

轻质二级惯性放大超结构超低频宽带隙形成机理

李锁斌^{1,2}, 李姮媛^{1,2}, 刘少胡^{1,2}, 刘振航^{1,2}, 李瑞³

(1. 西安石油大学机械工程学院, 710065, 西安; 2. 国家油气钻井装备工程技术研究中心, 721002, 陕西宝鸡; 3. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对轻质超结构在实现超低宽频带隙时面临的轻量化与低频宽频带性能难以协同的固有矛盾,提出了一种基于运动分解与转换机制的二级惯性放大轻质超结构超低宽频带隙协同设计理论与方法。通过耦合杆系惯性放大机构与丝杠惯容机构为具体实现构型,构建具有超低频特性的轻质二级惯性放大振子,并将其引入超结构中,实现了轻质、超低频与宽频带的协同设计。研究结果表明:该振子主模态激发的二级惯性放大机制所产生的大等效惯性质量,不仅赋予振子超低频特性,还形成了强惯性效应与强模态抑制力,从而在轻质超结构中形成超低频宽频带。该型超结构带隙起始频率可降至 6.32 Hz,相较于相同参数的单级惯性放大超结构降低了 77.6%,相对带宽拓宽了 26.3 倍。斜杆倾角、飞轮的几何参数及螺杆导程是调控惯性放大系数的关键参数,通过多参数协同设计优化,可实现目标带隙的精准调控。本文提出的二级惯性放大轻质超结构协同设计方法,通过提升惯性放大系数,有效突破了结构轻量化与超低宽频带隙难以共存的固有矛盾。

关键词: 超低宽频带隙;超结构;惯性放大;轻量化

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202610021 **文章编号:** 0253-987X(2026)10-0242-11

Formation Mechanism of Ultra-Low-Frequency Broadband Bandgap in Lightweight Two-Stage Inertial Amplification Metastructure

LI Suobin^{1,2}, LI Hengyuan^{1,2}, LIU Shaohu^{1,2}, LIU Zhenhang^{1,2}, LI Rui³

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China;
2. National Engineering Research Center for Oil and Gas Drilling Equipment, Baoji, Shaanxi 721002, China;
3. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To address the inherent contradiction between lightweight design and low-frequency broadband bandgap performance in lightweight metastructures, a synergistic design theory and method for ultra-low-frequency broadband bandgaps in lightweight two-stage inertial amplification metastructures based on the motion decomposition and conversion mechanism are proposed. By coupling a linkage-based inertial amplification mechanism with a screw-type inerter mechanism as the specific physical configuration, a lightweight two-stage inertial amplification resonator with ultra-low-frequency characteristics is constructed and introduced into the metastructure, whereby a synergistic design of lightweight characteristics, ultra-low-frequency performance, and broadband

收稿日期: 2026-02-27。 作者简介: 李锁斌(1984—),男,副教授,硕士生导师;刘少胡(通信作者),男,教授,博士生导师。
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52374002);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2026JC-YBMS-0614);西安石油大学研究生创新基金资助项目(YCX2612043)。

网络出版时间: 2026-05-09

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20260509.1529.007>

bandgap is achieved. It is revealed by the research results that a large equivalent inertial mass is generated by the two-stage inertial amplification mechanism excited by the dominant mode of the resonator. This substantial mass not only endows the resonator with ultra-low-frequency characteristics but also produces a strong inertial effect and strong modal suppression forces, whereby an ultra-low-frequency broadband bandgap is established within the lightweight metastructure. It is further demonstrated that the bandgap starting frequency of this type of metastructure can be reduced to 6.32 Hz, which is decreased by 77.6% compared to a single-stage inertial amplification metastructure with identical parameters, while the relative bandwidth is broadened by a factor of 26.3. The inclination angle of the inclined rod, the geometric parameters of the flywheel, and the screw lead are identified as the key parameters for regulating the inertial amplification factor. Through multi-parameter synergistic design optimization, precise regulation of the target bandgap can be achieved. By enhancing the inertial amplification factor, the inherent contradiction between structural lightweighting and ultra-low-frequency broadband bandgaps is effectively overcome by the synergistic design method for lightweight two-stage inertial amplification metastructures proposed in this paper.

Keywords: ultra-low-frequency broadband bandgap; metastructure; inertial amplification; lightweighting

超低频(10 Hz 以内)振动的强穿透与慢衰减特性,使其成为工程振动控制领域的典型难题,并严重制约了高端精密装备的性能极限与服役可靠性^[1]。传统抑振策略受限于附加质量、能耗或系统的复杂性,难以兼顾轻量化与高效承载的设计要求。近年来,基于带隙调控的超结构为低频振动抑制提供了新范式^[2-5]。然而,如何在满足轻量化与承载需求的同时实现超低频的高效抑制,仍是该领域面临的核心挑战。

当前,基于局域共振原理构建的超结构在亚波长尺度上展现出对低频(10~100 Hz)振动的抑制能力^[6],但其带隙特性严重依赖于振子的固有频率。为实现更低的带隙拓展,通常需显著增加振子的质量,这不仅与结构轻量化目标相冲突,也易导致带隙窄化^[7]。因此,传统局域共振机制在实现轻质、超低频宽带减振方面存在固有局限,亟需发展超越经典共振理论的新设计范式与物理机制。

为克服上述局限,近年来惯性放大机制被引入超结构设计中,形成了杆系型和惯容型超结构。该机制通过特定的机构运动或运动转换,可放大系统的等效惯性质量,从而赋予轻质结构以低频特性,结合超结构的周期调制特性,可在理论上形成轻量化的超低宽频振动带隙。目前,实现惯性放大的主要途径包括基于几何位移放大的杆系放大机构^[8]和基于平-转动运动转换的惯容机构^[9]两类。在现有研究中,惯性放大机构多用于构建传统动力吸振器^[10-11],这样虽能实现低频、超低频中单频点的高效抑制,但因受限于单自由度的调谐机制,其窄带特性难以兼顾宽频带振动抑制需求。相较之下,将惯

性放大机制引入超结构周期化设计中,则为轻质超结构的超低宽频带隙的实现提供了新的可能。

在杆系型超结构方面,自 Yilmaz 等^[8]开创性地利用杆系结构产生惯性效应以实现低频减振以来,研究者通过引入菱形连杆^[12]、剪刀结构^[13]或与局域共振耦合^[14-15],进一步降低了带隙起始频率并拓展了带宽,同时在梁^[16-18]、板^[19-21]及管道结构^[22]中验证了其轻量化低频减振效果。然而,该机构受限于倾角与杆长比,以至于惯性放大效果仍然有限,使得该类型的超结构仍难以实现 10 Hz 以内的超低频振动带隙。相比之下,惯容型超结构^[23]的研究在近年来逐渐兴起,理论研究表明:该结构能有效降低带隙频率、拓宽减振带宽,并具有显著的小质量、大惯量的优势,甚至可与杆系机构联合以进一步提升性能^[24-28]。然而,现有研究多集中于理论建模与分析,缺乏系统的机理探索、物理实现与实验验证。同时,轻量化、超低频与宽频带隙的协同实现仍具挑战。因此,如何进一步提升惯性放大,并形成轻质二级惯性放大振子(图 1(e))效果,构建兼具轻质、超低频、宽带隙特性的高性能超结构是目前轻量化超低频减振面临的一项难题。

为此,本文提出一种基于运动分解与转换机制的二级惯性放大轻质超结构设计理论与方法。通过耦合杆系惯性放大机构与丝杠惯容机构为具体构型,构建具有高阶惯性放大效应的振子,在保持轻量化的前提下可大幅提升系统等效惯性质量,将其引入超结构中,通过揭示其超低宽频振动带隙的形成机理与调控规律,建立面向该带隙的协同设计方法。

该研究旨在通过提升惯性放大系数,同时实现轻质、超低频和宽带隙特性,为突破轻量化超低频宽带减振的现有局限提供新的理论支撑与设计方法。

1 轻质二级惯性放大振子超低频振动特性机理模型

图1展示了轻质二级惯性放大振子超低频振动特性机理模型。图中, l_0 为无质量刚性杆长度; k 为弹簧弹性系数; θ 为初始状态下刚性杆与竖直方向的夹角; $m_1/2$ 为小质量块质量; u_1 为水平方向产生的位移幅值; u_2 为竖直方向产生的位移幅值; m_2 、 m_s 、 m_f 分别为螺母、螺杆、飞轮的质量; l_d 、 α 分别为

螺杆导程和转角; r_s 、 r_f 分别为螺杆、飞轮的半径; m 为轻质高频振子的实际质量; M_{eq} 为轻质超低频振子的等效惯性质量。由图可知,首先,通过菱形四连杆机构(图1(a))将竖直方向的小位移转化为水平方向的大位移,从而实现第一级惯性放大;其次,通过铰链驱动螺母轴向平动,丝杠惯容机构(图1(b))进一步将平动转化为飞轮的大幅旋转,从而实现第二级惯性放大,并形成轻质二级惯性放大振子(图1(e));最后,在一、二级惯性放大耦合机制协同作用下,最终使传统轻质振子(图1(c))以极轻的物理质量,产生远大于自身质量且易于调节的等效惯性质量(图1(d)),从而实现超低频振动特性。

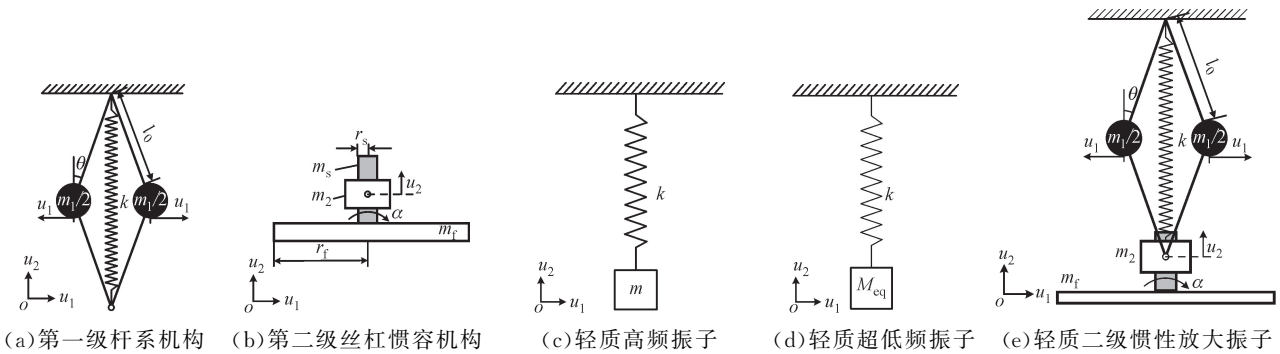


图1 轻质二级惯性放大振子超低频振动特性机理模型

Fig. 1 Lightweight secondary inertial amplifier vibration mechanism model of ultra-low frequency characteristics

1.1 第一级杆系惯性放大机制

图1(a)所示的第一级杆系惯性放大机构由4根无质量刚性杆铰接成菱形四连杆机构,两侧顶点分别连接1个小质量块,上下顶点之间连接弹簧。当机构受外部激励时,两侧质量块沿水平方向产生位移幅值 u_1 (小位移下,假设仅考虑水平运动),弹簧沿竖直方向产生压缩幅值 u_2 。对图1(a)进行动力学建模,其表达式为

$$\begin{cases} \left(l_0 \cos \theta - \frac{u_2}{2} \right)^2 + (l_0 \sin \theta + u_1)^2 = l_0^2 \\ T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 \\ U = \frac{1}{2} k u_2^2 \\ L = T_1 - U \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: T_1 为杆系惯性放大机构的动能; U 为杆系惯性放大机构的弹性势能; L 为拉格朗日函数; $\dot{u}_1$ 与 $\dot{u}_2$ 分别表示 u_1 、 u_2 对时间的一阶导数。

由于是小位移($u_1 \ll l_0$, $u_2 \ll l_0$),因此忽略高阶小项(u_1^2 , u_2^2),由式(1)可得第一级杆系惯性机

构的动力学方程为

$$\frac{1}{4} m_1 \cot^2 \theta \ddot{u}_2 + k u_2 = 0 \quad (2)$$

式中: $\ddot{u}_2$ 为 u_2 对时间的二阶导数。令等效惯性质量 $M_{eq1} = (\cot^2 \theta / 4) m_1$,由此可知其主要依赖于斜杆倾角 θ ,当 $\theta < 26.6^\circ$ 时, $\cot^2 \theta > 4$,从而使得 $M_{eq1} > m_1$ 。因此,可通过微调斜杆倾角,实现第一级惯性放大。

1.2 第二级丝杠惯容惯性放大机制

图1(b)所示的第二级丝杠惯容放大机构由螺母、螺杆和飞轮构成,螺母铰接于菱形四连杆机构下的顶点,其轴向位移幅值为 u_2 ,飞轮随螺杆同步旋转,即通过平动-转动的转换,将螺母轴向位移放大为飞轮的大幅旋转,从而实现惯性质量的放大。对图1(b)进行动力学建模,其表达式为

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{2\pi}{l_d} \ddot{u}_2 \\ F_2 = m_2 \ddot{u}_2 \\ J_s = \frac{1}{2} m_s r_s^2, J_f = \frac{1}{2} m_f r_f^2 \\ T = J_s \ddot{\alpha} + J_f \ddot{\alpha} \\ F_1 = T \frac{2\pi}{l_d} \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\ddot{\alpha}$ 为 α 对时间二阶导数; F_2 为螺母惯性力; J_s 为螺杆转动惯量; J_f 为飞轮转动惯量; T 为螺杆和飞轮总惯性力矩; F_1 为螺杆和飞轮总等效直线惯性力。

由式(3)可知,总轴向惯性力 F 为螺母、螺杆、飞轮惯性力之和,其表达式为

$$F = m_2 \ddot{u}_2 + \frac{1}{2} (m_s r_s^2 + m_f r_f^2) \left(\frac{2\pi}{l_d} \right)^2 \ddot{u}_2 = b \ddot{u}_2 \quad (4)$$

综上所述,丝杠惯容机构的等效惯容系数 b 表达式为

$$b = m_2 + \frac{1}{2} (m_s r_s^2 + m_f r_f^2) \left(\frac{2\pi}{l_d} \right)^2 \quad (5)$$

由式(5)可知,等效惯容系数主要取决于螺杆导程与旋转部件(螺杆和飞轮)的半径,而螺母与螺杆质量对惯容系数的影响较小,因此可将其简化为仅考虑飞轮贡献的形式,其表达式为

$$b \approx \frac{1}{2} m_f r_f^2 \left(\frac{2\pi}{l_d} \right)^2 \quad (6)$$

对于式(6),令等效惯性质量 $M_{eq2} = b = m_f r_f^2 (2\pi/l_d)^2 / 2$ 。由此,通过采用大半径与小导程的协同设计,可以形成远大于实际质量($m_2 + m_s + m_f$)的等效惯性质量 M_{eq2} ,从而实现第二级惯性放大。

1.3 轻质二级惯性放大振子超低频特性形成机制

联立式(2)、式(6)可推导出图 1(d)所示等效振子的动力学方程

$$M_{eq} \ddot{u}_2 + k u_2 = 0 \quad (7)$$

振子等效惯性质量的表达式为

$$M_{eq} = M_{eq1} + M_{eq2} = \frac{1}{4} \cot^2 \theta m_1 + \frac{1}{2} m_f r_f^2 \left(\frac{2\pi}{l_d} \right)^2 \quad (8)$$

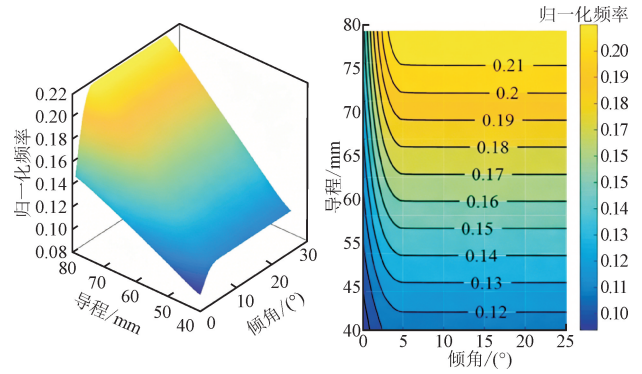
式中: $\theta < 26.6^\circ$ 。 M_{eq} 固有频率 ω_0 的表达式为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_{eq}}} = \sqrt{\frac{k}{\left(\frac{1}{4} \cot^2 \theta m_1 + b \right)}} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

式中: m 为振子实际物理质量, $m = m_1 + m_2 + m_s + m_f$, 且 $M_{eq} \gg m$ 。

因此,图 1(c)所示的传统轻质高频振子,通过图 1(e)所示的二级惯性放大机制作用下,最终形成图 1(d)所示的轻质超低频振子,其谐振频率从 $(k/m)^{1/2}$ 降低为 $\{m/[(m_1 \cot^2 \theta)/4 + b]\}^{1/2} (k/m)^{1/2}$, 降低了 $\{[(m_1 \cot^2 \theta)/4 + m_f r_f^2 (2\pi/l_d)^2 / 2] / m\}^{1/2}$ 倍。由此通过大幅提升轻质振子的等效惯性质量,形成了超低频的振动特性。

此外,进一步分析了振子参数对其谐振频率的协同影响规律,其结果如图 2、图 3 所示。

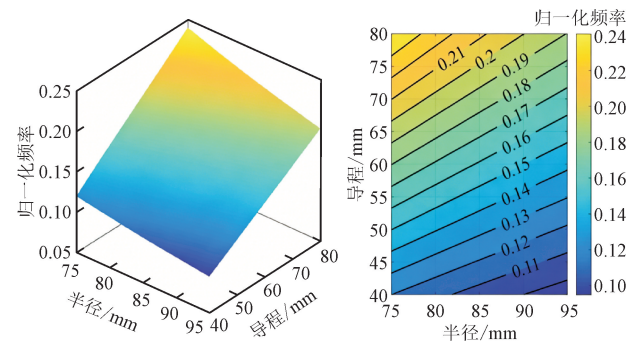


(a) 归一化频率变化曲面

(b) 归一化频率等高线

图 2 螺杆导程与斜杆倾角对归一化频率的协同影响

Fig. 2 Synergistic effects of screw lead and inclined rod angle on normalized frequency



(a) 归一化频率变化曲面图

(b) 归一化频率等高线图

图 3 螺杆导程与飞轮半径对归一化频率的协同影响

Fig. 3 Synergistic effect of screw lead and flywheel radius on normalized frequency

由图 2 可知,螺杆导程是频率的主要影响参数:相比减小倾角,减小导程可使归一化频率显著降低;特别地,当倾角减小至 5° 时,第一级惯性放大系数会急剧增大,从而导致系统谐振频率的大幅下降。然而,过小的倾角会导致机构增大、运动受限甚至自锁。

由图 3 可知,螺杆导程仍为频率核心影响参数:相比增大飞轮半径,减小导程可显著降低归一化频率。

综上所述,所提出的二级惯性放大机制,通过多机构的运动实现了运动的分解与转换,突破了轻质与超低频特性的固有矛盾,可在极轻物理质量下,大幅提升等效惯性质量,从而降低谐振频率。在设计

第一级杆系惯性放大机构时,斜杆倾角在 $5^\circ \sim 20^\circ$ 范围内取值;在设计第二级丝杠惯容惯性放大机构时,采用几何质量失配型(大半径镂空)飞轮和小导程螺杆。二者的协同设计可极大提升系统的等效惯性质量,从而突破轻质与超低频特性的固有矛盾,为轻质超结构的超低宽频带隙设计奠定理论基础。

2 轻质惯性放大超结构模型设计及研究方法

依据上述理论,将提出的振子引入超结构中,可获得一种理论上兼具轻量化与超低宽频带隙特性的减振超结构,本文以梁结构为例开展探索验证研究,旨在揭示其超低宽频带隙形成机理及其在工程结构减振中的可行性。实现两级惯性耦合放大机制的超结构,其形成过程如图 4 所示。其中,图 4(c)为新型振子模型,由杆系惯性放大机构(图 4(a))和丝杠惯容机构(图 4(b))串联耦合而成;图 4(d)为构建的减振超结构单元;图 4(e)为该单元经周期性排列形成的轻质超低宽频减振超结构模型。

具体而言,该新型振子的第一级杆系惯性放大机构的结构为:4 根刚性杆铰接形成四连杆机构;两侧顶点分别铰接侧向轻质块,用于传递和放大水平位移;上下顶点通过弹性元件连接,上顶点与固定于主体梁的轻质块铰接,作为振子的运动输入端,下顶点与轻质螺母铰接,作为第一级的运动输出端。

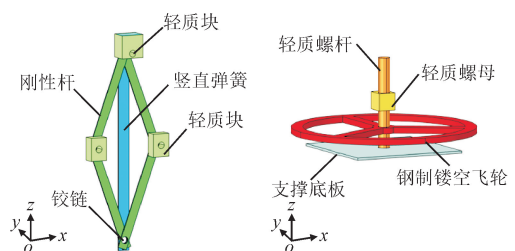
第二级丝杠惯容惯性放大机构的结构为:轻质螺杆、螺母通过螺纹副连接,用于运动转换;钢制镂空飞轮固定于螺杆下端位置,作为转动惯量的载体;螺杆下端与轻质支撑底板铰接;支撑底板作为固定端约束螺杆的竖向位移,从而形成第二级惯性放大机制。

将上述轻质二级惯性放大振子与基体梁固定连接,进而构建出轻质超结构单元(如图 4(d)所示);将该单元沿 x 轴方向周期性排列,从而形成轻质惯性放大减振超结构(如图 4(e)所示)。

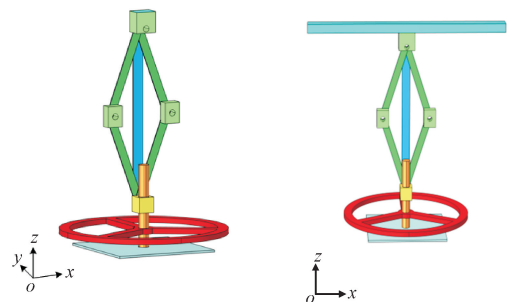
为分析该超结构的带隙特性,并阐明和验证其振动带隙的形成机理,基于 Bloch 定理,以如图 4(d)所示的单元为研究对象,采用有限元方法对单元的能带结构及其模态位移云图进行计算。计算过程中,沿单元的周期边界方向施加 Bloch 周期性边界条件,其表达式为

$$u_x(x+a) = e^{ik_x a} u_x(x) \quad (10)$$

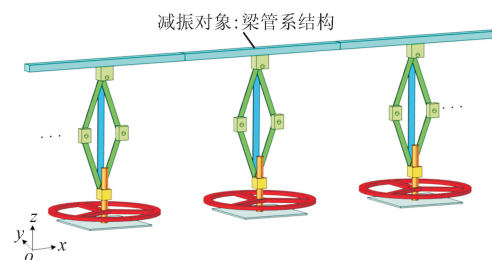
式中: u_x 为沿 x 方向的位移分量; x 为位置坐标; k_x 为沿 x 方向的波矢分量; a 为晶格常数。据 Bloch 定理,可通过波矢扫描第一不可约布里渊区边界 $(0, \pi/a)$ (图 5 所示),从而计算能带结构。



(a) 第一级杆系机构 (b) 第二级丝杠惯容机构



(c) 轻质二级惯性放大振子 (d) 轻质超结构单元



(e) 轻质超低频减振超结构

图 4 轻质惯性放大超结构及其形成过程

Fig. 4 Lightweight inertial amplification beam-pipe metastructure and its formation process

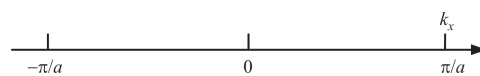


图 5 第一布里渊区

Fig. 5 First Brillouin zone

为验证理论分析与数值仿真的准确性,采用 3D 打印技术制备了 3×1 周期排列的超结构试样,并开展了面外振动测试实验,实验过程如图 6 所示。梁结构、轻质斜杆、轻质块、轻质螺母、轻质螺杆、销轴以及底部支撑底板均由聚乳酸材料通过 3D 打印制成,飞轮采用 45 钢制成。装配中,轻质块与梁结构粘接为一体,轻质块与螺母及斜杆通过销轴铰接;上下顶点之间通过聚氨酯橡胶连接;飞轮粘接于螺杆下端;螺杆下端通过轴承与支撑底板连接,支撑底板与

实验台粘接固定,以此约束螺杆在竖直方向的运动。

实验过程中,样品通过细软绳自由悬挂,以模拟自由边界条件。测试时,由信号发生器产生激励信号,经功率放大器(DFT2702)放大后驱动激振器,激振器沿梁厚方向对样品一端施加随机激励,同时利用安装在超结构梁两端的压电式加速度传感器(YMC2106C)和数据采集与分析仪(BK-3050-A-060)采集振动响应信号,经由测试系统处理与分析,最终获得样品的振动传输特性曲线。

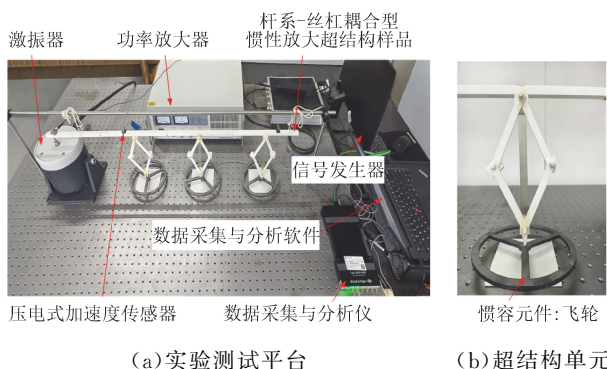


图 6 轻质惯性放大超结构样品及实验测试平台

Fig. 6 Lightweight inertial amplification metastructure sample and experimental testing platform

3 带隙特性分析

本研究基于 COMSOL Multiphysics 有限元软件的多体动力学模块,通过线性拉伸与 Bloch 定理设置结构周期性边界条件,对无限轻质惯性放大超结构的能带结构进行了数值计算。

本研究基于 COMSOL Multiphysics 有限元软件的多体动力学模块,通过线性拉伸与 Bloch 定理设置结构周期性边界条件,对无限轻质惯性放大超结构的能带结构进行了数值计算。

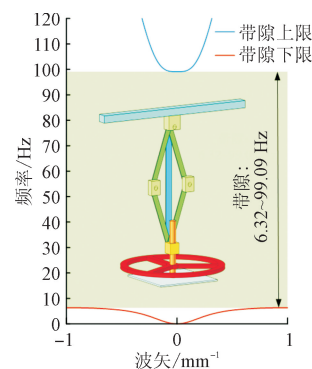
以下为各结构的尺寸参数:梁单元尺寸为 $250\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$;刚性杆尺寸为 $100\text{ mm} \times 8\text{ mm} \times 1\text{ mm}$;竖直弹簧尺寸为 $180\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 1\text{ mm}$;两侧轻质块尺寸为 $20\text{ mm} \times 15\text{ mm} \times 10\text{ mm}$;顶部轻质块尺寸为 $20\text{ mm} \times 20\text{ mm} \times 15\text{ mm}$;螺母尺寸为 $15\text{ mm} \times 15\text{ mm} \times 16\text{ mm}$;螺杆尺寸为 $10\text{ mm} \times 80\text{ mm}$;螺距为 75 mm ;扇形镂空飞轮尺寸为 $160\text{ mm} \times 5\text{ mm}$;飞轮镂空区域尺寸为 $20\text{ mm} \times 140\text{ mm}$;支撑底板尺寸为 $100\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 2\text{ mm}$;支撑底板预留孔孔径为 $\Phi 10$;周期结构晶格常数为 250 mm ,其余结构预留孔直径为 6 mm 。结构材料参数如表 1 所示。

表 1 结构材料参数

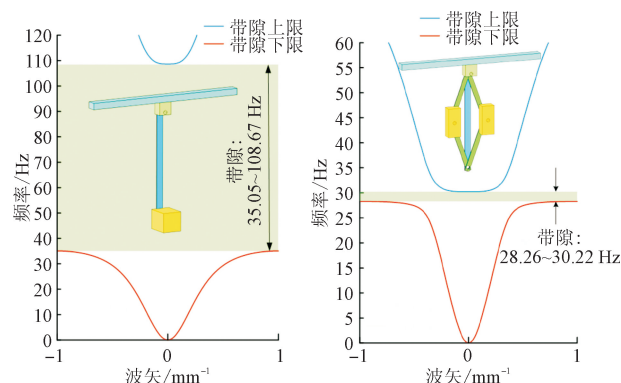
Table 1 Material parameters of the structure

结构	材料	密度/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	弹性模量/ MPa	泊松比 ν
梁基结构	环氧树脂	1 180	4 350	0.367 9
质量块、螺母、 螺杆、底板	环氧树脂	100	4 350	0.367 9
弹簧	橡胶	1 300	50	0.47
飞轮	45 钢	7 850	200 000	0.30

计算得到的无限周期结构能带图,如图 7(a)所示。在 $0 \sim 100\text{ Hz}$ 频率范围内,能带主要由基结构的面外波能带和新型振子的局域共振能带构成。基于模态叠加原理,该超结构的振动主模态由振子与基结构振动主模态耦合形成。在此过程中,振子主模态通过抑制基结构主模态,使得面外波不能在基结构中传播,进而形成面外带隙($6.32 \sim 99.09\text{ Hz}$),该带隙范围如图 7(a)中绿色区域所示。在该频率范围内,基结构面外振动模式受到显著抑制,从而禁止了面外波的传播。



(a) 新型超结构



(b) 局域共振型超结构

(c) 单级惯性放大超结构

图 7 新型和传统超结构能带结构的对比与传输特性

Fig. 7 Comparison of band structures and transport properties between novel and traditional metastructure

为说明该超结构具有超低宽频带隙,选择具有相同几何与材料参数的传统局域共振超结构和单级惯性放大超结构,其能带计算结果如图 7(b)和 7(c)所

示,3 种超结构带隙特性对比结果如表 2 所示。由表可知,传统局域共振超结构带隙起始频率高达 35.05 Hz;单级惯性放大超结构起始频率虽降低至 28.26 Hz,但绝对带宽仅为 1.96 Hz;相比之下,所提出的超结构起始频率较单级惯性放大超结构降低了 77.6%,绝对带宽达到 92.77 Hz,拓宽了 47.3%。为进一步分析其带隙特性,引入相对带宽(即绝对带宽与带隙中心频率的比值)进行分析。计算发现:本文提出的超结构,其相对带宽为 176%,拓宽了 26.3 倍。以上结果进一步说明,基于轻质二级惯性放大机制构建的轻质超结构,兼具轻量化、超低频、宽带隙的振动特性。

表 2 3 种梁管系超结构带隙的比较

Table 2 Comparison of band gap for three types of beam-tube metastructures

结构类型	带隙下 限频率/ Hz	带隙上 限频率/ Hz	绝对 带宽/ Hz	相对 带宽/ %
新型超结构	6.32	99.09	92.77	176.00
局域共振型超结构	35.05	108.67	73.62	102.40
单级惯性放大超结构	28.26	30.22	1.96	6.70

4 超低宽频振动带隙形成机理

为进一步揭示并阐明轻量化超低宽频振动带隙的形成机理,提取了其面外带隙上、下限所对应的单元模态振型,分别如图 8(a)、8(c)所示,对应的单元模型运动原理简图如图 8(b)所示。由图 8(a)可知,在带隙下限处,振子整体表现出强烈的面外(z 方向)振动,并与基结构发生强耦合。由图 8(c)可知,在带隙上限处,基结构的弯曲模态重新占据主导,弹性波恢复传播。上述现象初步表明,带隙的形成与振子和基结构之间的动态耦合相关。

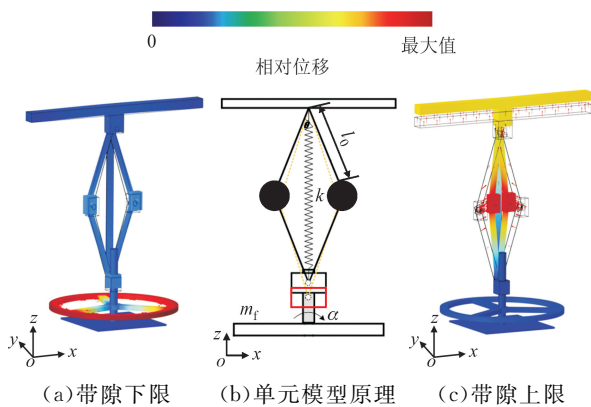


图 8 轻质惯性放大超结构单元带隙边界特征模态振型

Fig. 8 Lightweight inertial amplification metastructure unit bandgap boundary characteristic modal vibration mode boundaries

4.1 超低频带隙形成机理

针对二级惯性放大振子,提取其一、二级惯性放大子机构的模态振型(图 9(a)和 9(b))以及二者耦合合成的振子模态振型(图 9(c))。图 9(a)中,四连杆机构运动,将竖直方向的微小位移分解为两侧小质量 $m_1/2$ 在水平方向的大位移,使小质量 m_1 被初步放大成为等效惯性质量 M_{eq1} ,从而实现了第一级的惯性放大。图 9(b)中,四连杆机构下顶点带动螺母产生竖直大位移,并进一步通过丝杠惯容机构转换为螺杆及飞轮的大幅旋转,因飞轮产生极大惯性力,其质量 m_i 被进一步放大为等效惯性质量 M_{eq2} ,从而实现第二级惯性放大。图 9(c)中,两级惯性放大机构的耦合,使振子的实际质量($m_1 + m_i$)被放大为远超自身的等效惯性质量($M_{eq} = M_{eq1} + M_{eq2}$),使其固有频率降低至超低频 $\omega_0 = (k/M_{eq})^{1/2}$,为超低频带隙的形成奠定基础。

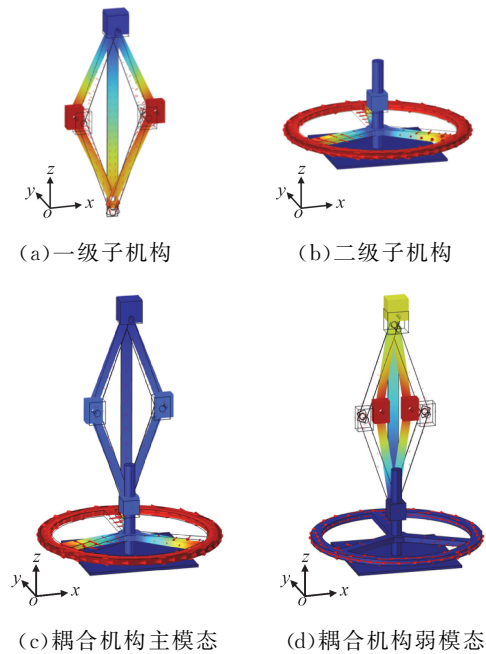


图 9 各级及耦合惯性放大机构的特征模态振型

Fig. 9 Characteristic modal vibration mode of multi-stage and coupled inertia amplification mechanisms

针对引入二级惯性放大振子所构造的超结构,振子沿 z 方向的响应为

$$z = \sum_{i=1}^M A_z^{(i)} \eta_z^{(i)} \quad (11)$$

$$\eta_z^{(i)} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^{(i)})^2 - \omega_z^2}} e^{i\omega_0 t} \quad (12)$$

式中: $A_z^{(i)}$ 为振子第 i 阶 z 方向模态振型; $\eta_z^{(i)}$ 为振子第 i 阶模态参与因子; $\omega_0^{(i)}$ 为振子第 i 阶 z 方向固有

频率; ω_z 为 z 方向的外部激励频率; f 为作用于系统的外部激励幅值; M 为振子 z 方向总模态阶数。

从模态叠加原理角度分析:当激励频率 ω_z 接近振子的 i 阶固有频率 $\omega_0^{(i)}$ 时,其对应的模态参与因子 $\eta_z^{(i)}$ 急剧增大,该阶模态被激发为振子主模态,振型如图 9(c) 所示。此时,该模态与基结构沿 z 方向的主模态强烈耦合(如图 8(a) 所示),振子给基结构施加抑制力 F_r ,抑制了基结构中的面外振动传播,带隙打开,起始频率由振子主模态(图 9(c))的固有频率决定。

从能量转换角度分析:当激励频率 ω_z 接近振子的 i 阶固频 $\omega_0^{(i)}$ 时,该阶模态被激发为振子的主模态,其振型如图 9(c) 所示。此时,振子表现为第一级四连杆惯性放大机构的运动,进而在驱动其两侧质量块水平运动的同时,通过下顶点带动第二级螺母进行竖直运动,从而驱动螺杆和飞轮的旋转。通过上述运动分解转换机制实现的两级机构,其基体结构中的振动能量被有效吸收并耗散。因该振子具有高阶等效惯性质量,因而可在结构轻量化的前提下实现超低频吸振。因此,新型超结构中所形成的超低频带隙(6.32 Hz),相较于单级惯性放大超结构(28.26 Hz)降低了 77.6%。

4.2 超低宽频带隙形成机理

当激励频率 ω_z 远离振子固有频率 $\omega_0^{(i)}$ 时,模态参与因子 $\eta_z^{(i)}$ 随之减小,响应变弱,振子主模态转化为弱模态(图 9(d)),其对基结构的抑制力 F_r 相应减弱,当该力不足以抑制基结构主模态(图 8(c))时,弯曲波重新在基结构中自由传播,带隙关闭,并形成宽频带隙(带宽)。

为进一步分析抑制力 F_r 对带宽的影响,设振子在激励 $f e^{i\omega_z t}$ 作用下 z 方向的响应为 $Z e^{i\omega_z t}$,其运动学方程为

$$M_{eq} \ddot{z} + kz = f e^{i\omega_z t} \quad (13)$$

z 方向响应幅值表达式为

$$Z = \frac{f}{k - M_{eq} \omega_z^2} \quad (14)$$

进而获得振子对基结构抑制力 F_r 的表达式为

$$F_r = kz = \frac{kf}{k - M_{eq} \omega_z^2} e^{i\omega_z t} \quad (15)$$

其幅值 $|F_r|$ 的表达式为

$$|F_r| = \frac{kf}{|k - M_{eq} \omega_z^2|} = \frac{f}{|1 - (\omega_z/\omega_0)^2|} \quad (16)$$

当外界激励频率 ω_z 接近振子的固有频率 ω_0 时,其主模态振型(图 9(c)) 被激发,等效惯性质量

M_{eq} 随之大幅增加,并产生强抑制力,对基结构形成强抑制(图 8(a))。同时,这会导致抑制力幅值 $|F_r|$ 在固有频率 ω_0 附近的衰减率减小,即激励频率 ω_z 偏离固有频率 ω_0 时,抑制力 F_r 仍可在较宽频率范围内抑制基结构的振动,从而拓宽带隙。其物理本质为:等效惯性质量的大幅提升增强了振子系统对外部激励频率变化的适应性,即当等效惯性质量足够大时,系统的惯性效应占据主导,即使激励偏离其固有频率,大等效惯性质量形成的抑制力仍能保持较高水平,从而实现对基结构持续性的宽频抑制,并最终在超低频范围内形成宽频带隙(绝对带宽为 92.77 Hz,相对带宽为 176.0%),这相较于单级惯性放大超结构(绝对带宽为 1.96 Hz、相对带宽为 6.7%)实现了显著扩宽。

4.3 实验验证

实验测得频响结果如图 10 所示,图中,绿色区域表示带隙范围。在 0~100 Hz 的频率范围内,实验与仿真结果基本吻合,在所设计的超低宽频带隙范围内(起始频率为 6.32 Hz),表现出显著的振动衰减特性。然而,二者之间仍存在一定的偏差:实验带隙范围为 4.4~81.1 Hz,最大衰减为 25.1 dB(位于 10.92 Hz 处),窄于仿真带隙,但在仿真预测带隙范围外(99.09 Hz 以上),实验振动传递率明显高于带隙范围内的。造成这一偏差主要包括以下两个方面:一方面,实验样品仅包含 3 个单胞,周期数有限,难以完全模拟无限周期结构的带隙特性;另一方面,试样在制作与装配过程中因工艺条件而存在结构误差。结构误差包括:采用环氧树脂粘接成型的样品部件,其粘接层的刚度与仿真之间的差异;结构装配中,因铰链的配合偏差对超低频范围内的动态响应敏感而造成的偏差;3D 打印构件与钢制飞轮的材料参数与仿真设定值存在的浮动,以及打印过程中,层间结合质量与表面粗糙度而引入的额外误差。尽管

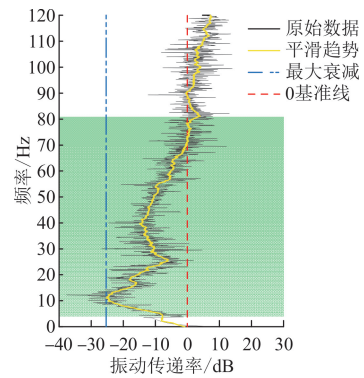


图 10 实验传输特性曲线图

Fig. 10 Experimental transmission characteristic curve

如此,实验曲线的变化趋势与仿真结果一致,这充分证明了所提出的基于二级惯性放大机制构建的轻质惯性放大超结构具有优异的超低宽频减振性能。

综上所述,基于运动分解与转换机制构建的二级惯性放大轻质振子,通过大幅提升系统的等效惯性质量,赋予轻质结构以超低频特性,将该振子引入超结构,利用其形成的强惯性效应和对基体的强模态抑制力,形成了具有超低宽频带隙的超结构。

5 带隙特性影响规律

上述分析表明,轻质二级惯性放大振子是决定带隙特性的关键因素,因此进一步研究其结构参数对带隙特性的影响规律,可为带隙的精确调控提供理论依据。选取斜杆的倾角 θ 和长度 l_0 ,飞轮的半径 r_f 和厚度 t_f 以及螺杆导程 l_d 这 5 个关键参数,系统分析各参数对带隙特性的影响规律,其结果如图 11~图 15 所示。

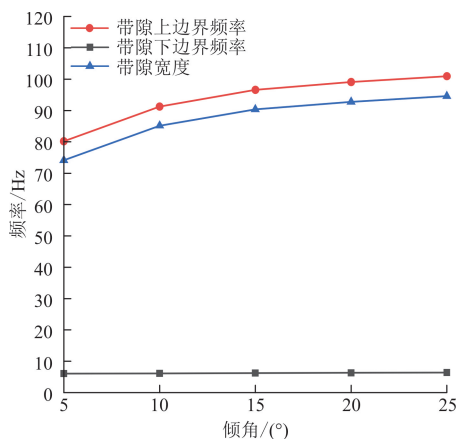


图 11 斜杆倾角对带隙特性的影响规律

Fig. 11 Effect of inclination angle of the rod on bandgap characteristics

图 11 表明:在振子结构参数 ($l_0 = 100$ mm, $r_f = 80$ mm, $t_f = 5$ mm, $l_d = 75$ mm) 保持不变的条件下,随着斜杆倾角 θ 的增大,第一级惯性放大系数降低,从而导致带隙的起始和截止频率均移向高频,此时,第二级惯性放大效应占据主导,截止频率的增大速率高于起始频率的,带隙拓宽。

图 12 表明:在振子结构参数 ($r_f = 80$ mm, $t_f = 5$ mm, $l_d = 75$ mm, $\theta = 20^\circ$) 保持不变的条件下,随着斜杆长度 l_0 的增大,第一级惯性放大系数会变小,等效惯性减弱,带隙的起始频率移向低频,同时也削弱了其对基体结构振动的抑制效果,从而致使带隙的截止频率也移向低频,带隙变窄。

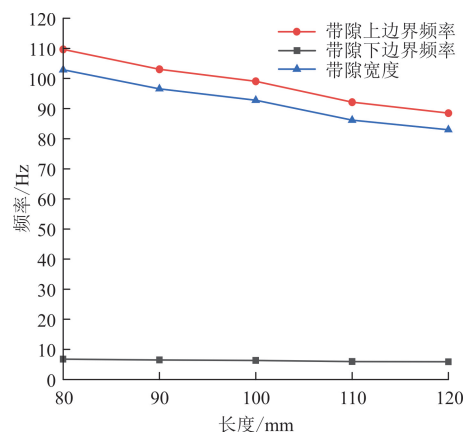


图 12 斜杆长度对带隙特性的影响规律

Fig. 12 Effect of rod length on bandgap characteristics

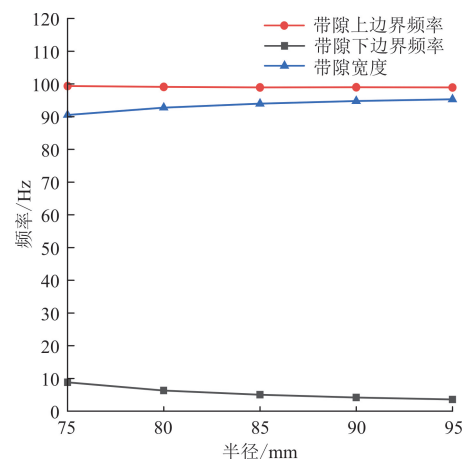


图 13 飞轮半径对带隙特性的影响规律

Fig. 13 Effect of flywheel radius on bandgap characteristics

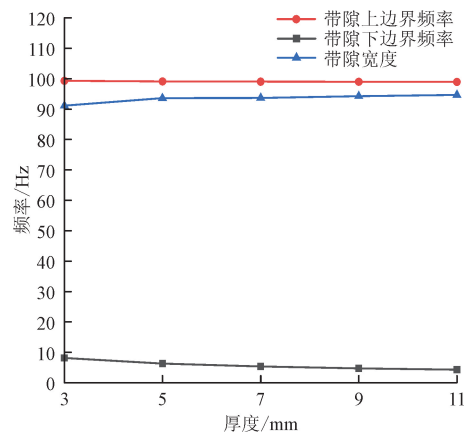


图 14 飞轮厚度对带隙特性的影响规律

Fig. 14 Effect of flywheel thickness on bandgap characteristics

图 13 和图 14 表明:当 $l_0 = 100$ mm, $l_d = 75$ mm, $\theta = 20^\circ$ 时,增大飞轮半径 r_f 和厚度 t_f 可提高其转动

惯量,进而提升第二级惯性放大系数与等效惯性质量,从而导致带隙起始频率移向更低频。同时,振子对基体结构振动的抑制效果增强,带宽拓宽。

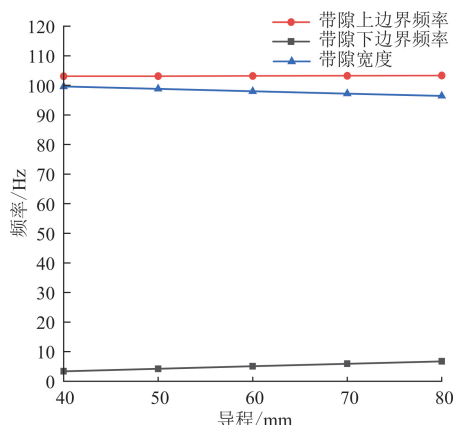


图15 螺杆导程对带隙特性的影响规律

Fig. 15 Effect of screw lead on bandgap characteristics

图15表明:在 $l_0 = 100 \text{ mm}$, $t_f = 5 \text{ mm}$, $r_f = 80 \text{ mm}$, $\theta = 20^\circ$ 条件下,螺杆导程 l_d 增大,第二级惯性放大系数减小,等效惯性减弱,带隙起始频率移向高频,同时振子对基体结构振动的抑制效果减弱,带隙变窄。

因此,通过合理调节振子结构参数,可在特定频率范围内有效调控带隙特性。

6 结 论

本文提出了一种基于运动分解与转换机制的二级惯性放大轻质超结构与超低宽频带隙协同设计的理论与方法,并以超结构梁为例,开展了机理探索与验证研究,得出如下主要结论。

(1)建立了一种基于运动分解与转换机制的轻质二级惯性放大振子,由耦合杆系惯性放大机构与丝杠惯容机构为具体实现构型。研究发现:该振子可产生大惯性系数,形成远大于自身的等效惯性质量,将该振子引入超结构,可构建兼具轻量化、超低频、宽带隙特性的超结构,从而突破传统动力吸振器仅适用于低频窄带振动控制的局限。

(2)揭示了二级惯性放大轻质超结构超低频宽带隙的形成机理,该机理表明:振子主模态激发的二级惯性放大机制产生的大等效惯性质量,其赋予振子的超低频特性,及其形成的强惯性效应与强模态抑制力,是产生超低频宽带隙的决定性因素。实验进一步验证了该理论与方法的准确性。

(3)振子的结构参数是影响带隙特性的关键因素。斜杆倾角可在 $5^\circ \sim 20^\circ$ 内取值,以兼顾结构稳定

性与可实现性;减小斜杆倾角、螺杆导程并增大飞轮的几何参数,可进一步提升等效惯性质量,并拓宽带隙。通过协同优化上述参数,可实现对目标带隙的调控。

本文提出的二级惯性放大轻质超结构的设计理论与方法,能较好实现集轻量化、超低频、宽带减振的一体化目标,为工程实际中(尤其诸如输油管道、桥梁等大型工程的一维超结构)的超低频宽带减振超结构的实现提供了理论依据与设计方法。

参考文献:

- [1] 肖勇,王洋,赵宏刚,等.面向减振降噪应用的声学超构材料研究进展[J].机械工程学报,2023,59(19):277-298.
Xiao Yong, Wang Yang, Zhao Honggang, et al. Research progress of acoustic metamaterials for vibration and noise reduction applications [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(19): 277-298.
- [2] Bai Liang, Yao Hongliang, Han Chenglin, et al. Recent advances in nonlinear vibration metamaterials [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2025, 236: 113046.
- [3] 高鹏林,龚凌云,王国旭,等.非线性周期结构动力学与波动调控研究进展[J].力学进展,2025,55(3):567-641.
Gao Penglin, Gong Lingyun, Wang Guoxu, et al. Review on the dynamics and wave control in nonlinear periodic structures [J]. Advances in Mechanics, 2025, 55(3): 567-641.
- [4] 王国庆,王鹏飞,李振,等.超结构制造:开辟先进制造新领域[J].机械工程学报,2025,61(16):1-12.
Wang Guoqing, Wang Pengfei, Li Zhen, et al. Meta-structure manufacturing: pioneering new frontiers in advanced manufacturing [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2025, 61(16): 1-12.
- [5] 胡更开.弹性超材料研究进展[J].科学通报,2025,70(12):1720-1735.
Hu Gengkai. Advances in elastic metamaterials [J]. Chinese Science Bulletin, 2025, 70(12): 1720-1735.
- [6] Liu Zhengyou, Zhang Xixiang, Mao Yiwei, et al. Locally resonant sonic materials [J]. Science, 2000, 289(5485): 1734-1736.
- [7] 李锁斌,窦益华,陈天宁,等.局域共振型周期结构振动带隙形成机理[J].西安交通大学学报,2019,53(6):169-175.
Li Suobin, Dou Yihua, Chen Tianning, et al. Formation mechanisms of vibration band gaps in locally reso-

- nant periodic structures [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2019, 53(6): 169-175.
- [8] Yilmaz C, Kikuchi N. Analysis and design of passive band-stop filter-type vibration isolators for low-frequency applications [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 291(3/5): 1004-1028.
- [9] Smith M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1648-1662.
- [10] Ke Ke, Zhou Xuhong, Bian Jing, et al. Development of an inerter-based dynamic vibration absorber with adjustable inertance for tower structures: theoretical models, experimental validations, and structural behavior insights [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2026, 152(4): 04026016.
- [11] Zhang Li, Xue Songtao, Chen Tianli, et al. A nonlinear inertia-enabled vibration absorber using a yoke-type inerter [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2026, 114(8): 560.
- [12] Banerjee A, Adhikari S, Hussein M I. Inertial amplification band-gap generation by coupling a levered mass with a locally resonant mass [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 207: 106630.
- [13] Li Yingli, Li Hao, Liu Xiang, et al. Bandgap and wave propagation of spring-mass-truss elastic metamaterial with a scissor-like structure [J]. *Journal of Physics: D Applied Physics*, 2022, 55(5): 055303.
- [14] Zhao Cheng, Zhang Kai, Zhao Pengcheng, et al. Bandgap merging and backward wave propagation in inertial amplification metamaterials [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 250: 108319.
- [15] Zhang Jinyu, Dong Xingjiang, Wang Tao, et al. Attenuation enhancement for the inertial amplification metamaterial using multiple local resonators [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2025, 600: 118874.
- [16] 杜春阳, 郁殿龙, 刘江伟, 等. X形超阻尼局域共振声子晶体梁弯曲振动带隙特性 [J]. *物理学报*, 2017, 66(14): 321-331.
Du Chunyang, Yu Dianlong, Liu Jiangwei, et al. Flexural vibration band gaps for a phononic crystal beam with X-shaped local resonance metadamping structure [J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(14): 321-331.
- [17] Shoaib M, Wu Zhijiang, Liu Long, et al. Band gap analysis and vibration reduction of metamaterial periodic Timoshenko beam with inertial amplification mechanism [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2026, 26(15): 2650127.
- [18] Xue Yu, Zhou Biliu, Li Jinqiang, et al. Controllably ultrawide bandgap of a metamaterial beam based on inertial amplification and magnetorheological elastomer [J]. *European Journal of Mechanics: A Solids*, 2025, 109: 105494.
- [19] Gao Lei, Mak C M, Cai Chenzhi. Low-frequency vibration attenuation of metamaterial sandwich plate with lever-type inertial amplified resonators [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 199: 111827.
- [20] Xu Lanhe, Yang Zhou, Zhang Zhilin, et al. Lightweight composite meta-lattice structures with inertial amplification design for broadband low-frequency vibration mitigation [J]. *Composites: Part B Engineering*, 2025, 292: 112091.
- [21] 李锁斌, 蔡熠玮, 王航, 等. 轻质高刚度超结构超低频带隙机理及设计方法 [J]. *西安交通大学学报*, 2025, 59(9): 77-87.
Li Suobin, Cai Yiwei, Wang Hang, et al. Mechanism and design methodology for ultra-low frequency bandgaps in lightweight high-stiffness metastructures [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2025, 59(9): 77-87.
- [22] Shoaib M, Pang Weijie, Li Fengming. Vibration reduction of pipes conveying fluid with periodic inertial amplification mechanisms [J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2024, 34(3): 2089-2104.
- [23] Kulkarni P P, Manimala J M. Longitudinal elastic wave propagation characteristics of inertant acoustic metamaterials [J]. *Journal of Applied Physics*, 2016, 119(24): 245101.
- [24] Mu Di, Wang Keyi, Shu Haisheng, et al. Metamaterial beams with graded two-stage inertial amplification and elastic foundation [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 236: 107761.
- [25] Xiao Lei, Bursi O S, Li Heng, et al. Energy dissipation enhancement of flexural metamaterial beams with inerter and rotational deformation [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 237: 107770.
- [26] Chen Zexin, Jin Shida, Sun Shuaishuai, et al. A new inerter-based acoustic metamaterial MRE isolator with low-frequency bandgap [J]. *Smart Materials and Structures*, 2024, 33(12): 125014.
- [27] Lou Jia, Zhang Songliang, Fan Hui, et al. Ultra-low frequency and broadband flexural wave attenuation using an inertant nonlinear metamaterial beam [J]. *Engineering Structures*, 2025, 323(Part A): 119169.
- [28] Zhao Zhipeng, Wu Minjun, Zhang Bingbing, et al. Band-gap flexible design and metadamping mechanism of inerter-enhanced viscously damped metamaterial [J]. *Smart Materials and Structures*, 2026, 35(4): 045002.

(编辑 刘懿莹)