

电力系统小干扰稳定性评估的多重谱变换方法

曹玉磊, 李崇涛, 何劲捷

(西安交通大学电气工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对电力系统小干扰稳定性分析过程中遗漏不稳定特征值的问题,提出了一种求解大规模系统不稳定特征值的多重谱变换方法。该方法首先利用所提出的多重谱变换将全部不稳定特征值映射为主导特征值;在利用 Krylov-Schur 方法收敛得到全部主导特征值之后,通过逆变换得到相应的不稳定特征值;该方法还揭示了指数变换与位移逆变换以及凯莱变换之间的内在联系。相较于位移逆变换和凯莱变换,多重谱变换方法由于具有类似于指数变换的良好谱特性,从而有利于特征值收敛;同时其又避免了指数变换引起的指数矩阵与向量的乘积,从而具有更高的计算效率和计算精度。在 Xingo6u 和 Xingo3012 这两个源于巴西互联电网上的算例分析结果表明,所提出的多重谱变换方法不仅保证了不遗漏不稳定特征值,而且相较于指数变换方法,计算精度提升了约 3 个数量级,计算耗时减少了 90% 以上。

关键词: 小干扰稳定性;Krylov-Schur 方法;谱变换;大规模系统

中图分类号: TM744 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202401020 **文章编号:** 0253-987X(2024)01-0208-09

A Multi-Spectral Transform Approach for Assessing Small Signal Stability in Power Systems

CAO Yulei, LI Chongtao, HE Jinjie

(School of electrical engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To address missing unstable eigenvalues in small signal stability analysis of power systems, a multi-spectral transform method for calculating the unstable eigenvalues of large-scale systems is proposed. Firstly, this method utilizes the proposed multi-spectral transform technique to map all unstable eigenvalues into dominant eigenvalues. Subsequently, the Krylov-Schur method is employed to ensure convergence and obtain all dominant eigenvalues. Finally, the inverse transformation allows for the retrieval of the corresponding unstable eigenvalues. Furthermore, this method establishes the intrinsic relationship between various transforms, including the exponential transform, shift-and-invert transform, and Cayley transform. Compared with the shift-and-invert transform and Cayley transform, the multi-spectral transform exhibits superior spectral performance akin to the exponential transform, facilitating eigenvalue convergence. At the same time, it avoids calculating the multiplication of exponential matrix and vector caused by the exponential transform, thereby having higher computational efficiency and accuracy. Experimental results obtained from the Xingo6u and Xingo3012 system of the Brazilian interconnected power grid demonstrate the effectiveness of this method. Notably, it ensures that unstable eigenvalues are not overlooked, enhances calculation accuracy by about 3 orders of magnitude, and reduces the calculation time by

收稿日期: 2023-04-01。 作者简介: 曹玉磊(1997—),男,博士生;李崇涛(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2022YFA1004600);国家自然科学基金资助项目(51977167)。

网络出版时间: 2023-10-17

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20231016.1443.014>

more than 90% compared to the exponential transform method.

Keywords: small signal stability; Krylov-Schur method; spectral transform; large-scale systems

保证小干扰稳定是互联电力系统安全稳定运行的前提^[1-2]。目前特征分析方法被广泛应用于评估大规模系统小干扰稳定性及优化阻尼控制器^[3-5]。其中根据是否需要求解系统的全部特征值,相应的算法可以分为全特征值算法^[6-8]和部分特征值算法^[9-15]。由于全特征值算法需要较大的计算量和内存占用量,因此其往往适用于小规模系统。此外,在小干扰分析过程中通常无需关注占绝大多数的阻尼特性较好的特征值。因此在大规模系统特征分析过程中采用最多的是部分特征值算法。此外,控制器参数设置不合理甚至错误将会导致系统产生不稳定特征值,且漏掉其中任意的不稳定特征值都会对系统的小干扰稳定性产生误判。

在现有小干扰稳定性分析软件中,最常用的部分特征值算法主要是隐式重启动 Arnoldi 算法^[11-13]。其在 PSD-SSAP、PEALS 等国内外众多小干扰商业软件中均已采用该算法^[16]。此外,与隐式重启动 Arnoldi 方法相比,Krylov-Schur 方法^[14-15]具有相同的时间复杂度,但其在数值稳定性上表现更好,同样该算法也被应用于 Matlab 等商业软件中。这两种算法的共同特点是均按模值递减的顺序收敛特征值,而判定系统小干扰稳定性的过程中所采用的是不稳定特征值,因此需要采用谱变换方法将不稳定特征值变换为具有最大模值的主导特征值。

目前在商业软件中常用的谱变换方法主要包括位移逆变换和凯莱变换^[17-19]。位移逆变换的特点是其将接近位移点的特征值变换为主导特征值。通过在虚轴或者弱阻尼比线上设定位移点,现有的商业软件便可以得到几乎全部弱阻尼特征值,但是这种方法可能会导致遗漏不稳定特征值。这是因为特征值的收敛性随着远离位移点而急速衰减,而右半平面上的特征值分布又无法预知。此外,凯莱变换可以将全部不稳定特征值变换成主导特征值,但经过映射后的不稳定特征值的主导性并不明显且可能产生特征值聚集的情况,从而使得特征值计算困难^[20]。这将导致对系统的小干扰稳定性产生误判。

相应地,指数变换^[20-22]在小干扰稳定性评估的过程中表现出了优异的谱性能。不稳定特征值经过指数变换后变得模值较大且远离其他特征值,使得收敛性显著提高,但该方法导致需要求解一个复杂的问题,即指数矩阵和向量的乘积。尽管可以利用 Krylov 子空间方法隐式地求解该乘积,但该乘积的

计算始终非常耗时且截断误差始终存在,这将严重影响特征值计算的效率与精度。

本文提出了多重谱变换方法来评估电力系统的小干扰稳定性,该方法与指数变换类似,在不稳定特征值计算过程中同样具有良好的谱特性,从而有利于特征值收敛;同时又避免了求解指数变换方法中引起的指数矩阵与向量的乘积,从而具有更高的计算效率和计算精度。最后采用来源于巴西互联电网的 Xin-go6u 和 Xingo3012 系统验证了所提出方法的有效性。

1 电力系统特征分析基础

下面将给出用于评估系统小干扰稳定性的数学模型及用于特征值计算的 Krylov-Schur 算法。

1.1 电力系统特征分析模型

电力系统的动态性能通常可用如下的非线性微分代数方程来表示

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 分别代表状态和代数变量。然后在系统运行的平衡点处对式(1)进行线性化,便可得到用于小干扰稳定性评估的模型

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{y} \\ \mathbf{0} = \tilde{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和 $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 表示相应的线性化矩阵。接下来通过消去 $\Delta \mathbf{y}$ 便可得到状态矩阵

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \quad (3)$$

根据 $\mathbf{A}$ 的不稳定特征值便可判断系统小干扰稳定性。考虑到矩阵 $\mathbf{A}$ 将失去系统的稀疏性,因此在特征值计算过程中将采用稀疏技术^[23],并不直接计算 $\mathbf{A}$ 。

1.2 Krylov-Schur 算法

对于矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和非零向量 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, Krylov 子空间 $\mathbf{K}_k(\mathbf{M}, \mathbf{u})$ 可表示为

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{M}, \mathbf{u}) = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{M}\mathbf{u}, \dots, \mathbf{M}^{k-1}\mathbf{u}\} \quad (4)$$

根据文献[15]可得到 k 阶 Krylov 分解

$$\mathbf{M}\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{B}_k + \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{b}_{k+1}^T \quad (5)$$

式中: $\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k] \in \mathbf{R}^{n \times k}$ 和 $\mathbf{u}_{k+1} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 是 Krylov 分解的一组标准正交基; $\mathbf{B}_k$ 为矩阵 $\mathbf{M}$ 关于 $\mathbf{U}_k$ 的 Rayleigh 商; $\mathbf{b}_{k+1}^T \in \mathbf{R}^{k \times 1}$ 。其中矩阵 $\mathbf{B}_k$ 为 Schur 矩阵,而不是上海森伯格(upper-Hessenberg)矩阵,因此通常更有利于执行矩阵操作。此外,该 k 阶 Krylov 分解可以利用经典的 Arnoldi 分解得到。

在得到 $\mathbf{B}_k$ 的 k 个特征值对 $(\mu_i, \mathbf{w}_i), i=1, \dots, k$ 后, Ritz 对 $(\mu_i, \mathbf{U}_k \mathbf{w}_i)$ 被认为是矩阵 $\mathbf{M}$ 特征值对的近似解。相应的残差 $\mathbf{r}_i$ 可表示为

$$\mathbf{r}_i = \|\mathbf{M} \mathbf{U}_k \mathbf{w}_i - \mu_i \mathbf{U}_k \mathbf{w}_i\| = \|\mathbf{b}_{k+1}^T \mathbf{w}_i\| \quad (6)$$

如果此时 $\mathbf{M}$ 的主导特征值并未满足精度要求, 就需要进一步采用重启动技术。首先对 $\mathbf{B}_k$ 进行有序实 Schur 分解, 得到

$$\mathbf{Q}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{S}_k \quad (7)$$

式中: $\mathbf{S}_k \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 为上三角矩阵; $\mathbf{Q}_k \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 为变换矩阵。 $\mathbf{S}_k$ 的对角元素代表了 $\mathbf{B}_k$ 的特征值。此外可以通过对 $\mathbf{Q}_k$ 的选取, 使得 $\mathbf{S}_k$ 的对角元素重新排列。

接下来对 k 个 Ritz 值 μ_i 重新排列, 得到

$$|\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_p| > |\mu_{p+1}| \geq \dots \geq |\mu_k| \quad (8)$$

其中不等式左侧的 p 个 Ritz 值是在收缩过程中需要保留的。然后根据式(8)对矩阵 $\mathbf{Q}_k$ 和 $\mathbf{S}_k$ 进行重新排列, 得到

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_p & * \\ & \tilde{\mathbf{S}}_{k-p} \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{Q}_k = [\tilde{\mathbf{Q}}_p, \tilde{\mathbf{Q}}_{k-p}] \quad (9)$$

式中: $\tilde{\mathbf{S}}_p \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $\tilde{\mathbf{S}}_{k-p} \in \mathbf{R}^{(k-p) \times (k-p)}$, $\tilde{\mathbf{Q}}_p \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 和 $\tilde{\mathbf{Q}}_{k-p} \in \mathbf{R}^{(k-p) \times (k-p)}$ 为分块矩阵; * 表示非 0 分块矩阵。在式(5)两侧同时右乘 $\mathbf{Q}_k$, 并且考虑到式(9)的形式, 可以得到

$$\mathbf{M}[\mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{Q}}_p, \mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{Q}}_{k-p}] = [\mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{Q}}_p, \mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{Q}}_{k-p}] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_p & * \\ & \tilde{\mathbf{S}}_{k-p} \end{bmatrix} + \mathbf{u}_{k+1} [\mathbf{b}_{k+1}^T \tilde{\mathbf{Q}}_p, \mathbf{b}_{k+1}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{k-p}] \quad (10)$$

接下来根据式(10)可以得到如下 p 阶 Krylov 分解

$$\tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{U}}_p = \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{B}}_p + \tilde{\mathbf{u}}_{p+1} \tilde{\mathbf{b}}_p^T \quad (11)$$

式中 $\tilde{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_k \tilde{\mathbf{Q}}_p$, $\tilde{\mathbf{B}}_p = \tilde{\mathbf{S}}_p$, $\tilde{\mathbf{u}}_{p+1} = \mathbf{u}_{k+1}$ 和 $\tilde{\mathbf{b}}_p^T = \mathbf{b}_{k+1}^T \tilde{\mathbf{Q}}_p$ 。在式(11)的基础上继续进行子空间扩展, 可以再次得到 k 阶 Krylov 分解

$$\tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{U}}_k = \tilde{\mathbf{U}}_k \tilde{\mathbf{B}}_k + \tilde{\mathbf{u}}_{k+1} \tilde{\mathbf{b}}_{k+1}^T \quad (12)$$

与式(5)相比, 从式(12)中得到的 Ritz 对将是矩阵 $\mathbf{M}$ 特征值对的更优近似。注意到 Krylov-Schur 算法优先收敛到具有较大模值的特征值, 因此需要采用谱变换方法将状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的最右特征值映射为矩阵 $\mathbf{M}$ 的主导特征值。

2 多重谱变换方法

下面将首先回顾常用的谱变换方法及其优缺点, 并给出所提出的多重谱变换方法的定义及其与常用谱变换方法之间的联系。

2.1 常用的谱变换方法

常用的谱变换方法包括位移逆变换和凯莱变换, 不同谱变换示意图如图 1 所示。其中位移逆变换的定义为

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I}_n)^{-1} \quad (13)$$

式中: s 表示位移点; $\mathbf{I}_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为单位矩阵。位移逆矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征值 μ_s 和特征向量 $\mathbf{v}_s$ 与状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{v}$ 之间的对应关系满足

$$\mu_s = (\lambda - s)^{-1} \text{ 和 } \mathbf{v}_s = \mathbf{v} \quad (14)$$

相应的谱变换示意图如图 1(c) 和图 1(f) 所示。当 λ 平面上的特征值越来越远离位移点 s , 对应的 μ_s 平面上的特征值主导性将迅速衰减。考虑到无法预知不稳定特征值的分布情况, 因此位移逆变换在用于判断小干扰稳定性时效果并不理想。

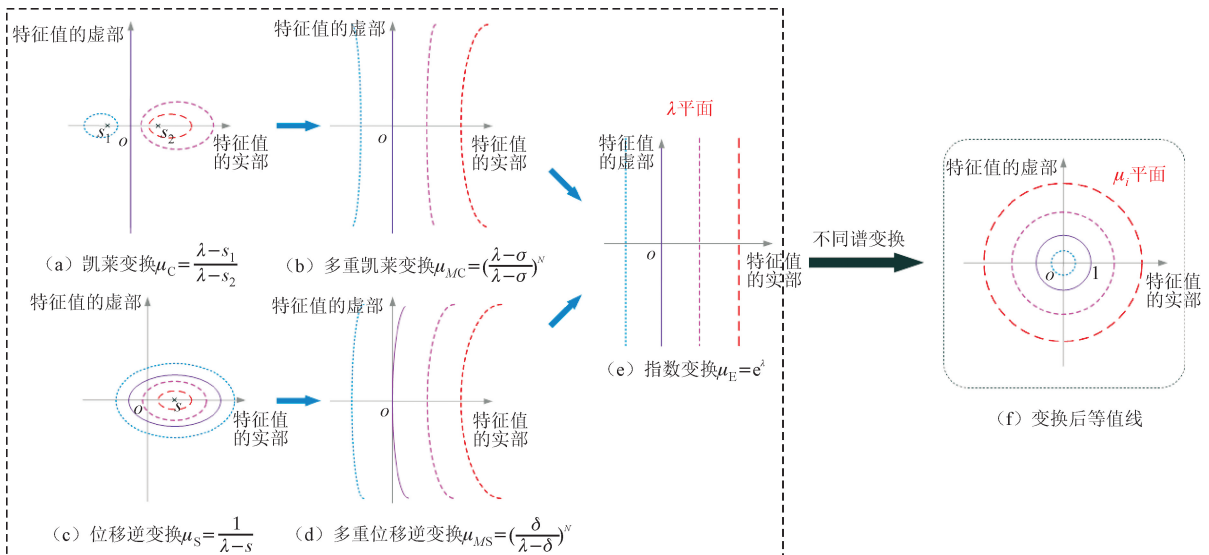


图 1 不同谱变换示意图

Fig. 1 Schematic diagram of different spectral transforms

此外,凯莱变换的定义为

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A} - s_1 \mathbf{I}_n)(\mathbf{A} - s_2 \mathbf{I}_n)^{-1} \quad (15)$$

式中: s_1 和 s_2 表示位移点。凯莱矩阵 $\mathbf{C}$ 的特征值 μ_C 和特征向量 $\mathbf{v}_C$ 与状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{v}$ 之间的对应关系满足

$$\mu_C = \frac{\lambda - s_1}{\lambda - s_2} \text{ 和 } \mathbf{v}_C = \mathbf{v} \quad (16)$$

从图1(a)和图1(f)中可以看出, λ 右半平面上的全部不稳定特征值也均被变换成 μ_C 平面上模比1大的主导特征值。同样地,当特征值 λ 远离位移点 s_2 ,相应的特征值 μ_C 主导性也迅速衰减。同时该映射导致变换后产生特征值聚集的情况,从而使得特征值收敛性降低,求解变得困难。

指数变换在不稳定特征值计算过程中表现出了良好的谱特性,其定义为

$$\mathbf{e}^A = \mathbf{I}_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (17)$$

相应地,指数矩阵 $\mathbf{e}^A$ 的特征值 μ_E 和特征向量 $\mathbf{v}_E$ 与状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{v}$ 之间满足

$$\mu_E = e^\lambda \text{ 和 } \mathbf{v}_E = \mathbf{v} \quad (18)$$

从图1(e)和图1(f)中可以看出,当 λ 的实部增大, μ_E 的主导性也随之增大。这种特性使得不稳定特征值与其他特征值很好地分离,进而有利于收敛。

2.2 存在的问题

位移逆变换和凯莱变换在被用于特征值计算时,谱性能不佳,从而可能导致遗漏不稳定特征值,进而对电力系统的小干扰稳定性产生误判。相较于位移逆变换和凯莱变换,指数变换在小干扰稳定性评估过程中具有更优异的谱特性,从而使得不稳定特征值易于收敛。

将指数变换作为 Krylov-Schur 算法的预处理方法时,在式(5)所示的子空间扩展过程中就不可避免的要计算指数矩阵和向量的乘积 $\mathbf{e}^A \mathbf{u}$ 。尽管文献[24]中给出了多种求解 $\mathbf{e}^A \mathbf{u}$ 的方法,但是对于无论哪种方法来说,求解 $\mathbf{e}^A \mathbf{u}$ 都是非常耗费计算量的。此外,考虑到 $\mathbf{e}^A$ 由无穷多项构成,计算 $\mathbf{e}^A \mathbf{u}$ 时截断误差的存在也将严重影响特征值计算精度。

下面分别根据位移逆变换和凯莱变换提出了多重谱变换方法,其在不稳定特征值计算过程中同样具有类似于指数变换的良好谱特性,从而易于特征值收敛;同时又避免了求解指数变换方法中引起的指数矩阵与向量的乘积,具有更高的计算效率和计算精度。

2.3 多重谱变换

根据位移逆变换构造的多重位移逆变换如下

$$\mathbf{M}_S = [\delta(\mathbf{A} - \delta \mathbf{I}_n)^{-1}]^N \quad (19)$$

式中:位移系数 $\delta = N/\alpha$, α 为放大系数。相应地,多重位移逆矩阵 $\mathbf{M}_S$ 的特征值 μ_{M_S} 和特征向量 $\mathbf{v}_{M_S}$ 与状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{v}$ 之间满足

$$\mu_{M_S} = \left(\frac{\delta}{\lambda - \delta} \right)^N \text{ 和 } \mathbf{v}_{M_S} = \mathbf{v} \quad (20)$$

可以看出当 $N=1$ 时,多重位移逆变换便成为位移逆变换。此外,当 N 趋近于无穷大时,特征值 μ_{M_S} 的主导性与指数变换后特征值 e^λ 的主导性一致。具体证明过程如下式

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} |\mu_{M_S}| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{N/\alpha}{\lambda - N/\alpha} \right)^N \right| = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{\alpha\lambda}{N - \alpha\lambda} \right)^N \right| &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\left(1 + \frac{\alpha\lambda}{N - \alpha\lambda} \right)^{\frac{N - \alpha\lambda}{\alpha\lambda}} \right)^{\frac{\alpha\lambda N}{N - \alpha\lambda}} \right| &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\left(1 + \frac{\alpha\lambda}{N - \alpha\lambda} \right)^{\frac{N - \alpha\lambda}{\alpha\lambda}} \right)^{\frac{\alpha\lambda}{1 - \alpha\lambda/N}} \right| &= |e^\lambda| \quad (21) \end{aligned}$$

相应的谱变换示意图如图1(d)和图1(f)所示,但注意到多重位移逆变换并不能严格保证 λ 右半平面上的全部不稳定特征值被变换成 μ_{M_S} 平面上模比1大的主导特征值。

因此下面进一步根据凯莱变换构造了多重凯莱变换,其定义如下

$$\mathbf{M}_C = [(\mathbf{A} + \sigma \mathbf{I}_n)(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}_n)^{-1}]^N \quad (22)$$

式中:位移系数 $\sigma = 2N/\alpha$, α 为放大系数。相应地,多重凯莱变换矩阵 $\mathbf{M}_C$ 的特征值 μ_{M_C} 和特征向量 $\mathbf{v}_{M_C}$ 与状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{v}$ 之间的一一对应关系满足

$$\mu_{M_C} = \left(\frac{\lambda + \sigma}{\lambda - \sigma} \right)^N \text{ 和 } \mathbf{v}_{M_C} = \mathbf{v} \quad (23)$$

可以看出当 $N=1$ 时,多重凯莱变换就是凯莱变换。此外,当 N 趋近于无穷大时,特征值 μ_{M_C} 的主导性也与指数变换后特征值 e^λ 的主导性一致。具体证明过程如下式

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} |\mu_{M_C}| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{\lambda + 2N/\alpha}{\lambda - 2N/\alpha} \right)^N \right| = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{\alpha\lambda}{N - \alpha\lambda/2} \right)^N \right| &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\left(1 + \frac{\alpha\lambda}{N - \alpha\lambda/2} \right)^{\frac{N - \alpha\lambda/2}{\alpha\lambda}} \right)^{\frac{\alpha\lambda N}{N - \alpha\lambda/2}} \right| &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \left(\left(1 + \frac{\alpha\lambda}{N - \alpha\lambda/2} \right)^{\frac{N - \alpha\lambda/2}{\alpha\lambda}} \right)^{\frac{\alpha\lambda}{1 - \alpha\lambda/2N}} \right| &= \\ |e^\lambda| & \quad (24) \end{aligned}$$

从图1(b)和图1(f)可以看出, λ 右半平面上的

全部不稳定特征值均被多重凯莱变换变换成 μ_{M_C} 平面上模比1大的主导特征值。考虑到多重位移逆变换并不能保证这一点,因此在以下分析中均以多重凯莱变换为例进行。此外,多重凯莱变换在具有类似于指数变换的谱特性的同时,又成功避免了求解 $e^{A}u$ 以及由此带来的高计算量和计算误差。

此外,在得到多重凯莱变换矩阵 M_C 的特征值 μ_{M_C} 和特征向量 v_{M_C} 后,考虑到 $\lambda v_{M_C} = A v_{M_C}$,相应的逆变换过程如下

$$\lambda = \frac{v_{M_C}^H A v_{M_C}}{v_{M_C}^H v_{M_C}} \text{ 和 } v = v_{M_C} \quad (25)$$

式中: H 表示共轭转置。此外,特征向量 v_{M_C} 通常是归一化的,也就是满足 $v_{M_C}^H v_{M_C} = 1$ 。

需要说明的是,适当的增大系数 α 可以增强多重凯莱变换和指数变换的谱性能,从而更有利于特征值的收敛,但在指数变换中增大 α 将会增大求解 $e^{A}u$ 计算量。下面给出简要说明。 $e^{A}u$ 为如下线性时不变系统在 $t=\alpha$ 时的解

$$\dot{x} = Ax, x(0) = u \quad (26)$$

其可以通过数值积分方法在区间 $[0, \alpha]$ 上积分得到。显而易见,增大 α 将使得积分区间变长,进而增加求解 $e^{A}u$ 的计算量。然而在多重凯莱变换中改变系数 α 并不会影响求解多重凯莱矩阵与向量乘积 $M_C u$ 的计算量。因此在多重凯莱变换中可以令 $\alpha > 1$ 来增强其谱性能。

3 算法流程

在 Krylov-Schur 算法中采用多重凯莱变换方法作为预处理方法,也就是令 $M = M_C$ 。全部不稳定特征值被多重凯莱变换映射为主导特征值,从而易于收敛得到。相应的计算流程如图2所示。其中, k 表示 Krylov 分解的维数; ϵ 表示收敛容差。此外重启过程中保留的 Ritz 值的数量 p 应该略大于模比1大的特征值数 q 。此外,相比于隐式重启 Arnoldi 算法,这里采用的 Krylov-Schur 算法除了具有数值稳定性高的优势外,还可以保证子空间的扩展均在实数域进行,从而在尽可能地避免复数运算的同时进一步提高计算效率。

4 算例分析

在来源于巴西互联电网的 Xingo6u 和 Xingo3012 系统上验证所提出方法的有效性。其中巴西互联电网^[25]包含173台同步机、5 056条支路和3 584条母线。Xingo6u 和 Xingo3012 系统分别有

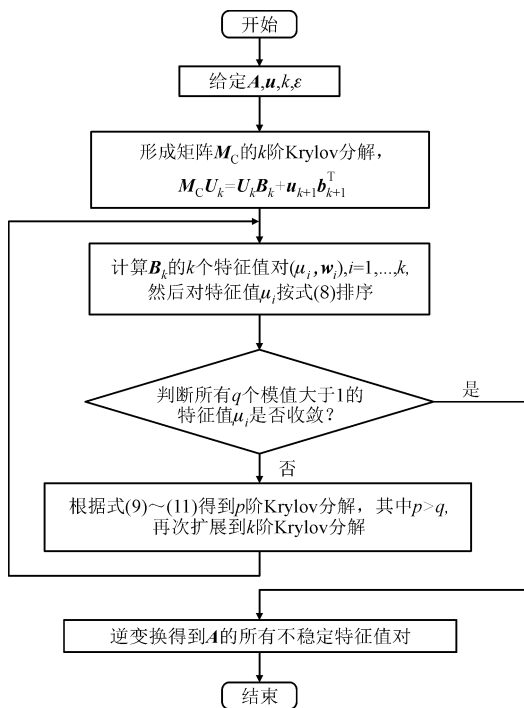


图2 不稳定特征值计算的流程

Fig. 2 Procedures of unstable eigenvalues calculation

2 940和3 012个状态变量,17 798和17 932个代数变量,73 916和74 386个非零元素。相关测试在一台装有 Intel i7 处理器和 16 GB 内存的台式机上采用 Matlab 编程实现。收敛容差设置为 10^{-6} 。本文中所提出的多重凯莱变换中 N 设为10,放大系数 α 设为2。

4.1 不同谱变换谱性能对比

对比经过不同谱变换后特征值分布的差异。考虑到凯莱变换可以将全部不稳定特征值变换为主导特征值,下面将首先给出如图3所示 Xingo6u 和 Xingo3012 系统经过凯莱变换($s_1 = -1, s_2 = 1$)后的特征值分布。尽管全部不稳定特征值被映射为主导特征值,但其并未与其他特征值很好地分离,反而相互聚集,导致特征值收敛困难。以 Xingo6u 系统为例,当 Krylov 子空间维数设为60,最大重启次数设为50时,仍无法收敛到全部不稳定特征值。这将会对系统的小干扰稳定性产生误判。

测试系统经过位移逆变换($s=1$)后的特征值分布如图4所示。从图4可以看出,位移逆变换并不能保证将全部不稳定特征值变换成模比1大的主导特征值。考虑到右半平面上的不稳定特征值分布情况又无法预知,因此位移逆变换在判断小干扰稳定性时性能不佳,可能导致遗漏不稳定特征值的情况发生。

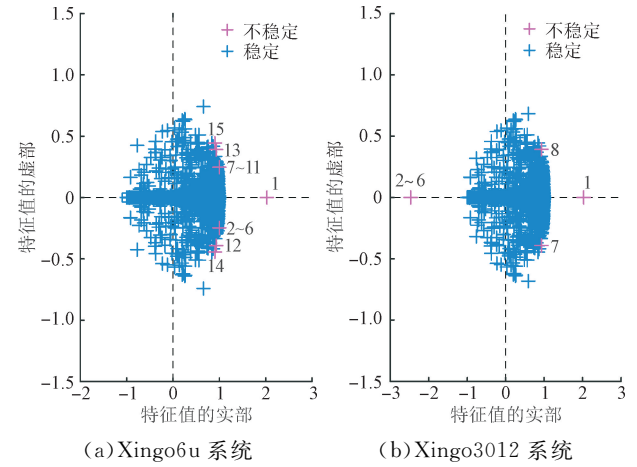


图 3 Xingo6u 系统和 Xingo3012 系统经凯莱变换后的特征值分布

Fig. 3 The eigenvalue distributions of Xingo6u system and Xingo3012 system after Cayley transform

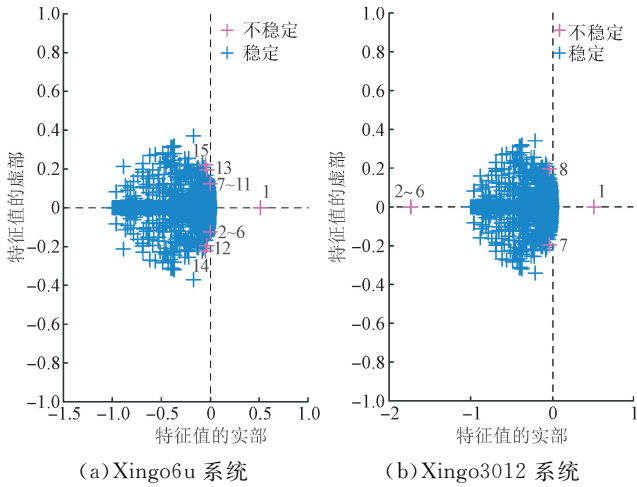


图 4 Xingo6u 系统和 Xingo3012 系统经位移逆变换后的特征值分布

Fig. 4 The eigenvalue distributions of Xingo6u system and Xingo3012 system after shift-and-invert transform

Xingo6u 系统和 Xingo3012 系统经指数变换后的特征值分布如图 5 所示。从图 5 可以看出,作为对比,指数变换可以将全部不稳定特征值变换成主导特征值且与其他特征值较好地分离,从而有利于特征值的收敛。当 Krylov 子空间维数设为 60,经过 2 次重启启动便可收敛到两个测试系统全部不稳定特征值。但指数变换的缺陷在于其需要求解复杂的 $e^{\lambda}u$ 。

对于所提出的多重凯莱变换来说,在具有类似于指数变换的谱性能的同时避免了直接求解 $e^{\lambda}u$,从而显著降低了计算的复杂度。经多重凯莱变换后的特征值分布如图 6 所示。此外,本文通过引入放大系数 α 进一步提升了其谱性能。当 $\alpha = 2$ 时,仅需要经过 1 次重启启动便可收敛到两个测试系统的全部不

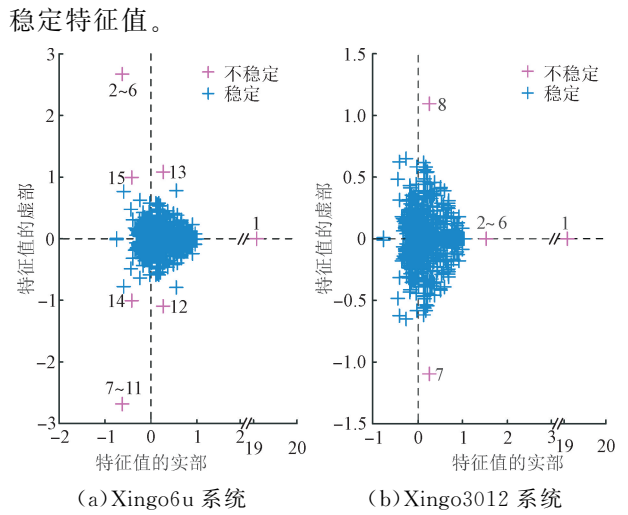


图 5 Xingo6u 系统和 Xingo3012 系统经指数变换后的特征值分布

Fig. 5 The eigenvalue distributions of Xingo6u system and Xingo3012 system after exponential transform

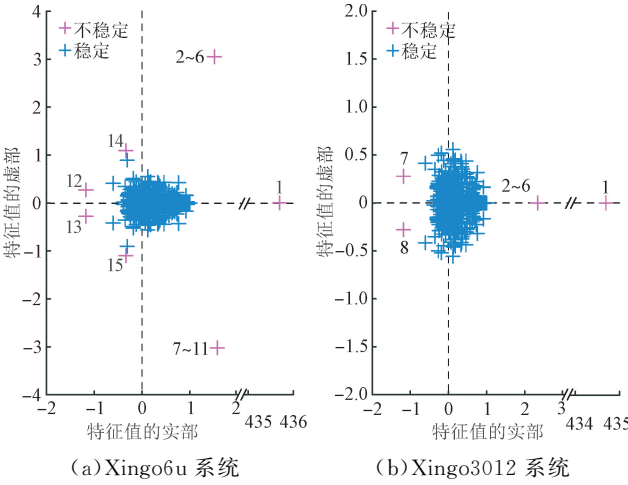


图 6 Xingo6u 系统和 Xingo3012 系统经多重凯莱变换后的特征值分布

Fig. 6 The eigenvalue distributions of Xingo6u system and Xingo3012 system after multi-Cayley transform

综上所述,与凯莱变换、位移逆变换和指数变换相比,通过引入放大系数 α ,本文提出的多重谱变换在谱主导性和谱稀疏性方面表现更好。这使得 Krylov 子空间方法更易收敛得到所有的不稳定特征值,从而避免对系统的小干扰稳定性产生误判。

4.2 计算精度和效率测试

在得到多重凯莱矩阵的全部主导特征值及特征向量后,经过逆变换便可得到 Xingo6u 和 Xingo3012 系统的不稳定特征值 λ 及特征向量 v 。不稳定特征值 λ 与误差 $\|Av - \lambda v\|$ 见表 1。考虑到指数变换也可得到系统的全部不稳定特征值,其结果也在表 1 中给出。

表 1 系统的不稳定特征值与误差
Table 1 Unstable eigenvalues of the systems

系统	序号	不稳定特征值	$\ \mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} \ / 10^{-6}$	
			多重凯莱变换	指数变换
Xingo6u	1	2.948 288 9	0.003 6	5.2
	2~11	1.013 599 5± j8.083 197 3	0.024 0	8.6
	12~13	0.116 786 0± j4.950 624 1	0.047 0	78.0
	14~15	0.082 237 9± j4.318 081 0	0.089 0	130.0
Xingo3012	1	2.947 326 1	0.002 8	65.0
	2~4	0.424 439 1	0.005 7	41.0
	5	0.423 891 6	0.015 0	78.0
	6	0.423 615 3	0.024 0	95.0
	7~8	0.119 538 3± j4.949 711 6	0.046 0	840.0

从表 1 可以看出,相较于指数变换,多重凯莱变换的计算精度提高了约 3 个数量级。这是因为对于指数变换来说,求解 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{u}$ 的过程中截断误差的存在严重影响了特征值计算的精度。多重凯莱变换避免了直接求解 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{u}$, 因此特征值求解精度显著提高。此外,为了直观起见,Xingo6u 和 Xingo3012 系统的特征值分布如图 7 所示。

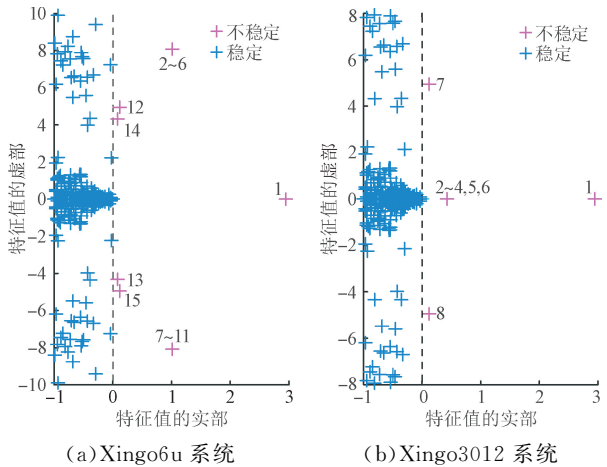


图 7 Xingo6u 系统和 Xingo3012 系统的特征值分布
Fig. 7 The eigenvalue distributions of Xingo6u system and Xingo3012 system

进一步测试所提出的多重凯莱变换的计算效率。具体计算效率测试结果见表 2,其中 N_{IR} 表示重

启动次数。根据 4.1 节可知,位移逆变换和凯莱变换并不能保证收敛到全部不稳定特征值,因此并未对这两种方法进行计算效率对比。

表 2 计算效率测试结果
Table 2 Tests of computational efficiency

系统	N_{IR}			耗时/s		
	多重凯莱变换	指数变换	指数变换	多重凯莱变换	指数变换	指数变换
	变换	$\alpha=1$	$\alpha=2$	变换	$\alpha=1$	$\alpha=2$
Xingo6u	1	2	1	1.85	34.3	49.4
Xingo3012	1	2	1	2.04	37.5	52.3

当 Krylov 子空间维数设为 60 时,多重凯莱变换经过 1 次重启动便可得到 Xingo6u 和 Xingo3012 系统的全部不稳定特征值;当 $\alpha = 1$ 时指数变换方法需要重启动 2 次。此外当 α 进一步设置为 2 时,指数变换方法也仅需要重启动 1 次。对于指数变换来说,增大 α 反而使得耗时增加。这是因为增大 α 尽管使得重启动次数减少了,但求解 $\mathbf{e}^{2\mathbf{A}} \mathbf{u}$ 也相比于求解 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{u}$ 的计算量反而增大了约两倍。

作为对比,多重凯莱变换的计算耗时减少了 90% 以上。这是因为一方面求解 $\mathbf{M}_c \mathbf{u}$ 的计算量相比于 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{u}$ 大大降低;另一方面通过引入放大系数 α 增强了多重凯莱变换的谱性能,使重启动次数相应减少。

5 结 论

文中提出了用以评估电力系统的小干扰稳定性的多重谱变换方法,该方法的主要优点如下。

(1)相较于位移逆变换和凯莱变换,多重谱变换方法由于具有类似于指数变换的良好谱特性,特征值易于收敛。

(2)多重谱变换方法又避免了求解指数变换方法引起的 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}} \mathbf{u}$ 以及由此带来的高计算量和计算误差,从而具有更高的计算效率和计算精度。

(3)通过引入放大系数 α 进一步提高了多重谱变换方法的收敛性,进而减少了特征值计算过程所采用的重启动次数。

(4)根据所提出的多重谱变换方法,文中也揭示了指

数变换与位移逆变换和凯莱变换的内在联系。
(5)相较于隐式重启动 Arnoldi 算法,文中通过采用 Krylov-Schur 算法使得所有子空间扩展均在实数域内进行,从而尽可能地避免了复数运算。

参考文献:

- [1] 王锡凡. 现代电力系统分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [2] KUNDUR P. Power system stability and control [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1994.
- [3] 王康, 李子恒, 杨超然, 等. 面向大型新能源基地小干扰稳定性提升的调相机选址方法 [J]. 电力系统自动化, 2022, 46(4): 66-74.
WANG Kang, LI Ziheng, YANG Chaoran, et al. Siting method of synchronous condenser for small-signal stability improvement of large-scale renewable energy base [J]. Automation of Electric Power Systems, 2022, 46(4): 66-74.
- [4] 索江镭, 胡志坚, 刘宇凯, 等. 大规模光伏发电并网对互联电力系统阻尼特性的影响及其阻尼控制策略 [J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(2): 99-105.
SUO Jianglei, HU Zhijian, LIU Yukai, et al. Influence of large-scale photovoltaic system integration on damping characteristics of interconnected grid and damping control [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2015, 49(2): 99-105.
- [5] 朱振青, 王新. 复杂电力系统中电力系统稳定器的参数优化 [J]. 西安交通大学学报, 1989, 23(S1): 71-77.
ZHU Zhenqing, WANG Xin. Parameter optimization of PSS in multimachines power systems [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1989, 23(S1): 71-77.
- [6] MA Jian, DONG Zhaoyang, ZHANG Pei. Comparison of BR and QR eigenvalue algorithms for power system small signal stability analysis [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2006, 21(4): 1848-1855.
- [7] 赵文恺, 严正, 房鑫炎, 等. 电力系统小信号稳定全特征值分析的改进 BR 算法 [J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(10): 1599-1608.
ZHAO Wenkai, YAN Zheng, FANG Xinyan, et al. Complete eigen analysis of power system small signal stability using the improved BR algorithm [J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(10): 1599-1608.
- [8] 张逸飞, 严正, 赵文恺, 等. 基于 GPU 的分块约化算法在小干扰稳定分析中的应用 [J]. 电力系统自动化, 2015, 39(22): 90-97.
ZHANG Yifei, YAN Zheng, ZHAO Wenkai, et al. Application of GPU-based block reduction algorithm in power system small-signal stability analysis [J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39(22): 90-97.
- [9] 岳涵, 赵登福, 夏道止, 等. 求解大型电力系统机电振荡模态的逆幂方法 [J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(10): 93-98.
YUE Han, ZHAO Dengfu, XIA Daozhi, et al. Inverse power algorithm for solving electromechanical modes of large-scale power system [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(10): 93-98.
- [10] 杜正春, 刘伟, 方万良, 等. 大规模电力系统关键特征值计算的 Arnoldi-Chebyshev 方法 [J]. 西安交通大学学报, 2004, 38(10): 995-999.
DU Zhengchun, LIU Wei, FANG Wanliang, et al. Calculation of critical eigenvalues in large-scale power systems using Arnoldi-Chebyshev method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2004, 38(10): 995-999.
- [11] 田鹏飞, 刘崇茹, 负飞龙, 等. 一种动态扩维的 IRA 算法及其在电力系统关键特征值计算中的应用 [J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(17): 4318-4325.
TIAN Pengfei, LIU Chongru, YUN Feilong, et al. An improved IRA algorithm and its application in computation of critical eigenvalues in small signal stability analysis [J]. Proceedings of the CSEE, 2015, 35(17): 4318-4325.
- [12] LIU Chongru, LI Xiao, TIAN Pengfei, et al. An improved IRA algorithm and its application in critical eigenvalues searching for low frequency oscillation analysis [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(4): 2974-2983.
- [13] 杜正春, 李崇涛, 潘艳菲, 等. 一种求取大规模电力系统关键特征值的有效方法 [J]. 电力系统自动化, 2014, 38(2): 53-58.
DU Zhengchun, LI Chongtao, PAN Yanfei, et al. An efficient method for computing critical eigenvalues of large-scale power systems [J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(2): 53-58.
- [14] LI Yongjie, GENG Guangchao, JIANG Quanyuan. An efficient parallel Krylov-Schur method for eigenanalysis of large-scale power systems [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(2): 920-930.
- [15] 仲悟之. 大型电力系统小干扰稳定性分析方法研究和软件开发 [D]. 北京: 中国电力科学研究院, 2005.
- [16] 励刚, 苏寅生, 陈陈. 面向对象的多谱变换隐式重启 Arnoldi 算法 [J]. 电力系统自动化, 2001, 25(8): 24-27.
LI Gang, SU Yinsheng, CHEN Chen. Object-oriented multi-spectrum transformation implicit restarted Arnoldi algorithm [J]. Automation of Electric Power Systems, 2001, 25(8): 24-27.
- [17] 谷寒雨, 陈陈. 一种新的大型电力系统低频机电模式

- 计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(9): 50-54.
- GU Hanyu, CHEN Chen. A new algorithm for the computation of low frequency electro-mechanical oscillation modes of large power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(9): 50-54.
- [18] MEERBERGEN K, SPENCE A, ROOSE D. Shift-invert and Cayley transforms for detection of rightmost eigenvalues of nonsymmetric matrices[J]. Bit Numerical Mathematics, 1994, 34(3): 409-423.
- [19] 陈亦平, 曹玉磊, 赵利刚, 等. 基于指数变换的电力系统不稳定特征值计算方法[J]. 电力系统自动化, 2023, 47(3): 161-168.
- CHEN Yiping, CAO Yulei, ZHAO Ligang, et al. Calculation method for unstable eigenvalue of power system based on exponential transformation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2023, 47(3): 161-168.
- [20] CAO Yulei, LI Chongtao, YAN Chenguang, et al. An exponential transform based dual-layer Krylov subspace method for computing unstable modes of power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2023, 38(2): 1596-1607.
- [21] ROSTAMI M W, XUE Fei. Robust linear stability analysis and a new method for computing the action of the matrix exponential[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2018, 40(5): A3344-A3370.
- [22] 杜正春, 刘伟, 方万良, 等. 小干扰稳定性分析中一种关键特征值计算的稀疏实现[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(2): 17-21.
- DU Zhengchun, LIU Wei, FANG Wanliang, et al. A sparse method for the calculation of critical eigenvalue in small signal stability analysis[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(2): 17-21.
- [23] MOLIER C, VAN LOAN C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later[J]. SIAM Review, 2003, 45(1): 3-49.
- [24] ROMMES J, MARTINS N, FREITAS F D. Computing rightmost eigenvalues for small-signal stability assessment of large-scale power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2010, 25(2): 929-938.
- [25] ROMMES J. Examples from the Brazilian power system[EB/OL]. [2023-03-08]. <http://sites.google.com/site/rommes>.

(编辑 武红江)

(上接第207页)

- al. Multiobjective intelligent energy management for a microgrid[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60(4): 1688-1699.
- [21] XU Meimei, GU Tingyun, QIN Jian, et al. GA based multi-objective operation optimization of power microgrid[C]//2019 International Conference on Intelligent Transportation, Big Data & Smart City (ICITBS). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019: 103-107.
- [22] SONG Malin, XIE Qianjiao, SHEN Zhiyang. Impact of green credit on high-efficiency utilization of energy in China considering environmental constraints[J]. Energy Policy, 2021, 153: 112267.
- [23] ZHAO Yang, LI Yan, ZHOU Fengyu, et al. An iterative learning approach to identify fractional order Ki-BaM model[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2017, 4(2): 322-331.
- [24] KATOCH S, CHAUHAN S S, KUMAR V. A review on genetic algorithm: past, present, and future[J]. Multimedia Tools and Applications, 2021, 80(5): 8091-8126.
- [25] 黄明华, 刘广新, 何雅玲, 等. 基于遗传算法的太阳能烟囱发电站结构优化[J]. 西安交通大学学报, 2021, 55(10): 1-10.
- HUANG Minghua, LIU Guangxin, HE Yaling, et al. Structural optimization of solar chimney power plant by a genetic algorithm[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2021, 55(10): 1-10.
- [26] WANG Wentao, TIAN Jun. An improved nonlinear tuna swarm optimization algorithm based on circle chaos map and levy flight operator[J]. Electronics, 2022, 11(22): 3678.
- [27] MAFARJA M M, MIRJALILI S. Hybrid whale optimization algorithm with simulated annealing for feature selection[J]. Neurocomputing, 2017, 260: 302-312.
- [28] 闫群民, 马瑞卿, 马永翔, 等. 一种自适应模拟退火粒子群优化算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2021, 48(4): 120-127.
- YAN Qunmin, MA Ruiqing, MA Yongxiang, et al. Adaptive simulated annealing particle swarm optimization algorithm[J]. Journal of Xidian University, 2021, 48(4): 120-127.

(编辑 亢列梅)