

采用离散包络的增径滚刀蜗轮加工数字仿真

郭翔^{1,2}, 常海峰³, 郑潘妥³, 贾康^{1,2}

(1. 西安交通大学现代设计与轴承转子系统教育部重点实验室, 710049, 西安;

2. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安; 3. 汉江工具责任有限公司, 723000, 陕西汉中)

摘要: 针对传统解析法处理蜗轮修形边界易数值发散, 且实体仿真效率低、难获底层数据等问题, 提出一种基于离散包络原理的增径滚刀蜗轮加工数字仿真建模方法。通过构建增径滚刀加工蜗轮的运动数学模型, 基于蜗轮齿面栅格划分, 对蜗轮多截面进行离散切削交线族数值包络以构建蜗轮齿面; 采用 VERICUT 仿真软件验证了方法的有效性, 系统分析了增径系数和蜗杆头数对齿面拓扑形貌的影响规律。研究结果表明: 与经典空间啮合解析法相比, 该离散包络算法在全齿面域内的最大绝对法向逼近误差可严格收敛至 $1\text{ }\mu\text{m}$ 数量级, 仿真有效工作区域的几何误差可严格控制在 0.001 mm 以内, 局部残余误差不超过 0.01 mm ; 增径系数主导修形量级, 当增径系数从 1.05 提升至 1.20 时, 单头与三头蜗杆边缘的最大负偏差分别由 -0.03 、 -0.04 mm 增大至 -0.118 mm 、 -0.153 mm ; 蜗杆头数决定误差分布形态, 多头蜗杆导程角效应使得啮入与啮出端修形呈现非对称扭曲。该研究可为工程中增径工艺参数选取、蜗轮副加载齿面接触分析以及抗磨损主动修形设计提供三维几何基础。

关键词: 蜗轮加工; 增径滚刀; 离散包络; 数字仿真; 齿面拓扑形貌

中图分类号: TH132 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202610020 **文章编号:** 0253-987X(2026)10-0231-11

Digital Simulation of Worm Gear Machining with Oversize Hob Using Discrete Envelope Method

GUO Xiang^{1,2}, CHANG Haifeng³, ZHENG Pantuo³, JIA Kang^{1,2}

(1. Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System, Xi'an Jiaotong University,

Xi'an 710049, China; 2. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

3. Hanjiang Tool Co., Ltd., Hanzhong, Shaanxi 723000, China)

Abstract: To address the issues of traditional analytical methods, such as numerical divergence when handling worm gear modification boundaries, as well as the low efficiency and difficulty in obtaining underlying data in solid simulations, a digital simulation modeling method for worm gear machining with an oversize hob based on the discrete envelope principle is proposed. A kinematic mathematical model for worm gear machining with an oversize hob is constructed. Based on the grid division of the worm gear tooth flank, the tooth flank is generated through the numerical envelope of discrete cutting intersection line families across multiple sections of the worm gear. The validity of the proposed method is verified using VERICUT simulation software,

收稿日期: 2026-02-24。 作者简介: 郭翔(2001—), 男, 硕士生; 贾康(通信作者), 男, 副研究员, 硕士生导师。 基金

项目: 陕西省重点研发计划资助项目(2025CY-JJQ-101)。

网络出版时间: 2026-05-09

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20260508.1550.012>

and the influence patterns of the oversize coefficient and the number of worm threads on the tooth flank topography are systematically analyzed. The results show that compared with the classical spatial meshing analytical method, the maximum absolute normal approximation error of the discrete envelope algorithm over the entire tooth flank domain strictly converges to the order of $1\text{ }\mu\text{m}$; the geometric error in the effective working region of the simulation is strictly controlled within 0.001 mm , with local residual errors not exceeding 0.01 mm . The oversize coefficient dominates the modification magnitude; when the oversize coefficient increases from 1.05 to 1.20, the maximum negative deviations at the edges of single- and triple-thread worms increase from -0.03 mm and -0.04 mm to -0.1184 mm and -0.1537 mm , respectively. The number of worm threads determines the error distribution pattern; the lead angle effect of multi-thread worms causes asymmetric distortion of the modification at the mesh-in and mesh-out ends. This study provides a three-dimensional geometric foundation for the selection of oversize process parameters, loaded tooth contact analysis of worm gear pairs, and proactive modification design for wear resistance in engineering practice.

Keywords: worm gear machining; oversize hob; discrete enveloping; digital simulation; tooth flank topological morphology

蜗轮蜗杆传动广泛应用于空间交错轴间的运动与动力传递。因具备大传动比、传动平稳及反向自锁等优良特性,该机构在伺服系统、回转工作台及各类精密驱动装置中发挥着关键作用^[1]。根据经典空间啮合理论,标准蜗轮副的共轭齿面在理论状态下呈线接触分布。然而,在实际运行工况中,制造公差、装配误差以及受载变形等因素往往导致实际接触区偏离理论中位并诱发边缘干涉,进而显著增加齿面胶合与点蚀的失效风险^[2]。针对蜗轮副齿面精确生成问题,Litvin等^[1]基于共轭曲面理论奠定了齿面包络的经典数学基础;程磊磊^[3]、郑立平^[4]与陈凯^[5]分别针对阿基米德(ZA)、渐开线(ZI)及直廓环面(TA)等典型蜗杆副,推导了精确的齿面方程并实现数字化建模,进一步结合有限元法探究了其静力学与动态接触特性。

为降低线接触副对系统误差的敏感性,吴序堂等^[6]率先提出局部共轭与点啮合理论,指出通过在齿面上预设几何失配量,将初始接触区局限在齿面中部,可有效控制接触迹线分布并改善润滑条件。任雯等^[7]进一步建立了含制造与安装误差的点接触共轭渐开线蜗杆传动数学模型,验证了点接触啮合可显著降低传动副对装配与制造误差的敏感性。基于该理论,增径滚刀展成加工作为一种主动引入齿面失配、调控蜗轮啮合品质的工艺方法得到广泛应用。该方法通过增大滚刀的分度圆直径,在包络过程中引入蜗轮齿面法向修形,徐志刚^[8]将其形成的鼓形接触特征概括为人工油涵效应。围绕增径滚刀

的几何设计与工艺适配,吴序堂^[9]推导了局部接触蜗轮副滚刀的基础设计公式;陈宁新^[10]结合美国齿轮制造商协会(AGMA)标准,构建了滚刀直径增量与刃磨寿命的定量映射关系;陆建伟等^[11]系统分析了安装偏角与中心距调整对齿面拓扑变形的耦合作用;张晓昱^[12]、李旺红^[13]进一步归纳了大直径滚刀的模数匹配、螺旋升角补偿及接触斑点调控等工艺原则。然而,上述研究多聚焦于二维轴向截面解析计算或局部特征分析,未全面表征三维齿面在复杂展成过程中的微观拓扑演变规律。

随着计算机学科的不断进步,数字化加工仿真已逐渐成为检测齿面精度与评估啮合特性的重要手段。陈伟等^[14]利用有限元法计算了ZC3型蜗杆副的时变啮合刚度。韩勇力等^[15]借助商用CAD平台的布尔运算功能,实现了增径蜗轮的虚拟材料去除与干涉检查。但必须指出,基于商用实体引擎的布尔运算在处理复杂空间连续曲面族的包络问题时,面临计算负荷大与数值发散的瓶颈,且难以提取齿面底层的精确离散点云与法矢数据,限制了其在深度几何形貌分析中的应用。

为规避实体仿真的局限性,离散数值包络展成成为一种可行的方法。Jia等^[16]提出一种双参数展成加工数学模型,利用离散交线族包络策略求解了滚齿与刮削等工艺中的瞬时接触线,并高精度重构了齿面。贾康等^[17]构建基于离散廓形扫掠的运动仿真框架,并通过VERICUT软件验证了该算法在处理复杂展成刃形时的几何保真度。在复杂刀具形

面设计领域,熊烽等^[18]实现了复杂铣刀螺旋槽的三维可视化;刘井玉等^[19]建立了等导程与等螺旋角刀刀曲线的统一参数化表达;胡贤金等^[20]提出了针对锥度螺旋面盘形刀具轮廓的解析逼近算法。

离散包络算法已在面齿轮等复杂空间机构的拓扑设计中展现出显著的几何计算优势^[21-23],同时基于离散网格与底层空间点云的数值求解方法也被成功引入复杂齿面的微观误差评估中^[24-26]。随着该类空间离散包络算法向蜗轮副精细化建模领域的延伸,Sohn 等^[27]系统量化了滚切轴交角误差对圆柱蜗轮几何干涉的畸变影响;Dudás^[28]借助数值算法平台,实现了点接触蜗轮副的高分辨率虚拟包络仿真;Hargâș 等^[29]建立带轴承的非传统蜗轮副离散数学模型,探索了以滚动摩擦替代传统滑动摩擦的接触机制。

综上所述,当前蜗轮副在基础啮合理论、增径滚刀宏观参数设计以及基于实体引擎的宏观加工仿真等方面已取得系统性成果。然而,针对增径加工所诱发的蜗轮齿面微观三维拓扑畸变,尚缺乏高效、定量的预测手段。鉴于此,本文提出一种基于离散包络原理的增径蜗轮数字化加工仿真建模方法。通过建立增径滚刀变位安装的空间展成运动学模型,在对蜗轮待加工齿面进行离散栅格划分的基础上,完成多截面离散切削交线族的外包络求解;依托 VERICUT 虚拟加工平台,对该数学模型的几何精度与数值保真度进行验证,并分析增径系数与蜗杆头数对蜗轮齿面修形拓扑幅值及接触边界演变的影响规律。

本文提出的基于离散包络原理的蜗轮齿面精确建模方法,旨在为开展蜗轮蜗杆副的齿面接触分析、有限元应力耦合计算以及抗磨损主动修形设计提供三维几何基础。

1 增径蜗轮滚刀蜗轮加工数学模型构建

蜗轮蜗杆传动是一种典型的交错轴传动,其齿面展成过程是基于刀具与工件严格的运动学映射关系。为构建增径滚刀加工蜗轮的数学模型,建立坐标系如图 1 所示。图中,下标 c 和 w 分别表示滚刀(蜗杆)、工件(蜗轮),下标 f 表示固定基准。定义空间固定参考坐标系 $S_{f1}(O_c-x_{f1}y_{f1}z_{f1})$ 与 $S_{f2}(O_w-x_{f2}y_{f2}z_{f2})$,分别作为滚刀和工件的绝对静止基准。设动坐标系 $S_c(O_c-x_cy_cz_c)$ 、 $S_w(O_w-x_wy_wz_w)$ 分别固联于蜗杆与蜗轮。初始状态下,动坐标系回转轴 z_c 、 z_w 分别与 z_{f1} 、 z_{f2} 重合。加工过程中,动坐标系

S_c 和 S_w 相对于固定参考坐标系 S_{f1} 、 S_{f2} 分别产生转角 φ_c 、 φ_w 。这两组动坐标系的空间拓扑位姿由安装中心距 E_c 和轴交角 Σ 唯一确定,其中 E_c 为两异面回转轴线间的公垂线长度, Σ 为轴线在空间投影面上的夹角。

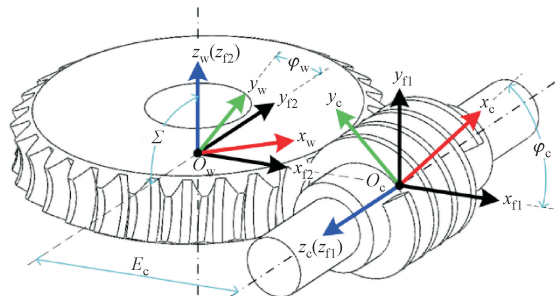


图 1 蜗轮蜗杆传动安装模型

Fig. 1 Installation model of worm gear drive

在常规加工中,这些参数通常与标准啮合状态一致。然而,本文采用的增径蜗轮滚刀虽然保持了与工作蜗杆相同的导程 L_c 和旋向,但其分度圆半径相较于标准蜗杆显著增大。这种刀具几何尺寸的变异性必然导致加工时的空间安装参数与理论啮合参数发生偏离,从而需要在数学模型中对加工中心距及安装轴交角进行重构与修正。

为了保证加工后蜗轮与标准蜗杆之间保持基本的啮合安装关系,需确保蜗轮的节圆 R_w 保持不变。由于增径蜗轮滚刀的节圆半径 R_{ci} 大于标准蜗杆节圆半径 R_c ,导致其节圆螺旋角 β_{ci} 相对于标准蜗杆节圆螺旋角 β_c 发生变化。相应地,安装中心距 E_c 与安装轴交角 Σ 相较于啮合传动发生改变,具体表达式如下

$$E_c = R_w + R_{ci} \quad (1)$$

$$\Sigma = k_w \beta_w + k_c \beta_{ci} \quad (2)$$

式中: k_c 、 k_w 分别为蜗杆和蜗轮的螺旋方向系数, k 取 1、0、-1 分别表示左旋、直齿和右旋;增径蜗轮滚刀节圆螺旋角 β_{ci} 的定义如下

$$\beta_{ci} = \arctan\left(\frac{R_c}{R_{ci}} \cos \beta_c\right) \quad (3)$$

在蜗轮的展成加工中,增径蜗轮滚刀与蜗轮工件绕各自回转轴按照传动比做旋转运动,蜗轮滚刀转角 φ_c 与蜗轮工件转角 φ_w 之间的关系如下

$$\frac{\varphi_c}{\varphi_w} = \frac{Z_w}{Z_c} \quad (4)$$

式中: Z_w 为蜗轮齿数; Z_c 为蜗轮滚刀头数。

基于空间齐次坐标变换,构建蜗杆滚刀坐标系 S_c 向蜗轮坐标系 S_w 转换的空间齐次坐标系变换矩阵 M_{cw} 如下

$$\mathbf{M}_{cw} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi_w) & -\sin(-\varphi_w) & 0 & 0 \\ \sin(-\varphi_w) & \cos(-\varphi_w) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & E_c \\ 0 & \cos \Sigma & -\sin \Sigma & 0 \\ 0 & \sin \Sigma & \cos \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_c & -\sin \varphi_c & 0 & 0 \\ \sin \varphi_c & \cos \varphi_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

由此,可将刀具切削刃点 $\mathbf{P}_c$ 变换为蜗轮坐标系下的点 $\mathbf{P}_c^w$, 表示如下

$$[\mathbf{P}_c^w, 1]^T = \mathbf{M}_{cw} [\mathbf{P}_c, 1]^T \quad (6)$$

2 基于离散包络的蜗轮齿面加工仿真

蜗杆滚刀与蜗轮之间通过啮合运动,完成蜗轮齿面的展成切削。基于蜗轮滚刀等效齿面和蜗轮齿面区域建模,然后对蜗轮蜗杆的啮合运动构建包络方程,求解蜗轮齿面。

2.1 蜗杆表面参数化建模

由于增径蜗轮滚刀采用与标准蜗杆一致的结构,因此采用标准蜗杆表面开展蜗轮滚刀等效加工表面建模。这里以ZI型蜗杆为对象,基于给定的齿数 Z 、法向模数 m_n 、法向压力角 α_{kn} 、螺旋角 β 、法向弧齿厚 S_n 等参数,确定蜗杆端面渐开线方程如下

$$\begin{cases} x(\theta) = R_b [\cos(\theta + \delta) + \theta \sin(\theta + \delta)] \\ y(\theta) = R_b [\sin(\theta + \delta) - \theta \cos(\theta + \delta)] \end{cases} \quad (7)$$

式中: R_b 为基圆半径; θ 为渐开线的滚动角,在半径 R 处有 $\theta = \tan(\arccos(R_b/R))$; δ 为渐开线在基圆起始位置与 x_c 轴的夹角,有 $\delta = \pi/Z_c - S_n/Z_c m_n - \tan \alpha_{kt} + \alpha_{kt}$, 其中 α_{kt} 为端面压力角。

基于蜗杆导程 L_c 与旋向系数 k_c ,可确定其表面参数方程 $\mathbf{r}_c(\theta, \varphi)$ 如下

$$\begin{cases} x = R_b [\cos(\theta + \delta + \varphi) + \theta \sin(\theta + \delta + \varphi)] \\ y = R_b [\sin(\theta + \delta + \varphi) - \theta \cos(\theta + \delta + \varphi)] \\ z = 0.5 k_c L_c \varphi / \pi \end{cases} \quad (8)$$

2.2 蜗轮面区域网格化建模

为了提升蜗轮的承载能力,设计其有效齿面为与蜗杆截面相配的一个局部圆环结构,以增大与蜗杆之间的啮合接触区域。如图2所示,为便于蜗轮齿面后续的加工仿真,将蜗轮齿面表达为绕标准蜗杆中心 $\mathbf{O}_c = [E_c, 0, 0]^T$ 的局部扇形栅格区域,即限定径向为 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 、夹角为 $[-\Phi_w, \Phi_w]$ 区域。基于此栅格结构,可进行蜗轮齿面点的拓扑关系表达,通过对齿面栅格点的加工仿真计算,构建蜗轮加工齿面。

将蜗轮齿面区域沿径向和周向分别划分为 M 和 N 个均匀离散位置,共构成 $M \times N$ 个栅格点。在蜗轮中截面 $x_w O_w z_w$ 上,第 i 个径向 j 个周向位置对

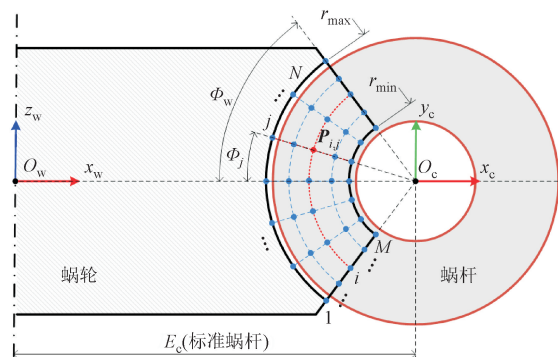


图2 蜗轮齿面结构与离散化网格划分

Fig. 2 Tooth flank structure and grid discretization mesh division of worm gear

应的栅格点 $\mathbf{P}_{i,j} = [x, y, z]^T$ 的坐标计算如下

$$\begin{cases} x = E_c - R_i \cos \Phi_j \\ y = 0 \\ z = R_i \sin \Phi_j \end{cases} \quad (9)$$

式中: R_i 和 Φ_j 分别表示如下

$$\begin{cases} R_i = \frac{(i-1)r_{\max} + (M-i)r_{\min}}{M-1} \\ \Phi_j = \frac{2j-1-N}{N-1} \Phi_w \end{cases} \quad (10)$$

针对蜗轮轮齿的实体构建,可通过中截面 $x_w O_w z_w$ 所划分的栅格结构,进行蜗轮齿面对应栅格点的构建,具体如图3所示。首先,通过蜗杆回转轴 z_c 和中截面栅格点 $\mathbf{P}_{i,j}$,确定出空间平面 F_j ,蜗杆滚刀在该平面内切削出的廓形即为蜗轮齿槽实体在该平面内的截型。然后,令该截面加工廓形与点 $\mathbf{P}_{i,j}$ 半径相

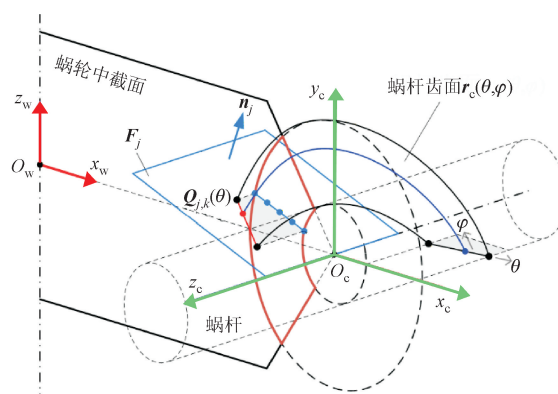


图3 蜗杆与截面求交

Fig. 3 Intersection between worm and section plane

同的点为对应的蜗轮齿面栅格点,以便于后续蜗杆滚刀对于蜗轮的切削仿真栅格点求解。最后,基于蜗轮齿表面栅格点即可构建出蜗轮轮齿的实体。

2.3 基于离散包络的蜗轮齿面求解

在蜗杆滚刀与蜗轮工件的啮合运动过程中,滚刀的切削刃可等效为蜗杆齿面,完成对蜗轮齿面的包络切削。将啮合运动过程离散化为一系列运动时刻,每一运动时刻滚刀的等效蜗杆齿面与蜗轮啮合,对蜗轮实体形成切除。基于前述蜗轮齿面的网格划分可知,蜗轮实体可近似分割成一系列绕啮合蜗轮回转轴的平面,滚刀等效蜗杆面与该平面的交线即为当前运动时刻下蜗轮齿面的切削廓形。基于此,全体离散切削时刻形成的所有切削廓形的外包络即为滚刀对蜗轮该截面上的最终加工廓形。当啮合运动的离散时刻足够密集时,该离散廓形曲线族的外包络逼近准确的加工廓形。

离散包络的核心在于求解每一时刻滚刀曲面与蜗轮目标截面 F_j 的交点。由 F_j 的定义可知,其法向量 $\mathbf{n}_j = [\sin \Phi_j, \cos \Phi_j, 0]^T$ 。在蜗轮坐标系下,该法向量仅取决于网格的周向角位置。

当滚刀旋转至位置 φ_k (k 为任意时刻) 时,通过坐标变换矩阵 $\mathbf{M}_{cw}(\varphi_k)$,可将滚刀表面 $\mathbf{r}_c(\theta, \varphi)$ 变换至蜗轮坐标系。其与蜗轮截面 F_j 的交线满足如下平面方程

$$\mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{M}_{cw}(\varphi_k) \cdot \mathbf{r}_c(\theta, \varphi) - \mathbf{O}_c) = 0 \quad (11)$$

对于滚刀表面 $\mathbf{r}_c(\theta, \varphi)$,其每一径向位置 θ 对应一条螺旋线。当滚刀曲面的径向位置 θ 固定不变时,复杂三维曲面退化成一维螺旋线,此时相交方程中就仅剩 φ 一个未知量,可通过数值搜索算法确定,得到与截面 F_j 的交点 $\mathbf{Q}_{j,k}(\theta) = \mathbf{M}_{cw}(\varphi_k) \cdot \mathbf{r}_c(\theta, \varphi)$ 。基于此,对滚刀全体径向位置进行交点计算并顺序连接,即可得到滚刀旋转至位置 φ_k 时对于截面 F_j 的切削交线。

对于蜗轮轮齿的每一 F_j 截面,遍历全体离散运动时刻 $\{\varphi_k\}$,求解得到滚刀在截面 F_j 上的切削交线族 $\Gamma_{k,j}$ 。如图 4 所示,蜗杆滚刀对于蜗轮的齿槽伴随啮合逐渐切削成型,截面 F_j 上切削交线族的外包络廓形构成其最终的加工截型。这里,依据中截面栅格点在径向范围 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 内的 M 个径向离散位置,从 $\mathbf{P}_{i,j}$ 点出发沿 y_w 轴搜索最大/最小值作为外包络点,然后将其沿径向顺序连接,即构成蜗轮轮齿在截面 F_j 上的加工齿形。进一步对 N 个转角对应的截面加工齿形按照其径向点对应位置依据转角顺序连接,即可得到加工出的轮齿两侧齿面。

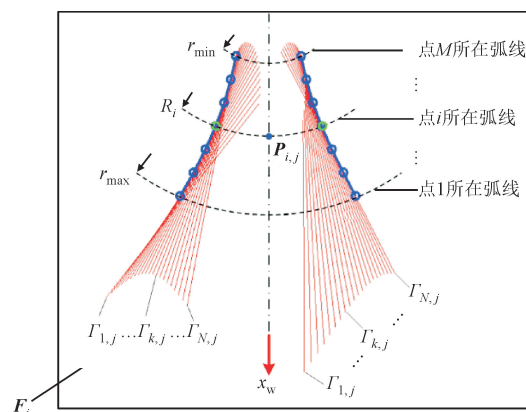


图 4 单个截面上的蜗轮轮齿廓形

Fig. 4 Tooth profile of worm gear on a single section plane

在传统的空间啮合解析理论中,共轭面的求解通常依赖于联立非线性瞬时接触方程组,该过程要求系统的雅可比矩阵在求解域内保持非奇异。当求解范围处于齿根或齿顶等曲率变化较大的区域时,空间偏导数的剧烈波动容易导致雅可比行列式趋于 0,进而引起数值迭代算法的发散。本节构建了区域网格化模型,将连续的目标蜗轮齿面离散为由特定径向与周向坐标确定的节点集合。在此基础上,结合式(11)的空间平面约束,解耦三维空间包络求交问题。在任意给定的离散运动时刻下,刀具曲面与目标截面的求交转化为单变量方程求解。对于特定网格节点,外包络的计算过程转化为在由有限个离散交线坐标构成的集合中进行极值比较。由于有限集合的极值搜索主要涉及代数大小判定,不直接依赖于曲面的连续导数与雅可比矩阵求逆,因此计算过程受局部曲率突变的影响较小。通过上述离散网格架构与降维求交模型,本方法在全齿面域内具备相应的数值计算稳定性。

3 离散包络算法理论验证与蜗轮齿面拓扑演变分析

为验证离散包络算法的理论严密性与工程有效性并探究增径加工的微观机理,本节分别从数学推导、实体仿真与规律分析 3 个方面展开论述。首先,构建空间法向误差距离泛函,从数学几何层面论证离散数值算法对解析包络理论的极限收敛性。然后,依托虚拟加工平台,施加机床运动学约束,验证展成模型在实体切削环境中的几何准确性。最后,基于经验证的仿真模型,定量分析增径系数与蜗杆头数对蜗轮齿面微观拓扑形貌及接触边界演变的非线性影响规律。

3.1 离散包络算法收敛性验证

为严谨论证本文所提离散包络算法的理论收敛精度,以经典空间啮合解析法为基准进行对比分析。根据空间啮合理论,蜗杆刀具与蜗轮的理论共轭齿面需严格满足运动学接触条件,即刀具表面点法向量 $\mathbf{n}_c(\varphi, \theta)$ 与相对滑动速度 $\mathbf{v}_{cw}(u, v)$ 的点积为0,表达式写为

$$\mathbf{n}_c(u, v) \cdot \mathbf{v}_{cw}(u, v) = 0 \quad (12)$$

通过联立式(12)与空间坐标变换矩阵 $\mathbf{M}_{cw}$,可求得理论解析齿面的精确数学解 $\mathbf{r}_{ana}(\varphi, \theta)$ 。

在本文构建的离散包络算法中,设包络运动的离散角步长为 $\Delta\varphi$,刀具截面廓形的离散径向步长为 Δr 。对于蜗轮目标截面上的任意离散网格节点 $\mathbf{P}_{scp}$,定义其逼近理论包络面的法向误差距离泛函 e 为空间点到解析曲面的最小欧氏距离,表达式为

$$e = \min_{(u, v)} \|\mathbf{P}_{scp}(\Delta\varphi, \Delta r) - \mathbf{r}_{ana}(u, v)\| \quad (13)$$

当离散步长趋于无穷小,即 $\Delta\varphi \rightarrow 0$ 且 $\Delta r \rightarrow 0$ 时,离散包络交线族将无限逼近于理论接触线的外包络,即存在极限

$$\lim_{\Delta\varphi, \Delta r \rightarrow 0} e = 0 \quad (14)$$

为验证上述理论极限,在确保高分辨率截面离散条件下,设定包络运动的离散时刻数为 N_R ,开展极值收敛性数值实验。如图5(a)所示,提取 $N_R = 20, 35, 50, 65$ 这4个离散时刻,绘制齿面法向误差拓扑图,直观展示不同收敛阶段的典型三维几何特征。同时,为精细刻画误差收敛的连续演变趋势,设采样步长为5,绘制误差统计曲线,如图5(b)所示。

由图5(a)可知,在 N_R 从20增加至65的过程中,离散算法计算节点与理论解析曲面之间的法向逼近误差数值呈递减趋势。当 $N_R = 20$ 时,齿面最大绝对法向误差接近 $3 \mu\text{m}$;当 $N_R = 35$ 时,左、右侧齿面的最大绝对法向误差分别降至 $0.51, 0.89 \mu\text{m}$;当 $N_R = 50$ 时,左侧齿面的局部极大值为 $0.56 \mu\text{m}$,对应的平均误差均值继续下降;当 $N_R = 65$ 时,左、右侧齿面的最大绝对误差均收敛至 $0.28 \mu\text{m}$ 。由图5(b)可见,在 $N_R = 65$ 时刻,左、右齿面的平均绝对误差均稳定在 $1 \mu\text{m}$ 以下。

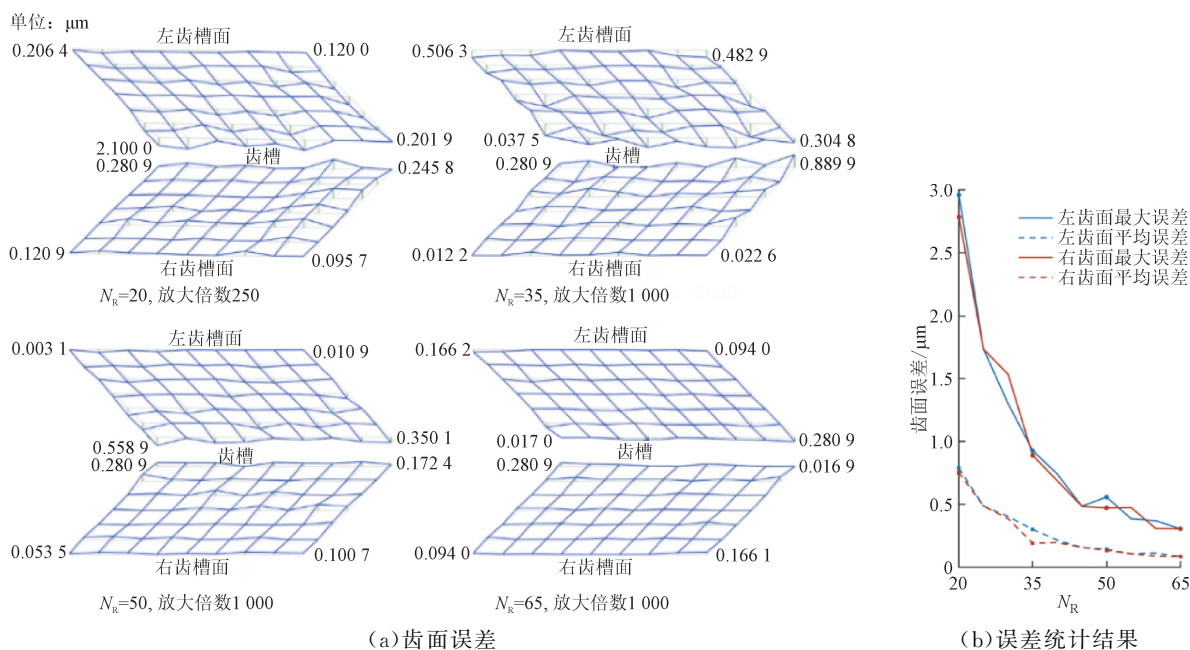


图5 离散包络算法与解析法齿面法向误差的对比

Fig. 5 Comparison of tooth flank normal error between discrete envelope algorithm and analytical method

由图5(a)的拓扑数据可知,法向误差呈现由齿面中部向齿根递增的分布规律。在齿面中部啮合区域和齿顶部分,法向逼近误差分布范围在 $0.1 \sim 0.01 \mu\text{m}$,且全齿面的最大法向误差极值均分布于齿根过渡区域。综上,离散包络算法的截断误差随采样密度的增加而减小,在 $N_R = 65$ 时,该算法在全

齿面范围内的最大原理误差数值被限制在 $3 \mu\text{m}$ 以内,能够满足加工仿真的定量计算精度要求。

3.2 基于 VERICUT 软件的加工仿真

为了开展后续的虚拟实体切削与误差比对,基于离散包络算法输出的节点重构高保真的三维基准实体模型。以表1所示的蜗轮蜗杆为对象,采用本

文算法开展蜗轮齿面加工数值计算。将蜗轮目标齿面划分为 9×7 的栅格区域,设定 $N_R = 65$ 。图 6 给出了蜗轮蜗杆加工的仿真过程。由图可见,在蜗轮坐标系 S_w 下,对全部离散啮合时刻 $\{\varphi_k\}$ 所对应的滚刀等效蜗杆面进行逐一截面求交,各截面 F_j 上形成一族离散切削交线。随着离散时刻的遍历推进,该切削交线族的外包络逐步收敛,最终可确定出各截面上的蜗轮齿面点集合,从而完成全齿面的离散化数值重构。

表 1 蜗轮蜗杆的几何参数

Table 1 Geometric parameters of worm gears

部件	参数	数值或属性
蜗轮	模数 m_n/mm	2
	法向压力角 α_{kn}	20°
	齿数 Z_w	32
	变位系数 x_2	0
滚刀	模数 m_n/mm	2
	法向压力角 α_{kn}	20°
	头数 Z_c	1
	螺旋方向	右旋

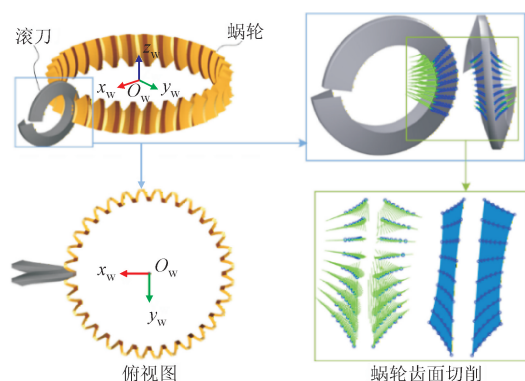


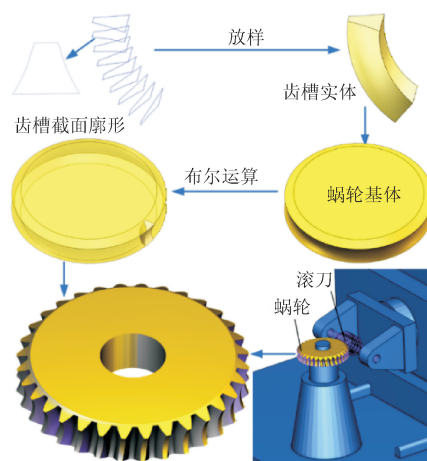
图 6 蜗轮蜗杆加工仿真过程

Fig. 6 Simulation process of worm gear hobbing

图 7(a)给出了蜗轮 CAD 实体基准模型的建模流程。将各截面 F_j 上计算得到的离散包络交线数据点集直接导入 Solidworks 软件,依次构建出每一个截面的连续齿廓曲线。将沿周向分布的多组截面齿廓曲线作为边界轮廓,通过曲面放样技术重构出光滑的齿槽三维包络曲面,并对其进行拓扑封闭生成单齿槽的实体域 V_{space} 。建立标准蜗轮的回转体基体 V_{blank} 后,利用空间布尔差集运算进行阵列切除,从而在三维设计软件中精确重构蜗轮的 CAD 实体基准模型。

为了验证离散包络数学模型的有效性,在 VERICUT9.6 软件中构建机床运动学模型并开展虚

拟切削。仿真过程施加了严格的空間刚性联动约束:刀具径向定位精确维持预设的安装中心距 E_c ;在稳态切削阶段,滚刀主轴与蜗轮工件回转轴的角位移增量比 $\Delta\varphi_c/\Delta\varphi_w$ 恒等于 32。该增量比的设置与理论传动比 $i = Z_w/Z_c$ 严格吻合,从动态轨迹层面验证了所构建的展成加工数学模型的准确性。切削完成后,采用 Auto-diff 模块将仿真齿面与标准 CAD 模型进行微观几何比对。为高保真捕获离散切削交线族的包络逼近误差,设定全局三维公差带阈值为 0.001 mm ,分析结果如图 7(b)所示。由图可见,VERICUT 软件仿真得到的蜗轮齿面与标准蜗轮齿面在大部分区域的误差均小于 $1 \mu\text{m}$,仅在局部存在若干条纹状欠切残留,误差约为 0.01 mm ,可能是由于齿面在 CAD 建模过程中基于多个截面廓形曲线放样产生的误差所导致。这表明本文方法能够对蜗轮加工过程进行有效仿真,进而得到准确的蜗轮齿面。



(a) 蜗轮 CAD 实体基准模型构建过程



(b) 蜗轮齿面误差云图

图 7 蜗轮滚齿加工仿真与误差分析

Fig. 7 Simulation and error analysis of worm gear hobbing

3.3 增径系数对齿面形貌误差的影响规律

基于前述离散包络数值仿真模型,以蜗轮齿槽内预设的 9×7 栅格节点为基准计算空间法向偏差。为直观表征微观误差的空间分布特征,本文构建了一种基于线性仿射变换的几何映射模型。该模型将三维曲面上呈非正交分布的离散节点,通过仿射映射转化为二维平面内的平行四边形基准网格。基于

该映射,绘制单头($Z_c = 1$)、双头($Z_c = 2$)及三头($Z_c = 3$)蜗杆在不同增径系数($\xi = 1.05 \sim 1.20$)下

的误差拓扑图如图 8 所示,定量展示了 3 种工况下的齿面法向误差拓扑演变全貌。

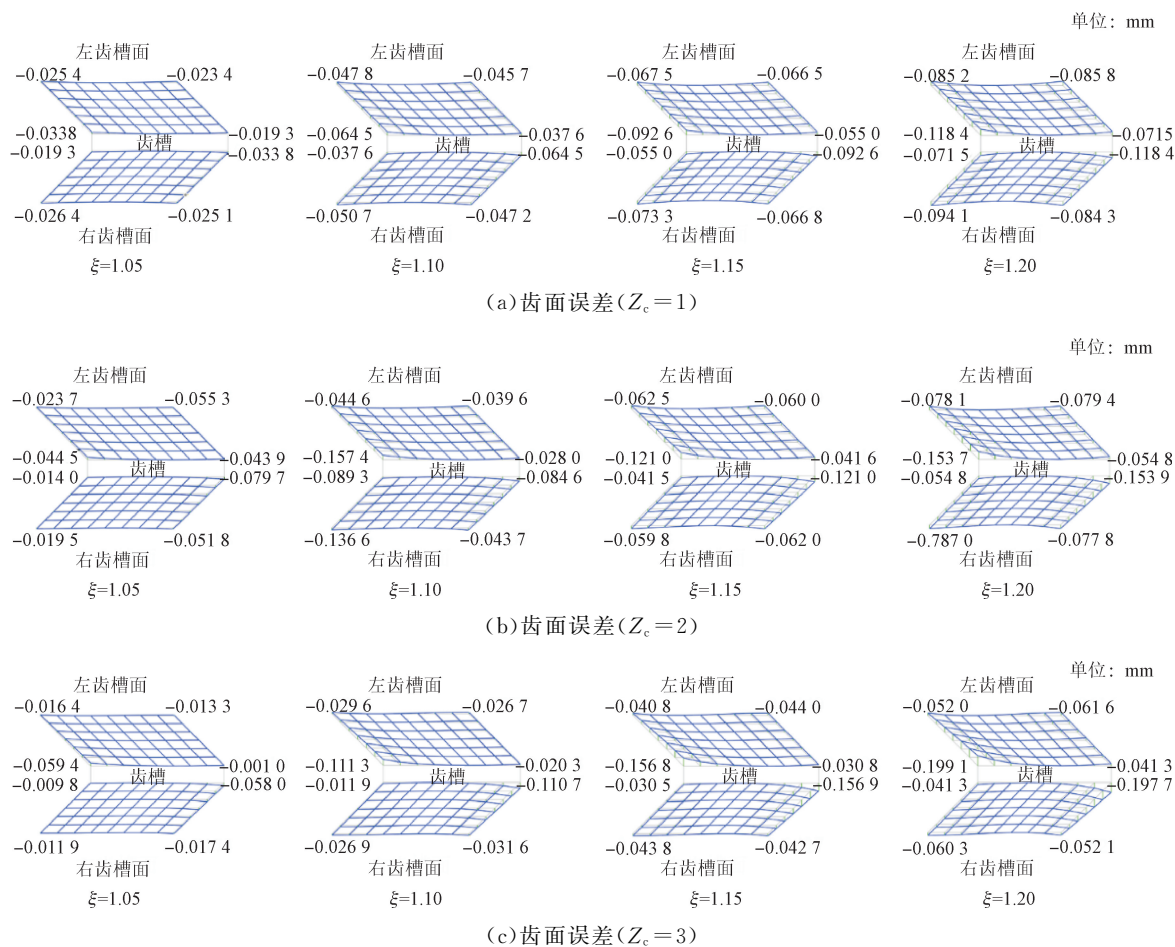


图 8 不同增径系数下的齿面误差(放大 5 倍)

Fig. 8 Tooth flank error under different diameter increasing coefficients (magnified by 5 times)

分析图 8 可知,不同头数与增径系数的组合对齿面误差分布产生了明显的差异化影响。在低增径系数($\xi = 1.05$)工况下,单头、双头及三头蜗杆的齿面形貌变化均相对平缓,齿根及端部边缘处的最大负偏差数值均控制在 $-0.03 \sim -0.04$ mm 的微小范围内,齿面中部保留了宽阔的接近零误差的理论共轭区域。然而,随着增径系数提升至 $\xi = 1.20$,所有工况下的齿面边缘切除量均发生了非线性的剧烈增长:单头蜗杆的边缘最大负偏差急剧攀升至 $-0.118 4$ mm;双头蜗杆在同等条件下的偏差进一步增大至 $-0.153 7$ mm,修形幅度相较于低增径状态增长了约 3.5~4.0 倍,导致齿面中部的平坦接触区被迫大幅收缩。与此同时,误差的拓扑分布形态随头数的增加发生了质的改变:单头蜗杆的误差等高线沿齿宽方向保持较好的对称性;双头及三头蜗杆在 $\xi = 1.20$ 的高增径条件下,误差分布不再保持

对称特征,而是呈现出明显的扭曲形态,具体表现为沿螺旋线方向倾斜的非对称梯度分布,且头数越多,这种由导程角引起的拓扑畸变越为显著。

由图 8 还可以看出,所有工况下的齿面误差均呈现出典型的鼓形特征:齿面几何中心区域误差接近于 0,构成理论接触区;沿齿宽方向齿面负偏差逐渐增大,在啮入端与啮出端,齿面达到最大负偏差。通过分析可知,滚刀增径系数 ξ 是决定齿面修形量级的主导参数,其对法向偏差的影响表现出显著的非线性增益特性,即 ξ 的微小增量将诱发边缘切除量的较大增长。滚刀增径导致蜗轮齿面形成“中心平坦、两端下陷”的几何形态,与蜗轮副的磨损跑合特性存在直接的映射关系:端部的负偏差在初始装配状态下构成了几何间隙,使得初始接触斑点被物理限制在齿面中心;在随后的跑合阶段,随着齿面材料的微量磨损,接触区域逐渐向啮入/啮出端扩展。

这种预设的几何梯度保证了接触区在扩展过程中不会延伸至齿面最边缘,从而避免了边缘干涉和应力集中。此外,蜗杆头数主要影响着修形的拓扑形态与敏感度。随着头数增加,蜗杆导程角增大,啮合面的空间曲率半径发生变化。这使得由增径引起的径向几何增量在齿面法线方向上的投影分量分布不均,进而导致多头蜗杆的齿面误差分布呈现更强的非对称性和更为陡峭的梯度特征。

上述由增径加工引入的特定齿面误差拓扑结构,在实际啮合中转化为具有重要工程价值的局部共轭特性。齿面边缘显著的负偏差实际上构成了预设的几何失配量,这种结构有效地迫使瞬时接触椭圆向齿面几何中心收缩,从而实现了接触区的可控分布。其工程优势在于:一方面,这种中心集中的接触模式极大降低了传动副对轴交角误差和中心距安装偏差的敏感性,有效规避了传统线接触模型中因误差导致的边缘载荷集中风险;另一方面,齿面四周形成的楔形几何间隙在传动中充当了人工油涵,有利于流体动压润滑油膜的建立与维持,从而显著改善了蜗轮副的摩擦学性能并延长了服役寿命。

基于上述拓扑演变规律,可进一步抽象出增径工艺参数和齿面形貌特征的数学映射函数模型。设标准无修形条件下的蜗轮共轭齿面为 $\mathbf{r}_0(u, v)$, 增径加工引入的法向空间偏差场映射算子为 $\Delta \mathbf{n}(u, v)$, 则实际加工成型齿面 $\mathbf{r}_{\text{real}}$ 的几何拓扑表示为

$$\mathbf{r}_{\text{real}}(u, v) = \mathbf{r}_0(u, v) + \Delta \mathbf{n}(u, v, \xi, Z_1) \quad (15)$$

式(15)中,偏差场映射算子 $\Delta \mathbf{n}$ 表现出对工艺参数的强非线性依赖,滚刀增径系数 ξ 主导了接触区向齿面几何中心收缩的径向梯度幅值,即偏导数 $\partial |\Delta \mathbf{n}| / \partial \xi > 0$ 。蜗杆头数 Z_1 通过改变瞬时螺距引入了空间扭曲算子,导致接触区边界呈现沿螺旋线方向的非对称倾斜。该映射模型构建了齿面三维扭曲的近似评价基准,可通过解析特定工艺参数下的偏差场映射算子 $\Delta \mathbf{n}$, 快速获取齿面拓扑变形的定量分布。这种近似评价模型脱离了繁杂的实体布尔运算,不仅便于直接开展蜗轮副齿面局部接触的几何分析,还易于从底层网格数据中提取拓扑演变的规律性,为工程实际中增径系数等核心工艺参数的定量选取和优化匹配提供了直接的理论基础。

4 结 论

本文提出了一种基于离散包络原理、适用于增径蜗轮滚刀的加工仿真方法,研究得到的主要结论如下。

(1)建立严密的离散包络逼近数学模型,完成了极值收敛性数值验证。通过引入法向距离泛函与经典空间啮合解析法进行全齿面拓扑对比,结果表明:在确保高分辨率截面离散条件下,离散包络交线族无限逼近于理论接触线,全齿面域内的最大绝对法向逼近误差严格收敛至 $1 \mu\text{m}$ 数量级,均方根误差趋近于 0。这从底层泛函分析角度证明了本算法在处理复杂修形边界时的极高几何精度与数值稳定性。

(2)验证了数字化加工仿真在实体切削环境中的工程有效性与高保真度。基于构建的加工运动模型,在 VERICUT 软件中开展虚拟实体切削,当施加严格空间刚性联动约束固定传动比恒为 32 时,仿真齿面与理论 CAD 模型的全局三维微观对比表明:绝大部分有效工作区域的几何误差被严格控制在 $1 \mu\text{m}$ 以内,局部放样残余误差不超过 0.01 mm ,验证了采用离散交线族构建复杂蜗轮齿面的精确性。

(3)探讨了增径系数和蜗杆头数对蜗轮齿面形貌的影响规律。增径加工在根本上形成了齿面鼓形特征及边缘几何失配,其中增径系数呈非线性增长趋势,主导修形量级;蜗杆头数决定误差分布形态,多头蜗杆的导程角效应致使啮入/啮出端修形呈现非对称扭曲。

本文提出的基于离散包络原理的蜗轮齿面精确建模方法,适用于增径蜗轮滚刀及其他具有复杂廓形的展成刀具加工仿真,可为后续开展蜗轮蜗杆副的齿面接触分析、有限元应力耦合计算以及抗磨损主动修形设计提供三维几何基础。

参考文献:

- [1] Litvin F L, Fuentes A. Gear geometry and applied theory [M]. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [2] 贺文建. 非对偶蜗轮蜗杆传动齿面接触分析与仿真研究 [D]. 贵阳: 贵州大学, 2009.
- [3] 程磊磊. 阿基米德蜗杆传动的参数化设计与有限元分析研究 [D]. 西安: 长安大学, 2017.
- [4] 郑立平. 渐开线蜗杆机构的参数化设计及动态接触特性研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2012.
- [5] 陈凯. 直廓环面蜗杆副数字化造型及误差影响分析 [D]. 西安: 长安大学, 2017.
- [6] 吴序堂, 王小椿, 沈谦. 局部接触蜗轮副蜗轮滚刀的设计原理 [J]. 工具技术, 1988(9): 1-7.

Wu Xutang, Wang Xiaochun, Shen Qian. Design prin-

- ciple of hob for local contact worm gear pair [J]. Tool Engineering, 1988(9): 1-7.
- [7] 任雯, 李杰, 王天羽, 等. 点接触共轭渐开线蜗杆副啮合理论及性能分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50 (10): 3183-195.
- Ren Wen, Li Jie, Wang Tianyu, et al. Meshing theory and performance analysis of point-contact conjugate involute worm gear pair [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50 (10): 3183-195.
- [8] 徐志刚. 用增大蜗轮滚刀直径的方法来加工蜗轮 [J]. 航空工艺技术, 1985(9): 33-34.
- Xu Zhigang. Machining worm gears with increased diameter hobs [J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 1985(9): 33-34.
- [9] 吴序堂. 齿轮啮合原理 [M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2009.
- [10] 陈宁新. 蜗轮滚刀设计方法研究 [J]. 机械传动, 2015, 39(5): 37-41.
- Chen Ningxin. Investigation of the design method of worm-gear hob [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(5): 37-41.
- [11] 陆建伟, 陈宁新. 蜗轮齿面滚切误差及调整 [J]. 机械传动, 2015, 39(6): 29-34.
- Lu Jianwei, Chen Ningxin. Hobbing error and adjustment of worm-gear tooth surface [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(6): 29-34.
- [12] 张晓昱. 大直径滚刀加工蜗轮的新方法 [J]. 金属加工(冷加工), 2012(18): 46-47.
- Zhang Xiaoyu. A new method for machining worm gears with large diameter hobs [J]. Metal Working (Metal Cutting), 2012(18): 46-47.
- [13] 李旺红. 浅析用增径滚刀加工蜗轮的原理和方法 [J]. 机电信息, 2017(12): 100-102.
- Li Wanghong. Analysis of the principle and method of machining worm gears with increased diameter hobs [J]. Mechanical and Electrical Information, 2017 (12): 100-102.
- [14] 陈伟, 王国民, 林佳杰, 等. 基于有限元法的 ZC3 型蜗轮蜗杆啮合刚度计算 [J]. 机械传动, 2018, 42(1): 61-64.
- Chen Wei, Wang Guomin, Lin Jiajie, et al. Calculation of mesh stiffness for ZC3 worm gear and worm based on the finite element method [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(1): 61-64.
- [15] 韩勇力, 劳奇成, 张登泉. 滚刀增径对蜗轮齿面啮合斑点影响的仿真分析 [J]. 机电信息, 2019 (33): 134-135.
- Han Yongli, Lao Qicheng, Zhang Dengquan. Simulation analysis of the influence of hob diameter increase on contact spots of worm gear tooth surface [J]. Mechanical and Electrical Information, 2019 (33): 134-135.
- [16] Jia Kang, Guo Junkang, Zheng Shuai, et al. A general mathematical model for two-parameter generating machining of involute cylindrical gears [J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 75: 37-51.
- [17] 贾康, 郑帅, 郭俊康, 等. 一种刮削加工切削齿刃形计算与加工运动仿真方法 [J]. 机械工程学报, 2019, 55(1): 216-224.
- Jia Kang, Zheng Shuai, Guo Junkang, et al. A method of cutter profile identification and machining motion simulation for skiving [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(1): 216-224.
- [18] 熊烽, 宾鸿赞. 复杂形状刀具设计的三维可视化 [J]. 工具技术, 2002, 36(4): 18-21.
- Xiong Feng, Bin Hongzan. 3-D visualization in design of complex shaped cutters [J]. Tool Engineering, 2002, 36(4): 18-21.
- [19] 刘井玉, 刘华明, 王延福. 螺旋刀刃曲线的统一模型: 普通螺旋线 [J]. 工具技术, 1998, 32(6): 24-26.
- Liu Jingyu, Liu Huaming, Wang Yanfu. Study on the uniform model of helical cutting edges of tools [J]. Tool Engineering, 1998, 32(6): 24-26.
- [20] 胡贤金, 邱易, 杨冰. 锥度螺旋面加工用盘形刀具的轮廓解析法 [J]. 工具技术, 2020, 54(7): 47-52.
- Hu Xianjin, Qiu Yi, Yang Bing. Disc shaped cutters profile analytical method for machining taper spiral surface [J]. Tool Engineering, 2020, 54(7): 47-52.
- [21] Cai Zhiqin, Lin Chao. Research on the discrete algorithm of tooth surface for a curve-face gear [J]. Journal of Mechanical Design, 2020, 142(5): 053301.
- [22] Hu Yanan, Lin Chao, Li Shuo, et al. The mathematical model of curve-face gear and time-varying meshing characteristics of compound transmission [J]. Applied Sciences, 2021, 11(18): 8706.
- [23] Fu Xuezhong, He Houbing, Xu Haijun, et al. Tooth surface design of double-pressure-angle helical face gear considering non-orthogonality, offset, and modification [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2025, 39(3): 1399-1410.
- [24] Brecher C, Röthlingshöfer T, Gorgels C. Manufacturing simulation of beveloid gears for the use in a general tooth contact analysis software [J]. Production Engineering, 2009, 3(1): 103-109.
- [25] 王志刚. 基于局部共轭法的螺旋锥齿轮接触区规划求

- 解方法研究 [J]. 工程技术研究, 2017(10): 109-110.
- Wang Zhigang. Study on contact zone planning method of spiral bevel gears based on local conjugation method [J]. Engineering and Technological Research, 2017(10): 109-110.
- [26] Nieszporek T, Boral P, Gołębski R. An analysis of gearing [C]//The 4th International Conference on Computing and Solutions in Manufacturing Engineering 2016-CoSME' 16. Les Ulis, France: EDP Sciences, 2017: 07006.
- [27] Sohn J, Park N. Study on the influence of gear hobbing and shaft misalignments on the geometric interference of cylindrical worm gear set [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2017, 231(24): 4646-4654.
- [28] Dudás L. Modelling and simulation of a new worm gear drive having point-like contact [J]. Engineering with Computers, 2013, 29(3): 251-272.
- [29] Hargâș S, Ninacs R, Buiga O, et al. An attempt to establish a mathematical model for an unconventional worm gear with bearings [J]. Applied Sciences, 2024, 14(23): 10833.
- (编辑 李慧敏)