>[17]</sup>。

虽然针对渐开线齿轮的线外啮入冲击较为成熟, 但是针对摆线针齿啮合传动的线外啮入冲击仍有待深入研究。本文对摆线针齿传动啮合状态下的线外啮入冲击进行理论分析, 揭示线外啮入冲击的产生机理, 基于 H-C(亨特-克罗斯利)接触碰撞模型和 Hertz(赫兹)接触碰撞变形规律, 建立线外啮入冲击力学模型, 分析摆线轮移距修形和偏心距对冲击力的影响, 这对于减小 RV 减速器振动和噪声具有重要意义。

## 1 摆线针齿传动线外啮入点的计算

### 1.1 摆线针齿线外啮入冲击机理

根据摆线针齿传动的理想啮合条件, 标准的摆线轮与针齿在啮合公法线上的相对速度为 0。在实际啮合过程中, 由于摆线轮修形引起的齿侧间隙如图 1(a)所示, 以及轮齿受载后的变形如图 1(b)所示, 导致摆线轮的实际啮合点偏离理论啮合点, 并在啮合公法线产生相对啮入速度, 进而产生啮入冲击力。修形后的摆线轮首先克服齿侧间隙后, 摆线轮



转动 $\beta$ ,见图3。 $A$ 点为摆线轮理论啮合点,产生压缩变形后,摆线轮 $A$ 点 $(x_1, y_1)$ 转到 $B$ 点 $(x_2, y_2)$ 位置,则弹性扭转角 $\beta$ 为

$$\arctan \frac{y_1 - y_c}{x_1 - x_c} - \arctan \frac{y_2 - y_c}{x_2 - x_c} = \beta \quad (8)$$

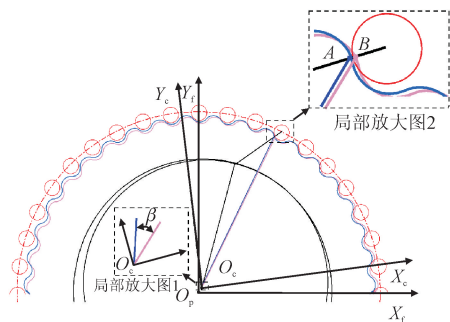


图3 摆线轮弹性扭转角 $\beta$

Fig. 3 The elastic torsion angle  $\beta$  of cycloid gear

摆线轮与针齿啮合时,如图4所示,摆线轮与针齿在啮合公法线方向压缩量 $\delta_i$ 计算公式为

$$\delta_i = \beta l_i \quad (9)$$

式中: $l_i$ 为啮合力力臂。

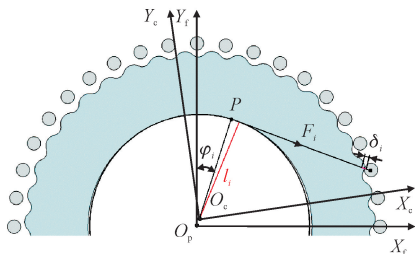


图4 摆线轮和针齿的接触形变量与力臂关系

Fig. 4 The relationship between contact deformation of cycloid gear and pin gear and force arm

设受力最大的一对摆线轮与针齿接触变形量为 $\delta_{\max}$ ,其啮合点公法线到摆线轮中心点的距离为 $l_{\max}$ ,由此可得

$$\beta = \frac{\delta_{\max}}{l_{\max}} = \frac{\delta_i}{l_i} \quad (10)$$

式中: $l_{\max} = r_c$ 。

摆线轮与针齿之间的接触可简化为两圆柱体接触,根据赫兹接触变形公式<sup>[19]</sup>,摆线轮与针齿的最大接触变形 $\delta_{\max}$ 计算公式为

$$\delta_{\max} \approx \frac{2F_{\max}}{\pi B} \left[ \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{4\rho_c}{b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{4r}{b} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (11)$$

式中: $B$ 为摆线轮厚度; $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 为摆线轮与针齿材料

的泊松比; $E_1$ 、 $E_2$ 为摆线轮与针齿的弹性模量; $\rho_c$ 为摆线轮齿廓曲率半径; $b$ 为摆线针齿接触半宽; $F_{\max}$ 为最大初始啮合力。

接触半宽推导公式为

$$b = \sqrt{\frac{4F_{\max}\rho^*}{\pi BE_D}} \quad (12)$$

式中: $\rho^*$ 为摆线针齿综合曲率半径; $E_D$ 为摆线针齿综合弹性模量。

摆线针齿接触的综合齿廓曲率半径 $\rho^*$ <sup>[20]</sup>为

$$\frac{1}{\rho^*} = \left| \frac{1}{\rho_c} \pm \frac{1}{r} \right| \quad (13)$$

摆线针齿接触综合弹性模量 $E_D$ 为

$$E_D = \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (14)$$

摆线轮齿廓曲率半径为

$$\rho_c = \frac{(R_p + \Delta R_p)(1 + k_m^2 - 2k_m \cos \varphi)^{3/2}}{k_m(z_p + 1) \cos \varphi - (1 + z_p k_m^2)} + (r + \Delta r) \quad (15)$$

将式(11)代入式(10),则 $\beta$ 计算公式为

$$\beta = \frac{2F_{\max}}{\pi b r_c} \left[ \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{4\rho_c}{b} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{4r_g}{b} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (16)$$

由式(16)可知,要求得 $\beta$ 需计算最大初始啮合力 $F_{\max}$ 。摆线针齿传动机构中第 $i$ 对啮合齿的啮合力 $F_i$ 与 $F_{\max}$ 关系为

$$F_i = \frac{\delta_i - d_i}{\delta_{\max}} F_{\max} \quad (17)$$

由于初始间隙的存在,只有部分齿廓对参与啮合,假设只有 $m$ 到 $n$ 号针齿接触,根据转矩平衡原理可得

$$T_c = \sum_m^n F_i l_i \quad (18)$$

最大初始啮合力计算公式为

$$F_{\max} = \frac{0.55 T}{\sum_m^n (\delta_i - d_i) l_i / \delta_{\max}} \quad (19)$$

式中: $T$ 为输出轴上作用的扭矩; $T_c$ 为单个摆线轮传递的扭矩。

暂取标准摆线轮与针齿之间的最大啮合力作为最大初始啮合力

$$F_{\max 0} = \frac{4T_c}{k_m z_c r_p} \quad (20)$$

由于在计算时将标准摆线轮与针齿之间的最大啮合力 $F_{\max 0}$ 作为最大初始啮合力 $F_{\max}$ ,所计算得出



的结果并不准确<sup>[21]</sup>。因此,采用逐次迭代的方法,判断求解得到的  $F_{\max}$  与最大初始啮合力  $F_{\max 0}$  是否满足  $|F_{\max} - F_{\max 0}| \leq 0.1\% F_{\max}$ , 如果不满足条件,则将  $F_{\max}$  的值赋予  $F_{\max 0}$  代入式(11)~(19)中重新进行计算,直到满足上述条件,此时  $F_{\max} = F_{\max 0}$ 。计算流程如图 5 所示。在求得  $F_{\max}$  的准确值后,代入式(16)求得  $\beta$ 。将  $\beta$  代入式(8),可求得摆线针齿传动的实际啮入点坐标。

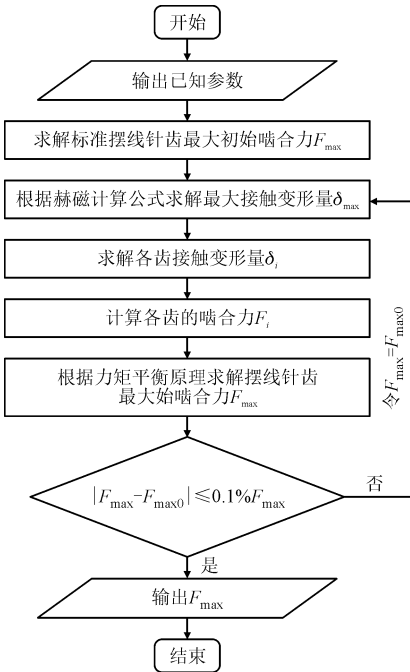


图 5 最大初始啮合力  $F_{\max}$  计算流程图  
Fig. 5 Calculation flow chart of maximum initial engagement force  $F_{\max}$

## 2 线外啮入冲击力计算

忽略轴承、曲轴等零件的变形影响,将摆线轮与针齿的啮入冲击简化为沿啮合公法线方向的弹性碰撞行为,两刚体接触碰撞力即为线外啮入冲击力。

### 2.1 线外啮入冲击速度

由于存在制造误差、弹性变形和齿侧间隙,导致摆线轮与针齿在公法线方向产生相对速度。沿啮合公法线方向的相对啮入速度为啮入冲击速度,如图 6 所示。图中  $P$  为摆线轮节点, $M$  为摆线轮实际待啮合点, $PM$  为摆线针齿实际啮合公法线, $\mathbf{V}_p$  为摆线轮  $M$  点处瞬时公转速度, $\mathbf{V}_c$  为摆线齿  $M$  点处的自转速度, $\mathbf{V}$  为摆线齿  $M$  点沿实际啮合公法线速度,则线外啮入冲击速度计算过程如下

$$\mathbf{V}_p = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}_p \mathbf{O}_c \quad (21)$$

$$\mathbf{V}_c = \frac{\boldsymbol{\omega}}{i_H} \times \mathbf{O}_c \mathbf{M} \quad (22)$$

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}_p| \sin \alpha - |\mathbf{V}_c| \sin \gamma \quad (23)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}$  为摆线轮公转角速度; $\alpha$  为啮合公法线  $PM$  与  $\mathbf{O}_p P$  的夹角; $\gamma$  为啮合公法线  $PM$  与  $\mathbf{O}_c M$  的夹角; $i_H$  为摆线针齿传动比。

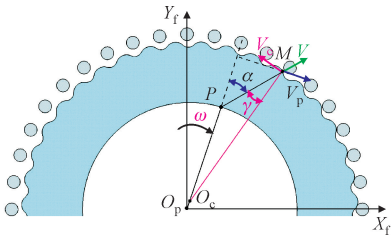


图 6 摆线针齿相对啮入速度  
Fig. 6 Relative velocity of meshing-in of cycloid-pin gear

### 2.2 线外啮入冲击力模型

根据经典力学碰撞理论,弹性碰撞过程分为压缩和恢复两个阶段,由压缩变形引起的位移,是啮入冲击总位移的主要部分。当两刚体发生碰撞刚体达到最大压缩形变时,所对应的力即为最大冲击力。将摆线轮与针齿的啮入冲击过程等效为两圆柱体的非线性接触碰撞动力学行为,最大接触碰撞力即为最大冲击力。

图 7 为 Hertz 接触碰撞变形规律。首先两碰撞物体产生压缩变形,变形到最大位置  $\delta_{\max}$  后,此时对应的力为最大冲击力  $F_{S\max}$ ,进而逐渐恢复初始状态。

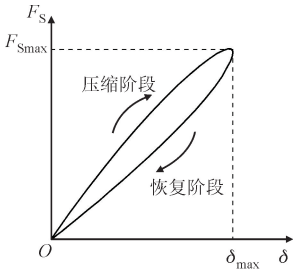


图 7 Hertz 接触碰撞变形曲线  
Fig. 7 The curve of Hertz contact collision deformation

基于 H-C 非线性接触碰撞模型<sup>[22]</sup>,建立适用于摆线针齿传动啮入冲击的力学模型,其表达式为

$$F_S = F_N + C(\delta)\dot{\delta} \quad (24)$$

$C(\delta)$  的计算公式为

$$C(\delta) = \chi \delta^n \quad (25)$$

式中: $F_N$  为非线性接触力; $C(\delta)$  为非线性阻尼因子; $\chi$  为迟滞阻尼系数; $\delta$  为碰撞物体形变量; $\dot{\delta}$  为物体碰撞速度; $n$  为阻尼力形变量贡献系数。

### 2.2.1 非线性接触力模型

摆线轮与针齿产生压缩变形后,接触区域宽度为  $2b$ , 长度为  $B^{[23]}$ , 如图 8 所示, 由 Hertz 公式可得

$$b = \sqrt{\frac{4F_N}{\pi B} \left[ \frac{(1-\mu_1^2)/E_1 + (1-\mu_2^2)/E_2}{1/\rho^*} \right]} \quad (26)$$

假设摆线轮与针齿的弹性模量与泊松比相同, 令  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , 化简式(26), 可得

$$b = \sqrt{\frac{8F_N \rho (1-\mu^2)}{\pi B E}} \quad (27)$$

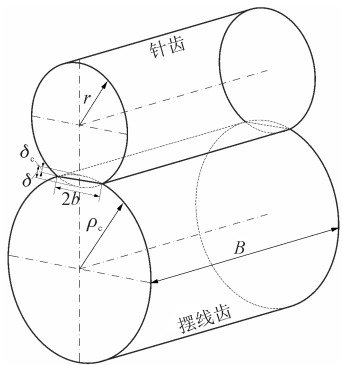


图 8 摆线针齿等效接触模型

Fig. 8 The equivalent contact model of cycloid-pin gear

由图 8 几何关系可知

$$(\rho_c - \delta_c)^2 + b^2 = \rho_c^2 \quad (28)$$

式中:  $\delta_c$  为摆线齿形变量。

将式(28)代入式(27), 整理可得摆线齿接触变形量与接触力的关系为

$$F_N = \frac{\pi B E}{8(1-\mu^2)} \left[ \frac{(2\rho_c \delta_c - \delta_c^2)(\rho_c + r)}{\rho_c r} \right] \quad (29)$$

### 2.2.2 非线性阻尼力模型

考虑接触碰撞过程中, 阻尼力作用的部分能量以热量形式散失, 接触碰撞过程中动能损失为

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_j \left\{ [V_j^{(-)}]^2 - [V_j^{(+)}]^2 \right\} + \frac{1}{2} m_k \left\{ [V_k^{(-)}]^2 - [V_k^{(+)}]^2 \right\} \quad (30)$$

式中:  $m_j$ 、 $m_k$  为物体  $j$ 、 $k$  的质量;  $V_j^{(-)}$ 、 $V_j^{(+)}$  为物体  $j$  碰撞前后的速度;  $V_k^{(-)}$ 、 $V_k^{(+)}$  为物体  $k$  碰撞前后的速度。

根据动量定理

$$m_j [V_j^{(-)} - V_j^{(+)}] + m_k [V_k^{(-)} - V_k^{(+)}] = 0 \quad (31)$$

根据牛顿运动学定义, 两个物体碰撞后的恢复系数  $c_r$  可定义为碰撞后的相对速度比碰撞前的相对速度, 表达式<sup>[24]</sup>为

$$c_r = \frac{V_j^{(+)} - V_k^{(+)}}{V_j^{(-)} - V_k^{(-)}} = -\frac{\dot{\delta}^{(+)}}{\dot{\delta}^{(-)}} \quad (32)$$

式中:  $\dot{\delta}^{(+)}$  为物体相对分离速度;  $\dot{\delta}^{(-)}$  为物体相对靠近速度。

因此, 将式(31)和(32)代入式(30), 发生冲击后, 损失动能为

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_j m_k}{m_j + m_k} [\dot{\delta}^{(-)}]^2 (1 - c_r^2) \quad (33)$$

在压缩阶段, 由阻尼力损耗的能量可表达<sup>[25]</sup>为

$$\Delta E_c = \int_0^{\delta_{\max}} \chi \delta^n \dot{\delta}^{(-)} \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{\delta_{\max}} \right)^2} d\delta \quad (34)$$

式中:  $\Delta E_c$  为压缩阶段消耗能量。

对式(34)进行变量替换, 根据三角函数积分性质, 可得

$$\int_0^{\delta_{\max}} \delta^n \sqrt{1 - \left( \frac{\delta}{\delta_{\max}} \right)^2} d\delta \approx \frac{2}{n+2} \delta_{\max}^{n+1} \quad (35)$$

将式(34)代入式(35), 则压缩过程中迟滞阻尼损耗能量可表示为

$$\Delta E_c = \frac{2}{n+2} \chi \dot{\delta}^{(-)} \delta_{\max}^{(n+1)} \quad (36)$$

根据能量守恒定律, 摆线轮与针齿发生冲击后, 碰撞初始时刻能量  $T^{(-)}$  转化为 3 部分: 一部分为摆线轮与针齿继续运动的动能  $T^s$ , 第二部分为最大弹性势能  $U^{\max}$ , 最后一部分为滞后阻尼作用转化的热能  $\Delta E_c$ , 即

$$T^{(-)} = T^s + U^{\max} + \Delta E_c \quad (37)$$

$$U^{\max} = \int_0^{\delta_{\max}} F_N d\delta \quad (38)$$

为判断非线性接触力影响因素, 由式(29)可知, 令  $S$  为非线性变形系数, 则摆线轮与针齿接触力可表示为

$$F_N = \frac{\pi B E}{8(1-\mu^2)^2} S \quad (39)$$

其中  $S$  为

$$S = \frac{(2\rho_c \delta_c - \delta_c^2)(\rho_c \pm r)}{\rho_c r} \quad (40)$$

根据式(40)分析可知, 摆线轮形变量  $\delta_c$ 、偏心距  $a$  和移距修形量  $\Delta R_p$  对摆线针齿非线性接触力影响较大。同时, 为了确定阻尼力形变量贡献系数  $n$ , 采用多变量拟合方法, 构建偏心距、摆线轮移距修形量和形变量与  $S$  之间的映射关系。设  $S$  为

$$\begin{cases} S = f(a, \Delta R_p) \delta_c^{g(a, \Delta R_p)} \\ g(a, \Delta R_p) = \epsilon_1 a + \epsilon_2 \Delta R_p \\ f(a, \Delta R_p) = \epsilon_3 a + \epsilon_4 \Delta R_p \end{cases} \quad (41)$$

式中:  $\epsilon_1 \sim \epsilon_4$  为拟合系数。因此可根据式(41)确定

最大弹性势能  $U^{\max}$  和迟滞阻尼系数  $\chi$  的表达式。

将式(41)代入式(38),则最大势能  $U^{\max}$  可表示为

$$U^{\max} = \frac{\pi BE f(a, \Delta R_p) \delta_{c\max}^{2n+1}}{8(1 - \mu^2)(g(a, \Delta R_p) + 1)} \tag{42}$$

根据压缩过程的动量守恒,则有

$$m_j V_j^{(-)} + m_k V_k^{(-)} = (m_j + m_k) V_{jk}^{\max} \tag{43}$$

式中: $v_{jk}^{\max}$  为两物体共同运动速度最大值。

考虑摆线轮与针齿冲击过程中会产生能量损失时,则式(37)可表达为

$$\frac{1}{2} m_k [V_i^{(-)}]^2 + \frac{1}{2} m_j [V_j^{(-)}]^2 =$$
$$U^{\max} + \Delta E_c + \frac{1}{2} (m_k + m_j) V_{ij}^{\max} \tag{44}$$

将式(36)、式(45)~(48)代入式(44),经推导可得阻尼影响因子  $\chi$  表达式为

$$\chi = \frac{\pi BE (g(a, \Delta R_p) + 2)(2 - c_r) f(a, \Delta R_p)}{8(1 - \mu^2)(g(a, \Delta R_p) + 1) \delta_c^{(-)}} \tag{45}$$

联立式(24)、(45),最终可得到摆线针齿传动冲击力模型为

$$F_s =$$
$$F_N + \frac{(g(a, \Delta R_p) + 2)(1 - c_r) f(a, \Delta R_p) \pi BE}{8(1 - \mu)^2 (g(a, \Delta R_p) + 1) c_r \delta_c^{(-)}} \delta_c^{g(a)} \delta_c \tag{46}$$

忽略重力作用,根据 Hertz 接触变形理论,弹性体动能的损失即为碰撞力所消耗的能量,则弹性体损失动能、变形量、冲击力有如下关系

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\delta_{cq}^2 - \delta_{c(q+1)}^2) =$$
$$\frac{1}{2} (F_{sq} + F_{s(q+1)}) (\delta_{cq} - \delta_{c(q+1)}) \tag{47}$$

式中: $m_1$ 、 $m_2$  为两个弹性体质量; $\delta_{cq}$  为碰撞点  $q$  时刻的摆线轮形变量; $\delta_{cq}$  为摆线轮啮合点处的瞬时速度; $F_{sq}$  为碰撞点  $q$  时刻的摆线轮冲击力。

将式(47)整理后,可得关于  $\delta_{c(q+1)}$  的一元二次方程

$$A_1 \delta_{c(q+1)}^2 + B_1 \delta_{c(q+1)} + C_1 = 0 \tag{48}$$

$$\delta_{c(q+1)} = \frac{-B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1} \tag{49}$$

式中

$$A_1 = m$$
$$B_1 = \frac{(g(a, \Delta R_p) + 2)(1 - c_r) f(a, \Delta R_p) \pi b E}{3(1 - \mu^2)(g(a, \Delta R_p) + 1) c_r \delta_c^{(-)}} \cdot$$
$$\delta_c^{g(a)} (\delta_{c(q+1)} - \delta_{cq})$$

$$C_1 = -m \delta_{c(q+1)} + [F_{Nq} + F_{N(q+1)} +$$
$$\frac{(g(a, \Delta R_p) + 2)(1 - c_r) f(a, \Delta R_p) \pi b E}{3(1 - \mu^2)(g(a, \Delta R_p) + 1) c_r \delta_c^{(-)}} \cdot$$
$$\delta_{cq}^{g(a)} \delta_{c(q+1)}] (\delta_{c(q+1)} - \delta_{cq})$$

从冲击起始点开始计算,设计算迭代步长  $\delta_{c(q+1)} - \delta_{cq} = 0.001$ ,代入初始冲击速度  $\delta_{c0}$  和初始压缩形变量  $\delta_{c0}$ 。当  $C_1 < 0$  时式(49)有实数解,可依次解得  $\delta_{c1}, \delta_{c2}, \dots, \delta_{cn}$ ;当  $C_1 = 0$  时,即变形阶段终点时刻,停止迭代。通过式(48)可得到摆线轮最大形变量  $\delta_{c\max}$  以及最大冲击力  $F_{S\max}$ 。

### 3 冲击力模型验证

现以 RV-20E 样机为研究对象,样机数据如表 1 所示。

表 1 RV-20E 的参数和材料属性

Table 1 The parameters and material properties of RV-20E

| 设计参数                                     | 数值                 |
|------------------------------------------|--------------------|
| 针齿中心圆半径 $r_p/\text{mm}$                  | 60                 |
| 针齿半径 $r/\text{mm}$                       | 2.25               |
| 等距修形量 $\Delta r/\text{mm}$               | 0.012              |
| 移距修形量 $\Delta R_p/\text{mm}$             | 0.002              |
| 偏心距 $a/\text{mm}$                        | 1                  |
| 针齿齿数 $z_p$                               | 40                 |
| 摆线轮齿数 $z_c$                              | 39                 |
| 弹性模量 $E/(\text{N} \cdot \text{mm}^{-2})$ | $2.08 \times 10^5$ |
| 泊松比 $\mu$                                | 0.3                |
| 摆线轮与针齿厚度 $B/\text{mm}$                   | 9                  |
| 输出扭矩 $T_c/(\text{N} \cdot \text{m})$     | 169                |

#### 3.1 线外啮入冲击力理论计算

经计算,图 9 所示为摆线轮转过初始转角  $0.6^\circ$  后的齿侧间隙分布。此时 6 号针齿对应的啮合对啮合,7 号针齿啮合对存在齿侧间隙。空载状况下,摆线轮公转 1 ms 后,摆线轮 7 号齿与针齿处于啮合状态,如图 10 所示。

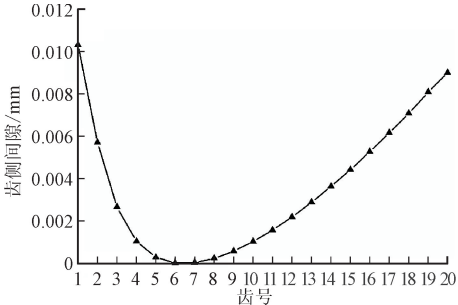


图 9 摆线针齿初始间隙

Fig. 9 The initial clearance of cycloid pin teeth

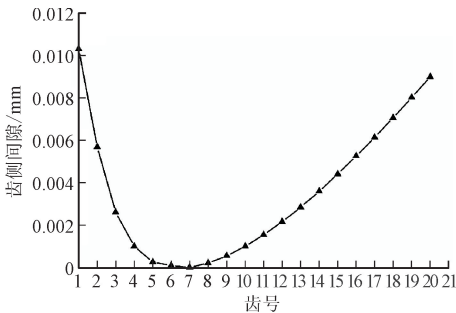


图 10 摆线轮公转 1 ms 后齿侧间隙

Fig. 10 The clearance after cycloid gear revolution of 1 ms

假设偏心距  $a$  设计范围为  $0.99\sim1.01\text{ mm}$ , 接触变形量  $\delta_c$  变化范围为  $0\sim0.01\text{ mm}$ , 移距修形量的修形范围为  $-0.05\sim0.05\text{ mm}$ , 代入式(41)后, 通过 Matlab 进行多变量拟合, 可得到  $S$  的拟合公式为

$$S = (5.626a + 4.634\Delta R_p)\delta_c^{(0.962a-0.114\Delta R_p)} \tag{50}$$

表 2 为拟合精度相关参数, 可见拟合精度较好。

表 2 变形系数  $S$  拟合相关数据

Table 2 The fitting relevant data of deformation coefficient  $S$

| 参数    | 数值                  |
|-------|---------------------|
| 误差平方和 | $3.63\times10^{-9}$ |
| 拟合度   | 0.99                |
| 均方根误差 | $3.81\times10^{-6}$ |

图 11 为摆线针齿传动的线外啮入冲击力随时间变化情况。由图可知, 在  $0\sim6.95\text{ }\mu\text{s}$  时间段, 摆线轮与针齿未发生冲击, 此时冲击力为 0。在克服间隙后, 摆线轮在  $6.95\text{ }\mu\text{s}$  处与 7 号针齿发生冲击, 随后短时间内冲击力迅速增加到峰值  $132.5\text{ N}$ 。

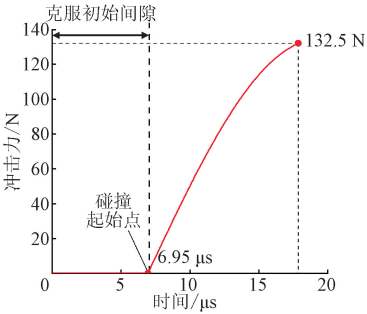


图 11 理论冲击力随时间变化曲线

Fig. 11 The change curve of theoretical impact force with time

3.2 有限元仿真

3.2.1 有限元仿真设置

将摆线针齿传动机构导入瞬态动力学模块后, 在 Space Claim 软件中设置连接关系, 设置材料类型, 对

摆线针齿进行局部精密网格划分, 如图 12 所示。仿真时间为  $1\text{ ms}$ , 为更直观观察摆线轮冲击力变化, 提取 7 号针齿对应的啮合对接触面中心点的冲击力数据。

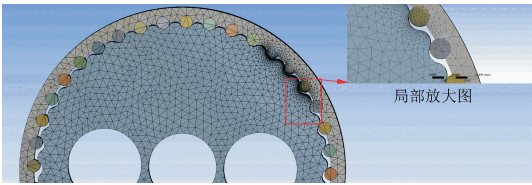


图 12 摆线针齿局部精密网格划分

Fig. 12 The local precision grid generation of cycloid-pin gear

3.2.2 仿真结果分析

摆线轮 7 号齿的冲击力随时间变化结果如图 13 所示,  $0\sim11.8\text{ }\mu\text{s}$  时摆线轮克服初始间隙未与针齿发生碰撞, 此期间冲击力为 0。在  $11.8\text{ }\mu\text{s}$  与 7 号针齿发生碰撞, 冲击力在短时间内瞬时增加到  $122.7\text{ N}$ 。

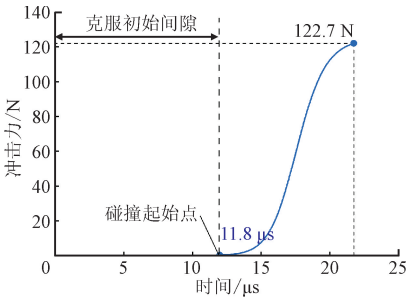


图 13 冲击力随时间变化仿真结果

Fig. 13 The simulation results of impact force changing with time

3.3 冲击力模型理论结果与仿真结果对比

摆线针齿啮入冲击理论计算结果与 Ansys 有限元仿真结果对比如图 14 所示, 理论计算得到的摆线轮克服初始间隙时间相对于仿真得到的时间短, 该现象是由于初始冲击时间的选取差异所造成的。理论上的最大冲击力为  $132.5\text{ N}$ , 仿真得到的最大冲击力为  $122.7\text{ N}$ , 误差率为  $7.98\%$ , 计算误差在允

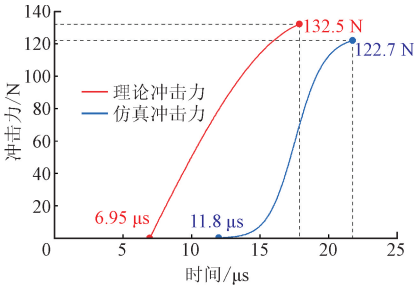


图 14 理论冲击力与仿真冲击力对比图

Fig. 14 The comparison of theoretical impact force with simulation impact force



许范围内,因此有限元仿真结果验证了线外啮入冲击力模型可行性。

4 不同碰撞参数对冲击力的影响

4.1 移距修形对冲击力影响

冲击力随移距修形量  $\Delta R_p$  变化规律如图 15 所示。在等距修形量一定时,当修形量在  $-0.05 \sim 0.05$  mm取值范围内,对于负移距修形,修形量越大,啮入冲击力越小;对于正移距修形,修形量越大,啮入冲击力越大。移距修形对克服初始间隙时间影响较大,这是由于不同修形方式与修形量对摆线针齿齿侧间隙影响较大。移距修形量对冲击持续时间影响并不大。

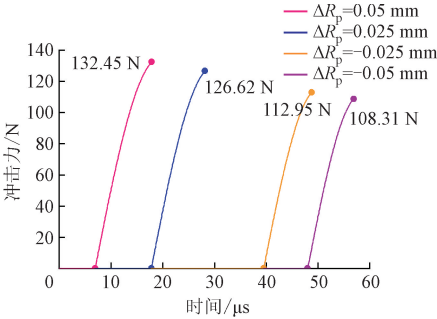


图 15 移距修形对最大冲击力的影响

Fig. 15 The influence of radial-moving modification eccentricity on maximum impact force

4.2 偏心距设计参数对冲击力的影响

冲击力随偏心距  $a$  变化规律如图 16 所示。当偏心距在  $0.99 \sim 1.01$  mm 设计范围内,偏心距  $a$  越小,摆线针齿的线外啮入冲击力越大,摆线针齿齿侧间隙减小从而使克服初始间隙时长缩短,但对冲击持续时间影响不大。

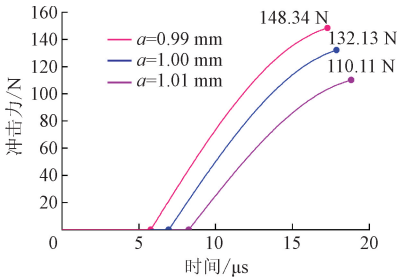


图 16 偏心距对最大冲击力的影响

Fig. 16 The influence of eccentricity on maximum impact force

5 结 论

(1)基于摆线针齿啮合理论,阐述了摆线针齿传动线外啮入冲击产生机理,提出了摆线轮与针齿实

际啮入点坐标计算方法,提出了线外啮入冲击速度计算模型,为冲击力学模型建立提供基础。

(2)基于 H-C 接触碰撞模型和 Hertz 接触碰撞变形规律,建立了摆线轮与针齿冲击力模型。考虑初始间隙,通过数值算法,揭示了线外啮入冲击力随时间的变化规律。

(3)采用 Ansys Workbench 软件对摆线针齿啮入冲击力进行计算。仿真分析结果与理论计算结果差异较小,证明了线外啮入冲击模型的准确性。

(4)分析偏心距和移距修形量对摆线针齿啮入冲击力影响。最终得出偏心距越小,摆线针齿啮入冲击力越大;等距修形量一定时,正移距修形量越大,摆线针齿啮入冲击力越大,负移距修形量越小,摆线针齿啮入冲击力越大的结论。

参考文献:

[1] PHAM A D, AHN H J. High precision reducers for industrial robots driving 4th industrial revolution: state of arts, analysis, design, performance evaluation and perspective [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology, 2018, 5(4): 519-533.

[2] HAN Linshan, GUO Fei. Global sensitivity analysis of transmission accuracy for RV-type cycloid-pin drive [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2016, 30(3): 1225-1231.

[3] HE Zeyin, ZHANG Tao, LIN Tengjiao. Novel mathematical modelling method for meshing impact of helical gear [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 152: 103949.

[4] SMISH J D. Gears and their vibration: a basic approach to understanding gear noise [M]. New York, USA: Macmillan Press, 1983.

[5] HUANG Xingbao, YANG Bintang, WANG Youqiang. Influences of transient impact and vibration on the lubrication performance of spur gears [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part J Journal of Engineering Tribology, 2021, 235 (2): 274-289.

[6] 周长江,唐进元,钟志华. 齿轮传动的线外啮合与冲击摩擦 [J]. 机械工程学报, 2008, 44(3): 75-81. ZHOU Changjiang, TANG Jinyuan, ZHONG Zhihua. Corner contact and impact friction of gear drive [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44 (3): 75-81.

[7] HU Shengyang, FANG Zongde, XU Yingqiang, et al. Meshing impact analysis of planetary transmission sys-

- tem considering the influence of multiple errors and its effect on the load sharing and dynamic load factor characteristics of the system [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part K Journal of Multi-body Dynamics*, 2021, 235(1): 57-74.
- [8] VEDMAR L, HENRIKSSON B. A general approach for determining dynamic forces in spur gears [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1998, 120(4): 593-598.
- [9] 王峰. 人字齿轮传动系统振动特性分析与试验研究 [D]. 西安: 西北工业大学, 2014.
- [10] 张卫青, 文怿恺, 郭晓东, 等. 基于切齿高阶运动的螺旋锥齿轮齿面修缘方法 [J]. *航空动力学报*, 2019, 34(1): 238-247.
- ZHANG Weiqing, WEN Yikai, GUO Xiaodong, et al. Tooth surface relief method of spiral bevel gear based on high-order cutting motion [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(1): 238-247.
- [11] SU Deyu, LUO Shangming, WANG Jian. Study on meshing force and rigid-flexible coupling dynamic simulation of cycloid drive [J]. *Advanced Materials Research*, 2014, 1039: 36-43.
- [12] HSIEH C F. Traditional versus improved designs for cycloidal speed reducers with a small tooth difference: the effect on dynamics [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 86: 15-35.
- [13] XU Lixin, YANG Yuhu. Dynamic modeling and contact analysis of a cycloid-pin gear mechanism with a turning arm cylindrical roller bearing [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 104: 327-349.
- [14] ZHANG Yueming, LI Liansong, JI Shuting. Influence of cycloid-pin gear design parameters on bearing capacity and optimized design [J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, 44(4): 123.
- [15] YU Hao, LIU Guanyi, WANG Yukun, et al. The impact of gap on meshing force in two-stage cycloidal gear drive[C]//2017 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2017: 760-763.
- [16] REN Zhongyi, MAO Shimin, GUO Wenchao, et al. Tooth modification and dynamic performance of the cycloidal drive [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 85: 857-866.
- [17] BLAGOJEVIĆ M, MATEJIĆ M, KOSTIĆ N. Dynamic behaviour of a two-stage cycloidal speed reducer of a new design concept [J]. *Tehnički Vjesnik*, 2018, 25(S2): 291-298.
- [18] 李兵, 杜俊伟, 陈磊, 等. 工业机器人RV减速器传动误差分析 [J]. *西安交通大学学报*, 2017, 51(10): 1-6, 46.
- LI Bing, DU Junwei, CHEN Lei, et al. Transmission error analysis for industrial robot RV reducer [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2017, 51(10): 1-6, 46.
- [19] JOHNSON K L. *Contact mechanics*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987.
- [20] 韩炬, 李威, 王志军. 采用分形理论与微分几何的摆线针轮形貌模型 [J]. *西安交通大学学报*, 2017, 51(11): 97-105, 136.
- HAN Ju, LI Wei, WANG Zhijun. Surface morphology models of cycloid and pin teeth based on fractal theory and differential geometry [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2017, 51(11): 97-105, 136.
- [21] ARTYOMOV I I, TCHUFISTOV E A, TCHUFISTOV O E. Analysis of static loading of meshing in planetary cycloid gear [C]//IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Bristol, UK: IOP Publishing, 2020: 012056.
- [22] HUNT K H, CROSSLEY F R E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42(2): 440-445.
- [23] 张大卫, 王刚, 黄田, 等. RV减速机动力学建模与结构参数分析 [J]. *机械工程学报*, 2001, 37(1): 69-74.
- ZHANG Dawei, WANG Gang, HUANG Tian, et al. Dynamic formulation of rv reducer and analysis of structural parameters [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2001, 37(1): 69-74.
- [24] LANKARANI H M, NIKRAVESH P E. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems[C]//ASME 1989 Design Technical Conferences. New York, NY, USA: ASME, 1989: 45-51.
- [25] FLORES P, MACHADO M, SILVA M T, et al. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics [J]. *Multibody System Dynamics*, 2011, 25(3): 357-375.

(编辑 杜秀杰)