

面向电磁无损检测的空间磁化分布反演方法

刘来鹏^{1,2}, 赵竹³, 胡致远¹, 赵春田², 李勇⁴, 李红梅¹

(1. 清华四川能源互联网研究院油气新技术研究中心, 610213, 成都;

2. 四川大学深地工程智能建造与健康运维全国重点实验室, 610065, 成都;

3. 国家管网集团储运技术发展有限公司完整性技术中心, 300457, 天津;

4. 西安交通大学复杂服役环境重大装备结构强度与寿命全国重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对电磁无损检测中传统二维模型难以准确反演三维立体结构内部磁化场分布的问题, 提出了一种适用于平板和管状构件的三维磁荷分布反演方法。基于等效磁荷模型, 推导了离散的三维磁化场分布控制方程; 引入空间平滑性约束改进最小二乘优化目标, 抑制反演结果的非物理振荡; 结合 Tikhonov 正则化处理不适定问题, 构建自适应梯度约束最小二乘反演算法; 通过平板和管状模型仿真验证, 预设三维正态磁化场分布, 得到探测面的磁感应强度, 再引入白噪声模拟含干扰的探测信号。采用所提算法对模拟信号进行反演, 结果表明: 平板模型与预设值的决定系数达 0.994 1, 峰值相对误差最大为 4.925%; 管状模型内环/外环探测面的反演决定系数均超 0.997 2, 峰值相对误差最大为 2.406%; 噪声干扰下的误差可控, 鲁棒性较强。该方法改善了传统二维模型的局限性, 可为后续应力分布反演及结构安全评估提供理论和算法基础, 支撑基础设施的无损检测需求。

关键词: 等效磁荷模型; 三维磁荷分布; Tikhonov 正则化; 空间平滑性约束

中图分类号: TH17 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202608006 **文章编号:** 0253-987X(2026)08-0068-12

Inversion Method for Spatial Magnetization Distribution in Electromagnetic Nondestructive Testing

LIU Laipeng^{1,2}, ZHAO Zhu³, HU Zhiyuan¹, ZHAO Chuntian², LI Yong⁴, LI Hongmei¹

(1. Oil & Gas New Technology Research Center, Sichuan Energy Internet Research Institute of Tsinghua University,

Chengdu 610213, China; 2. State Key Laboratory of Intelligent Construction and Healthy Operation and Maintenance

of Deep Underground Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 3. Integrity Technology

Center, Storage and Transportation Technology Development Co., Ltd. of Pipe China, Tianjin 300457,

China; 4. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Traditional two-dimensional models fail to accurately invert the internal magnetization field distribution of 3D structures in electromagnetic nondestructive testing. To solve this problem, a three-dimensional magnetic charge distribution inversion method was proposed for plate and tubular components. Firstly, discretized governing equations for 3D magnetization field distribution were derived based on the equivalent magnetic charge model. Secondly, spatial

收稿日期: 2025-12-23。 作者简介: 刘来鹏(2004—),男,本科生;李红梅(通信作者),女,教授,博士生导师。 基金
项目: 国家自然科学基金资助项目(52577013)。

网络出版时间: 2026-04-27

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.t.20260426.1617.002>

smoothness constraints were adopted to optimize the least-squares objective function and suppress non-physical oscillations in the inversion results. Thirdly, Tikhonov regularization was introduced to solve ill-posed problems, and an adaptive gradient-constrained least-squares inversion algorithm was developed. Finally, numerical simulations of plate and tubular models were conducted. A preset 3D normal magnetization field was adopted to calculate the magnetic induction intensity on detection surfaces, and white noise was added to simulate interference-contained detection signals. The simulated signals were inverted by the proposed algorithm. The results show that the coefficient of determination between inverted values and preset parameters of the plate model reaches 0.994 1, with a maximum peak relative error of 4.925%. For the tubular model, the coefficient of determination of inversion results on both inner and outer ring detection surfaces is higher than 0.997, and the maximum peak relative error is only 2.406%. The method maintains controllable errors under noise interference and presents excellent robustness. The approach presented in this paper overcomes the limitations of conventional 2D inversion methods. It provides theoretical support and algorithmic references for subsequent stress distribution inversion and structural safety evaluation, and satisfies the engineering requirements of nondestructive testing for infrastructure.

Keywords: equivalent magnetic charge model; three-dimensional magnetic charge distribution; Tikhonov regularization; spatial smoothness constraint

电磁无损检测凭借不损伤被测构件性能与结构的优势,已成为长输油气管道、桥梁主缆、钢筋混凝土、储罐罐壁等基础设施缺陷诊断与安全评估的重要技术手段^[1-7]。其中,漏磁检测技术因操作简便、检测速度快、灵敏度高,被广泛应用于铁磁材料的无损检测^[8-9]。自然磁化现象作为铁磁材料在应力、应变或地磁环境下产生的固有磁特性变化^[10],其对应的空间磁化场分布是表征材料内部状态(如应力分布、磁特性均匀性)的关键物理量,对其进行准确反演是实现构件状态定量评估、保障结构长期服役安全的重要前提^[11-13]。然而,由于材料内部磁化场分布无法直接测量,需通过检测构件周边漏磁场信号间接推算,这一过程本质上属于典型的反问题,普遍存在不适定特性,给反演精度与稳定性带来了严峻挑战^[14-15]。

为解决磁化分布反演的不适定性,国内外学者开展了大量研究。在磁荷重构方面,李红梅等^[10,16]提出双层平面磁荷重构算法,有效解决了二维磁化分布反演问题;Zhang等^[17]建立磁荷元法,提升了磁荷分布表征精度。在解析与数值方法方面,时朋朋^[11]推导了典型缺陷漏磁信号的解析表达式;刘真伟等^[8]和 Priewald等^[18]分别发展了二维缺陷漏磁场的快速有限元计算及反演方法;Zhang等^[19]提出缺陷深度场算法,建立了漏磁信号与缺陷深度的关系。在正则化应用方面,Tikhonov 正则化被广泛用于改善反演病态性^[20-22]。此外,针对强剩磁问题,

李泽林等^[23]和 Li等^[24]发展了三维磁异常反演方法。上述研究奠定了磁化反演的基础,但在面向实际三维立体结构的表征方面仍存在局限性。

当前,空间磁化场分布反演方法在三维立体结构场景下的研究仍面临诸多不足:①现有主流反演方法多基于双层平面、二维缺陷等简化模型,尚未形成针对实际工程中常见的平板、管状等三维立体结构的系统反演方案,难以准确描述三维空间中磁化场分布的复杂性与各向异性^[6,25];②现有研究多围绕缺陷场景展开,例如,李亚梅等^[3]开展的储罐罐壁缺陷低速漏磁检测研究、Nguyen等^[25]提出的铸铁管道剩余壁厚三维评估模型,均以缺陷识别为目标。针对无缺陷状态下磁化场分布的三维反演研究较少;③现有三维反演方法迭代复杂^[26-27],未能有效平衡反演精度与计算效率之间的关系。

基于此,开展三维立体结构下的空间磁化场分布反演方法研究具有一定的理论价值与工程意义。本文作为李红梅等^[10,16]双层平面磁荷重构方法的拓展研究,将反演对象从双层平面模型延伸至更贴近工程实际的平板与管状三维立体结构;考虑到无缺陷状态是构件服役的基础状态,因此研究未设置缺陷,而是通过人为模拟应力集中情况下的磁荷密度分布,并引入白噪声以模拟实际检测环境干扰;通过构建针对性的优化方程,结合 Tikhonov 正则化方法求解三维反演的不适定问题,旨在建立一套适用于三维模型的磁化分布反演算法。

1 电磁学控制方程

1.1 等效磁荷模型

在铁磁材料的电磁无损检测中,为描述材料内部因应力、磁导率非均匀性或外场引起的复杂磁化状态,常采用等效磁荷模型进行建模与分析。该模型是一种数学上的等效表示,其物理实质源于材料内部磁化强度的散度源^[28],具体表示如下

$$\rho = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1)$$

式中: ρ 为等效磁荷密度; μ_0 为材料的磁导率; $\mathbf{M}$ 为磁化强度。

等效磁荷密度作为由磁化强度散度定义的数学量,虽无独立物理实体,但构建了外部可测漏磁场与内部不可测磁化场之间的数学联系,量化了铁磁材料内部磁化强度的散度及其分布状态。

工程检测中,构件表面因处于铁磁介质和空气的交界面,对外表现的磁化梯度变化较大、磁化散度较强,通常以面磁荷密度来等效,是外部漏磁场的主要来源;而构件内部的体磁荷密度在磁化均匀分布状态下,正、负极首尾相连、彼此相抵相消,磁化散度接近0,其对外部漏磁场的作用可以忽略不计。然而,当存在非均匀性(如应力集中、磁导率梯度)时,磁化的正、负极并不能完全相抵相消,其磁化散度不为0,等效为体磁荷密度后也不为0,且体磁荷密度与材料内部应力分布、磁导率分布等相关,这便为应力、磁导率分布的空间反演提供了可供利用的媒介。基于此,本文选用体磁荷密度作为磁化散度表征量,通过对其进行三维分布反演,实现对铁磁材料内部非均匀磁化散度的反演计算。

工程中的构件常处于空气中,当该区域无自由电流和激励磁场时,空间磁感应强度可直接由磁荷分布通过体积积分计算如下

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega^+} \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}' \quad (2)$$

式中: $\mathbf{B}$ 为空间磁感应强度; $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ 分别为场点和源点位置矢量; $\mathbf{R}$ 为铁磁体周围场点 $P(x, y, z)$ 与内部源点 $Q(x', y', z')$ 之间的矢径,即 $\mathbf{R} = (x - x', y - y', z - z')$; Ω^+ 为铁磁体区域的体积; $d\mathbf{v}'$ 为源点处体积源。

当铁磁材料存在应力集中时,磁弹性效应会通过逆磁致伸缩作用,改变局部有效磁场,进而引起磁化强度的空间梯度变化,形成非均匀分布的等效体磁荷源,最终导致材料内部磁荷密度分布的非均匀性。材料磁导率的空间梯度(因成分偏析、微观结构

差异或热处理不均导致)同样会引发磁化强度散度的非均匀分布,可等效为体磁荷密度的空间分布。应力与磁化强度的定量耦合关系可通过有效磁场模型^[29]描述如下

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_0 + \alpha \mathbf{M} + \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\mu_0} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{M}} \right) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ 为总有效场; $\mathbf{H}_0$ 为外部施加的磁场; α 为平均场参数,描述材料内部磁畴之间的相互作用; $\boldsymbol{\sigma}$ 为机械应力; λ 为磁致伸缩系数。

拉、压应力的分布差异会直接导致磁化强度的空间梯度变化,进而形成体磁荷密度的峰值与谷值,应力集中区对应着磁荷密度的显著突变区。因此,通过对材料内部磁荷密度的三维空间分布进行反演,可为重构材料内部应力的空间分布提供载体和方法。

等效磁荷模型遵循一项基本物理约束:在孤立铁磁构件内部,总磁荷代数和为0。这是因为磁化强度的散度在整体区域上的积分等于表面磁极强度的代数和。在无外场源的整体构件中,内部净磁荷应为0,表达式写为

$$\iiint_{\Omega^+} \rho d\mathbf{v}' = 0 \quad (4)$$

该守恒定律是磁荷模型的内在物理要求,也为反演算法提供了重要的先验约束。在本文提出的自适应梯度约束最小二乘反演算法中,该约束将以正则化项形式融入优化目标函数。

本文所提反演方法聚焦于工程受载构件内部体磁荷分布,分别以平板模型和管状模型对应储罐罐壁、桥梁锚固板等大型板壳结构及压力管道、容器等薄壁圆筒结构,基于两类场景的力学特性使面磁荷影响均得到有效控制。平板模型以面内受载为主,垂直于板面的应力分量极小,法向磁化增量微弱,端面磁荷对探测结果影响可略。管状模型属于薄壁压力结构,其周向应力 $\sigma_\theta = pr/t$, p 为管内流体压力, r 为平均半径, t 为壁厚。由于周向应力远大于沿壁厚线性分布的径向应力 σ_r (内壁 $\sigma_r = p$,外壁 $\sigma_r = 0$),在工程常见10~30 mm径厚下,周向应力较径向应力高一个数量级以上,法向磁化梯度极弱,因此体磁荷主要源自轴向与周向应力非均匀分布。内环探测时,内壁面磁荷与体磁荷同源同区,归因于反演不引入定位偏差;外环探测时,外壁面磁荷呈均匀背景,空间平滑性约束可有效抑制虚假重构。针对两类模型,本文从受力特征、几何条件和探测方式出发,分别以同源反演、平滑抑制等物理算法融合路径,将面磁荷影响控制在工程可接受范围,从而保证体磁荷反演结果的物理合理性与工程实用性。

1.2 离散化控制方程

为实现数值计算,将构件区域 Ω^+ 离散为 N_e 个互不重叠的三维八节点六面体单元离散单元,单元内自然坐标 $\xi, \eta, \zeta \in [-1, 1]$,每个单元内的磁荷密度采用该单元第 i 个节点的磁荷密度 $\rho_{m,i}^e$ 与形函数 $N(\xi, \eta, \zeta)$ 插值表示。采用三点高斯积分方法进行积分,每个单元对一特定场点的贡献 B^e 为

$$B^e(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) \rho_{m,i}^e \mathbf{R}_i}{R^3} \right] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (5)$$

将式(5)离散化,可得

$$B^e(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^{27} \left[\frac{\sum_{i=1}^8 N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \rho_{m,i}^e \mathbf{R}_i}{R_j^3} \right] |J| \omega_j \quad (6)$$

式中: (ξ_j, η_j, ζ_j) 为第 j 个积分点的相对坐标; ω_j 为第 j 个积分点的权重; $|J|$ 为坐标变换的雅可比行列式。

将式(6)改写为矩阵形式,表示如下

$$B^e(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} |J| \sum_{j=1}^{27} \left[\sum_{i=1}^8 N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \frac{\mathbf{R}_i}{R_j^3} \rho_{m,i}^e \right] \omega_j = \frac{\mu_0}{4\pi} |J| \sum_{i=1}^8 \left[\sum_{j=1}^{27} N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \frac{\mathbf{R}_i}{R_j^3} \omega_j \right] \rho_{m,i}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\rho}_m^e \quad (7)$$

式中: $\mathbf{K}^e$ 为该单元对定点 P 的系数矩阵,第 i 项为 $\mathbf{K}_i^e = \frac{\mu_0}{4\pi} |J| \sum_{j=1}^{27} N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \frac{\mathbf{R}_i}{R_j^3} \omega_j$; $\boldsymbol{\rho}_m^e$ 为该单元的磁荷密度向量。

根据上述控制方程的推导结果,建立离散化计算模型中某一单元的磁荷密度分布与特定探测点磁感应强度之间的定量关系,求和后得到模型周围探测点的磁感应强度如下

$$\mathbf{B}^e(r) = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{K}_i^e \rho_{m,i}^e \quad (8)$$

将不同探测点的磁感应强度看成一个列向量,并对相同节点在不同单元内的系数求和,得到整体磁感应强度

$$\mathbf{B} = \mathbf{K} \boldsymbol{\rho}_m \quad (9)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为几何关系与材料参数确定的整体系数矩阵; $\boldsymbol{\rho}_m$ 为磁荷密度列向量。

2 自适应梯度约束最小二乘反演算法

2.1 最小二乘反演模型

求解内部磁感应强度,即为求解式(9)中线性方

程组的解。在工程应用时,可控制探测点的数量,通过仪器多次探测或使用插值方法,使得探测点数大于构件内部的场点,此时的方程组即变为超定方程组。

在三维欧氏空间中,所要探测的磁感应强度有 x, y, z 共3个方向的分量,且各方向的计算式不同,分别表示如下

$$B_x = \mathbf{K}_x \boldsymbol{\rho}_m; B_y = \mathbf{K}_y \boldsymbol{\rho}_m; B_z = \mathbf{K}_z \boldsymbol{\rho}_m \quad (10)$$

工程应用中,结构所处环境可能存在机械振动、温度变化等,会对探测的磁感应强度结果产生影响,使得探测值与真实值之间存在误差,可表示如下

$$\mathbf{B}_{\text{obs}} = \mathbf{B}_{\text{real}} + \mathbf{B}_{\text{noise}} \quad (11)$$

式中: $\mathbf{B}_{\text{obs}}$ 为磁感应强度的探测值; $\mathbf{B}_{\text{real}}$ 为试件内部磁感应强度的真实值; $\mathbf{B}_{\text{noise}}$ 为环境噪声磁感应强度。

为了降低探测误差对磁荷密度反演结果的影响,基于最小二乘法原理,设计了优化目标函数。构件内部磁荷密度的分布与磁感应强度的物理关系可由式(9)描述。由于该线性方程组是超定的,需要通过拟合求解得到一个误差最小的解,即该问题可转化为一个无约束最小二乘问题。将探测场磁感应强度 $\mathbf{B}_{\text{obs}}$ 与重构场磁感应强度 $\mathbf{B}_{\text{rec}} = \mathbf{K} \boldsymbol{\rho}_m$ 的残差平方和 ϵ^2 最小化,计算式为

$$\epsilon^2 = \min_{\boldsymbol{\rho}_m} \|\mathbf{K} \boldsymbol{\rho}_m - \mathbf{B}_{\text{obs}}\|_2^2 \quad (12)$$

该问题的本质是找到使 ϵ^2 最小的 $\boldsymbol{\rho}_m$,但存在显著局限性:当节点数较大或观测数据含噪声时,解会出现振荡现象,即空间上的连续性较差,不符合物理场的平滑性本质。

2.2 空间平滑性约束

为解决无约束问题的非物理振荡,引入空间平滑性约束,约束对象为磁荷密度分布和磁感应强度分布。对于地磁场作用下自然磁化的构件,由于环境磁场相对稳定,其内部的磁荷密度分布不会呈现振荡式分布且空间变化率不大,因此可采用该平滑性约束。

对于空间变化率,其数学描述采用梯度模长平方的积分($\int |\nabla f(r)|^2 dV$),该值越小,场的空间变化越平缓^[30]。

由于磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的探测数据中含有噪声,采用 $E_B(\rho)$ 描述 $\mathbf{B}$ 的空间平滑性。 $E_B(\rho)$ 的表达式写为

$$E_B(\rho) = \int |\nabla \mathbf{B}(r)|^2 dV = \int (|\nabla B_x|^2 + |\nabla B_y|^2 + |\nabla B_z|^2) dV \quad (13)$$

式中:积分 dV 为空间中的体积元; $\nabla B_x, \nabla B_y, \nabla B_z$ 为磁感应强度在 x, y, z 方向分量的梯度,其梯度模长平方的表达式写为

$$|\nabla B_i|^2 = \sum_{i=x,y,z} \left[\left(\frac{\partial B_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_i}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (14)$$

对于内部的磁荷密度分布,其平滑项可写为

$$E_\rho(\rho) = \int |\nabla \rho|^2 dV = \int \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 \right) dV \quad (15)$$

$E_\rho(\rho)$ 越小,其在三维空间中的变化越为平缓,符合物理场的连续性假设。

将空间约束离散化,可得

$$E_B(\rho_m) = \rho_m^T H_B \rho_m \quad (16)$$

$$E_\rho(\rho_m) = \rho_m^T H_\rho \rho_m \quad (17)$$

式中: H_B 和 H_ρ 分别为磁感应强度、磁荷密度空间平滑约束离散化后对 ρ_m 的海塞矩阵,即二阶导数矩阵。

2.3 磁荷守恒约束

根据磁荷模型的物理本质,构件内部总等效磁荷为0,其离散表达式写为

$$w^T \rho_m = 0 \quad (18)$$

式中: $w \in \mathbf{R}^N$ 为权重向量。

2.4 含约束方程组的构建

向最小二乘法的优化目标函数中补充空间约束项和磁荷守恒约束项,得到反演优化目标函数 $L(\rho_m)$,表达式如下

$$L(\rho_m) = \|\mathbf{K}\rho_m - \mathbf{B}_{\text{obs}}\|_2^2 + \lambda_1 \rho_m^T H_B \rho_m + \lambda_2 \rho_m^T H_\rho \rho_m + \lambda_3 (w^T \rho_m)^2 \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_{\text{Tik}} = \begin{cases} \mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda_1 \mathbf{H}_B + \lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 w^T w, & \text{cond}(\mathbf{H}) \leq 10^6 \\ \mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda_1 \mathbf{H}_B + \lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 w^T w + \gamma_1 \mathbf{I}, & 10^6 < \text{cond}(\mathbf{H}) \leq 10^{10} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{K} + s\lambda_1 \mathbf{H}_B + s\lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 w^T w + \gamma_2 \mathbf{I}, & 10^{10} < \text{cond}(\mathbf{H}) \leq 10^{15} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{K} + s\lambda_1 \mathbf{H}_B + s\lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 w^T w + \gamma_3 \mathbf{I}, & \text{cond}(\mathbf{H}) > 10^{15} \end{cases} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{H}_{\text{Tik}}$ 对应不同调整等级下的 $\mathbf{H}$; s 为放缩因子,定义为目标条件数与原始条件数的比值,通过调整正则化的权重控制约束项; γ 为 Tikhonov 正则化参数,通过提高最小特征值控制条件数, γ_1 、 γ_2 、 γ_3 分别取 10^{-12} 、 10^{-9} 和 10^{-6} ,对应调整等级1、2、3; $\mathbf{I}$ 为与 $\mathbf{H}$ 行列数相同的单位矩阵。

计算机双精度浮点数的有效数字约为15位,当条件数大于 10^{15} 时误差可能会超过100%。此外,当条件数过大时,迭代求解的次数会较大,无法满足工程中对效率的要求;当条件数过小时,又会导致解的特征缺失。因此,选择 10^6 数量级来平衡解的数值稳定性与质量。

式中: λ_1 、 λ_2 、 λ_3 为约束项对应的系数。

为使目标函数值最小,将 $L(\rho_m)$ 对 ρ_m 求导,可得

$$\frac{\partial L(\rho_m)}{\partial \rho_m} = 2\mathbf{K}^T \mathbf{K} \rho_m - 2\mathbf{K}^T \mathbf{B}_{\text{obs}} + 2\lambda_1 \mathbf{H}_B \rho_m + 2\lambda_2 \mathbf{H}_\rho \rho_m + 2\lambda_3 w^T w \rho_m \quad (20)$$

令式(20)等于0,化简后得到

$$(\mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda_1 \mathbf{H}_B + \lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 w^T w) \rho_m = \mathbf{K}^T \mathbf{B}_{\text{obs}} \quad (21)$$

构建线性方程组

$$\mathbf{H} \rho_m = \mathbf{g} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{H} = \mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda_1 \mathbf{H}_B + \lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 w^T w$; $\mathbf{g} = \mathbf{K}^T \mathbf{B}_{\text{obs}}$ 。

式(22)即为优化问题的目标方程组。

2.5 系数矩阵分级 Tikhonov 正则化

在实际应用中,可能会存在探测点分布集中、磁场随距离衰减较快等现象,造成优化问题目标方程组的系数矩阵 $\mathbf{H}$ 条件数病态,进而导致反演结果出现数值不稳定、收敛缓慢、精确度不高等问题。因此,使用迭代器求解之前,需要对系数矩阵进行正则化处理^[22]。矩阵 $\mathbf{H}$ 的条件数定义为

$$\text{cond}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\| = \lambda_{\max}(\mathbf{H}) / \lambda_{\min}(\mathbf{H}) \quad (23)$$

式中: $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为 $\mathbf{H}$ 的最大、最小特征值。

根据特征值的不同,将矩阵 $\mathbf{H}$ 分为4个调整等级进行正则化处理,0~3等级按顺序对应的数学表达式如下

3 仿真计算

针对电磁无损检测常见的两种应用场景——构件近表面缺陷和管道质量筛查,分别考虑了两种简化的三维磁化计算模型。设定两种模型的相关几何参数,并对其进行单元划分。将模型离散化后,假定磁荷均位于单元节点上,其磁荷分布的列向量为 ρ_m 。在工程应用中,构件周围的磁感应强度可通过仪器测量获得。为验证方法的可行性,本文采用数值模拟计算试件周围的磁感应强度信号,并通过算法进行磁荷分布反演。为保证模拟场景更加贴近现实,针对两种模型分别选取了不同类型的探测面。具体仿真流程如图1所示。

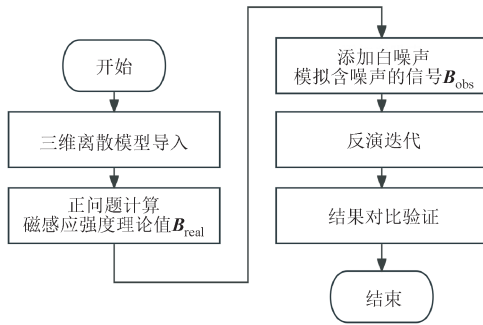


图 1 仿真流程示意图

Fig. 1 Schematic diagram of simulation flow

3.1 正问题计算

3.1.1 离散物理模型

平板模型的长度 $a=80$ mm, 宽度 $b=40$ mm, 厚度 $d=4$ mm, 单元格尺寸为 $1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ 。以其几何中心为坐标原点, 沿长度方向为 x 轴, 宽度方向为 y 轴, 厚度方向为 z 轴。管状模型的内径 $r_1=10$ mm, 外径 $r_2=12$ mm, 长度 $l=70$ mm。以其几何中心为坐标原点, 轴向为 x 方向, y 与 z 方向为相互垂直的径向, 满足右手定则。

采用三维正态分布函数预设模型中各节点的磁荷密度, 参数形式为 $(\mu_x, \mu_y, \mu_z, A, c, c_0)$, 其中 μ_x, μ_y, μ_z 为中心位置坐标, A 决定分布的强弱与正负 (正值为峰值, 负值为谷值), c 为标准差, 决定分布的扩散程度, c_0 为量纲平衡系数, 本文取 $c_0=1\text{ mm}^2$ 。此时, 控制方程可写为

$$\rho(x, y, z) = \frac{A}{(2\pi c)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2 + (z-\mu_z)^2}{2c^2 c_0}} \quad (25)$$

在平板模型中添加 6 个正态分布的磁荷密度, 具体参数如表 1 所示, 离散网格划分及各节点磁荷密度预设分布如图 2 所示。在管状模型中添加 4 个正态分布的磁荷密度, 具体参数如表 2 所示, 离散网格划分及各节点磁荷密度预设分布如图 3 所示。

表 1 平板模型磁荷分布参数

Table 1 Parameters of magnetic charge distribution in the planar model

编号	预设坐标 $(x, y, z)/$ mm	预设磁荷密度/ $(10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3})$	标准差
1	$(-25, -10, -2)$	-2.0	4
2	$(-25, 10, -2)$	3.2	4
3	$(0, -10, 0)$	5.0	4
4	$(0, 10, 0)$	-5.0	4
5	$(25, -10, 2)$	-3.2	4
6	$(25, 10, 2)$	2.0	4

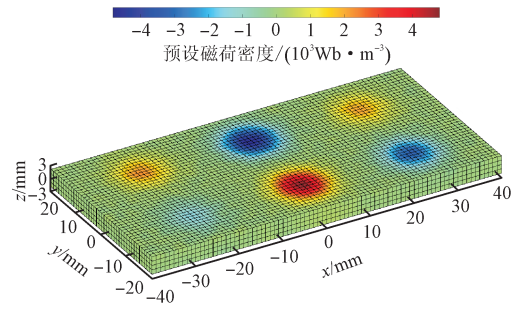


图 2 平板模型离散网格划分及磁荷密度预设分布

Fig. 2 Discrete mesh division and preset distribution of magnetic charge density for plate model

表 2 管状模型磁荷分布参数

Table 2 Parameters of magnetic charge distribution in the pipe model

编号	预设坐标 $(x, y, z)/$ mm	预设磁荷密度/ $(10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3})$	标准差
1	$(-15, -11, 0)$	-5	5
2	$(-15, 11, 0)$	5	5
3	$(15, 0, -11)$	-5	5
4	$(15, 0, 11)$	5	5

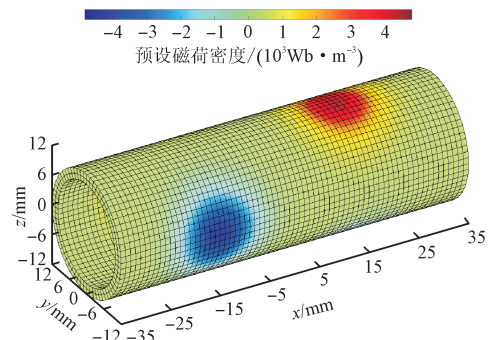


图 3 管状模型离散网格划分及磁荷密度预设分布

Fig. 3 Discrete mesh division and preset distribution of magnetic charge density for tubular model

3.1.2 探测面磁感应强度计算

工程应用中, 探测点磁感应强度可通过磁场传感器测量得到。本文通过数值方法, 基于预设磁荷密度分布与式(5)~(8), 计算得出探测点磁感应强度的理论值, 并引入理论磁感应强度最大幅值的 10% 作为白噪声模拟环境干扰, 得到模拟探测值, 用于验证反演算法的有效性。

仿真计算中, 对平板模型周围 6 个面的全部探测数据进行 1 次联合反演, 对管状模型内、外环探测

面数据进行2次独立反演,对比不同工况下的反演效果。由于管状模型在工程中存在埋地或者内部有高压流体的情况,因此针对性地选择半径 $r_1=9\text{ mm}$ 的内环探测面与半径 $r_2=13\text{ mm}$ 的外环探测面分别进行仿真计算。

探测面的采样点具体参数如表3所示。平板模型共有16 605个离散点,在外表面提高高度1 mm

处采样,采样间隔为1 mm,探测点个数为7 862。管状模型共有13 632个离散点,分别采自于沿轴向的两个不同探测面,探测点均匀分布。对于 $r_1=9\text{ mm}$ 的内环面,轴向间距为1 mm,周向为 6.0° ,共有4 560个探测点;对于 $r_2=13\text{ mm}$ 的外环面,轴向间距为1 mm,周向为 4.3° ,共有5 964个探测点。每个探测点均采集 x 、 y 、 z 共3个方向的数据。

表3 平板和管状模型探测点采样数据参数

Table 3 Sampling data parameters for detection points of plate and tubular models

编号	模型	节点个数	探测面	采样位置	采样间隔	总探测点数
1	平板	16 605	6个外表面	距构件表面1 mm	1 mm×1 mm	3×7 862
2	管状	13 632	内环面($r_1=9\text{ mm}$)	轴向、周向均匀分布	轴向间距为1 mm,周向为 6.0°	3×4 560
3	管状	13 632	外环面($r_2=13\text{ mm}$)	轴向、周向均匀分布	轴向间距为1 mm,周向为 4.3°	3×5 964

3.2 反演计算流程

图4给出了反演算法的流程图,包括初始化和

迭代求解两个阶段,用于求式(22),即优化问题的解 ρ_{ans} 。

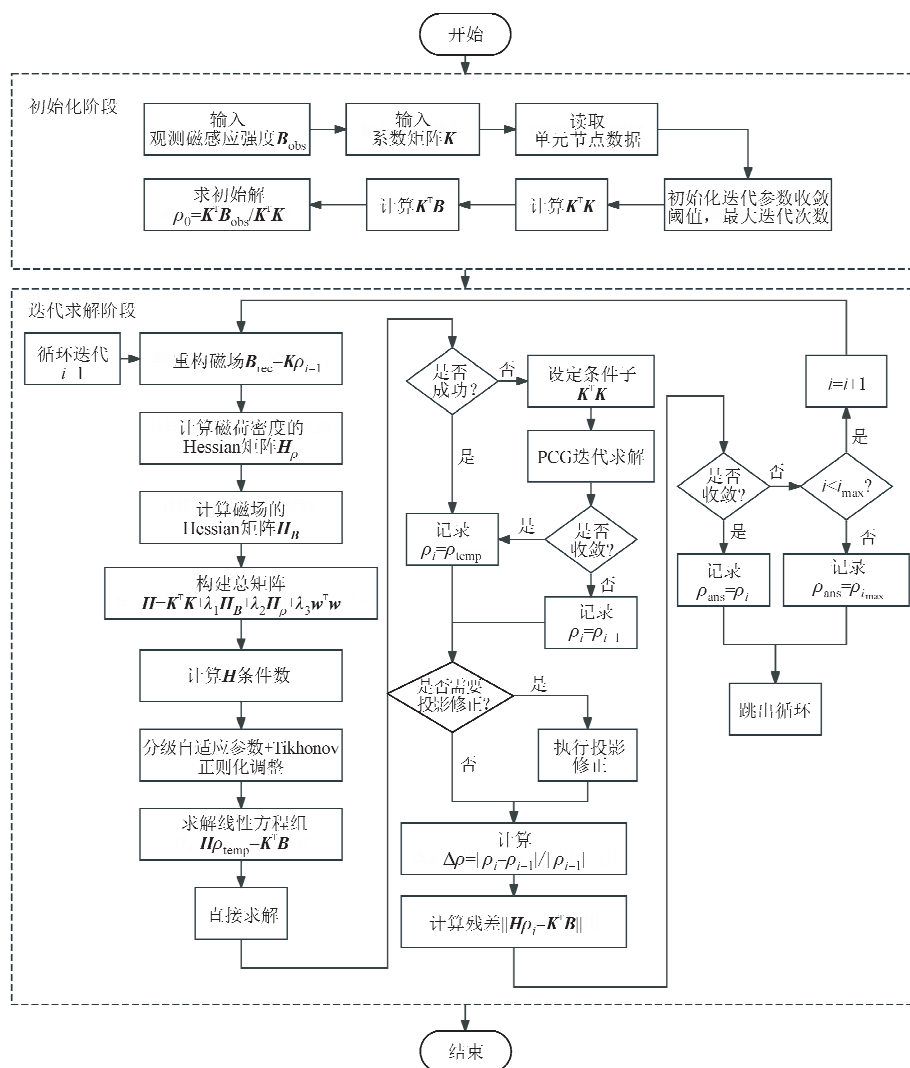


图4 反演算法流程图

Fig. 4 Flowchart of inversion algorithm

在初始化阶段,对磁场系数矩阵 $\mathbf{K}$ 、磁场观测数据 $\mathbf{B}_{\text{obs}}$ 、节点坐标与连接关系、3 个正则化权重进行数据核对,确保符合算法要求;设定最大迭代次数 i_{max} 、收敛阈值等相关参数;基于最小二乘原理,计算矩阵 $\mathbf{K}^T \mathbf{K}$ 、列向量 $\mathbf{K}^T \mathbf{B}_{\text{obs}}$,并计算初始解 $\rho_0 = (\mathbf{K}^T \mathbf{B}_{\text{obs}}) / (\mathbf{K}^T \mathbf{K})$ 。

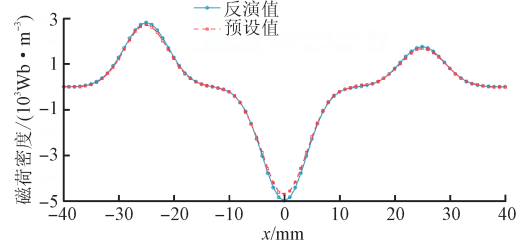
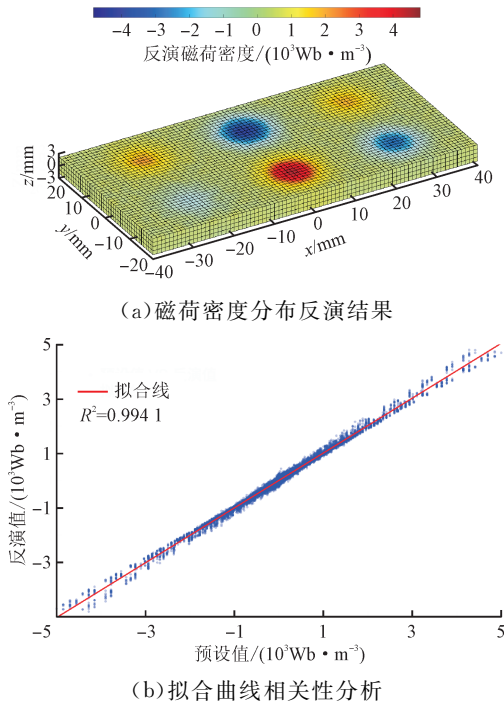
在迭代求解阶段,初始化循环计数器 $i = 1$,开始迭代循环,每一步执行以下步骤:① 使用当前解 ρ_{i-1} ,重构磁场分布 $\mathbf{B}_{\text{rec}} = \mathbf{K} \rho_{i-1}$;② 使用有限差分法,计算海塞矩阵 $\mathbf{H}_B$ 与 $\mathbf{H}_\rho$;③ 组装总优化问题的海塞矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{K}^T \mathbf{K} + \lambda_1 \mathbf{H}_B + \lambda_2 \mathbf{H}_\rho + \lambda_3 \mathbf{w}^T \mathbf{w}$;④ 计算 $\mathbf{H}$ 的条件数,并根据条件数分级进行 Tikhonov 正则化得到矩阵 $\mathbf{H}_{\text{Tik}}$,将矩阵的条件数与求解器的条件数适配;⑤ 采用直接求解+共轭梯度法(PCG)后备策略求解 ρ_{temp} ,当直接求解不成功时,使用共轭梯度法进行求解,设定预条件子 $\mathbf{P} = \mathbf{K}^T \mathbf{K}$,若 PCG 不收敛将保持当前解;⑥ 计算投影后解的总磁荷,与收敛容差进行对比,若总磁荷大于收敛容差,则采用迭代细化方法重新计算投影系数;⑦ 当求解结果的相对变化率、残差范数小于收敛容差时停止迭代,若达到最大迭代次数仍未收敛,输出警告并将当前解作为最优解。

4 反演结果与讨论

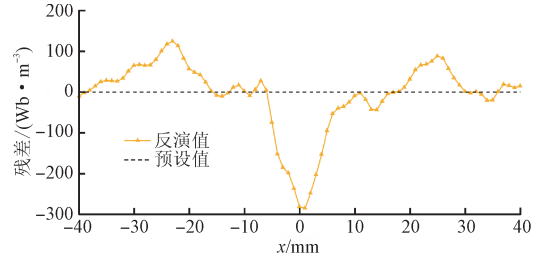
根据图 4 流程完成平板模型求解计算,将得到的磁荷密度与建模时预设的磁荷密度进行相关性分析,并提取反演结果中磁荷密度的集中位置与峰值参数,与预设值进行对比分析。

4.1 平板模型

平板模型的三维磁荷密度反演结果如图 5 所示。



(c) 磁荷密度的预设-反演结果对比
(预设路径为 $y = 10 \text{ mm}, z = 0$)



(d) 路径残差的预设-反演结果对比

图 5 平板模型磁荷密度反演结果

Fig. 5 Inversion results of magnetic charge density for the plate model

由图 5(a)可见,反演重构磁荷密度峰值与谷值的空间位置与图 2 中的预设分布吻合度较高,清晰复现了 6 个预设正态分布磁荷的主要形态。图 5(b)的线性拟合分析显示:反演磁荷密度与预设值的决定系数 $R^2 = 0.9941$,表明二者具备极强的线性相关性。由图 5(c)可见,预设路径上,反演曲线与预设曲线趋势几乎一致。该路径的残差如图 5(d)所示,最大残差绝对值约为 300 Wb/m^3 ,且无明显系统性偏差,验证了反演结果的可靠性。平板模型预设-反演结果的对比如表 4 所示。由表可以看出,最大相对误差为 4.925% ,能够满足工程需求。

4.2 管状模型

内、外环面探测下,管状模型三维磁荷密度的反演结果分别如图 6、图 7 所示。由图 6(a)、图 7(a)可见,反演重构的磁荷密度峰值与谷值的空间位置与图 3 中的预设分布吻合度较高,均能清晰复现 4 个预设正态分布磁荷的主要形态。图 6(b)、图 7(b)的线性拟合分析显示:内环面上反演磁荷密度与预设值的决定系数 $R^2 = 0.9972$,外环面 $R^2 = 0.9983$,表明二者均具备极强的线性相关性。由图 6(c)、6(d)和图 7(c)、7(d)可知,内、外环探测路径中的反演曲线与预设曲线趋势均一致,内环最大残差绝对值约为 150 Wb/m^3 、外环最大残差绝对值约为 200 Wb/m^3 ,且无明显系统性偏差,均验证了反演结果的可靠性。

表4 平板模型磁荷密度峰值定位预设-反演结果的对比

Table 4 Comparison of the preset and inversion results of the peak position of the magnetic charge density in the flat plate model

编号	预设坐标(x, y, z)/ mm	预设磁荷密度/ ($10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3}$)	反演坐标(x, y, z)/ mm	反演磁荷密度/ ($10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3}$)	相对误差/%
1	(-25, -10, -2)	-2.0	(-25, -10, -2)	-2.098 5	4.925
2	(-25, 10, -2)	3.2	(-25, 10, -2)	3.292 7	2.897
3	(0, -10, 0)	5.0	(0, -10, 0)	4.798 8	4.024
4	(0, 10, 0)	-5.0	(0, 10, 0)	-4.821 5	3.570
5	(25, -10, 2)	-3.2	(25, -10, 2)	-3.249 7	1.553
6	(25, 10, 2)	2.0	(25, 10, 2)	2.056 9	2.845

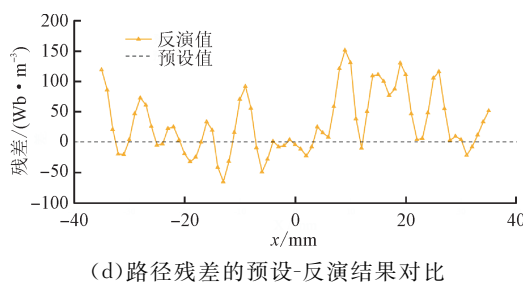
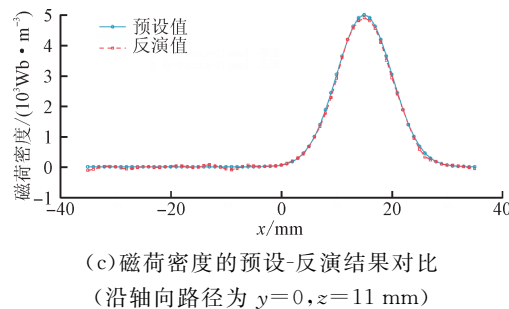
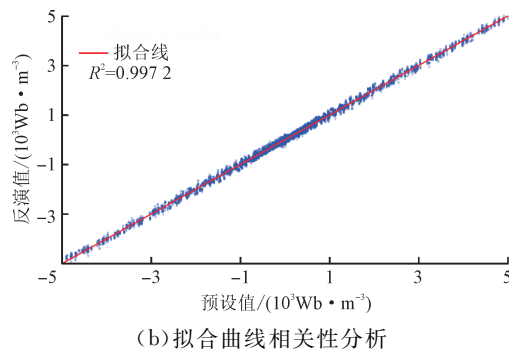
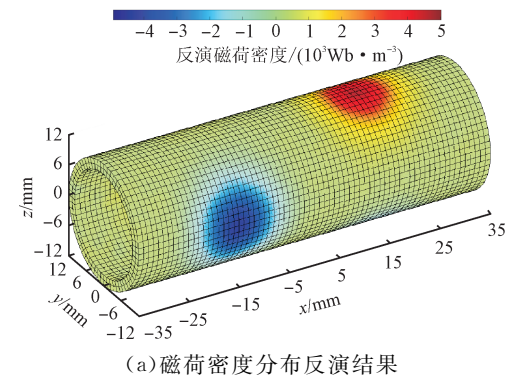
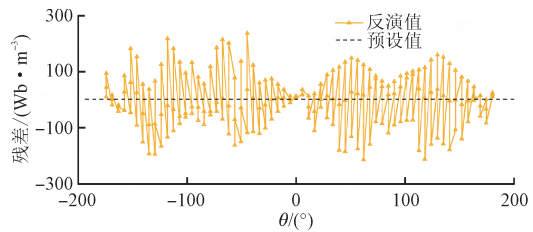
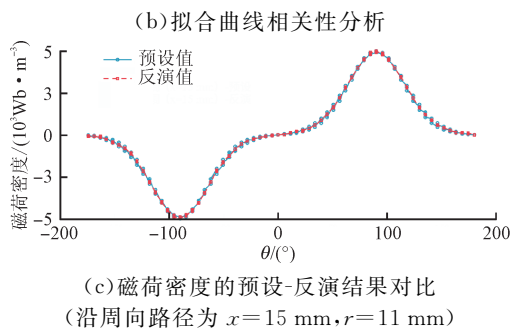
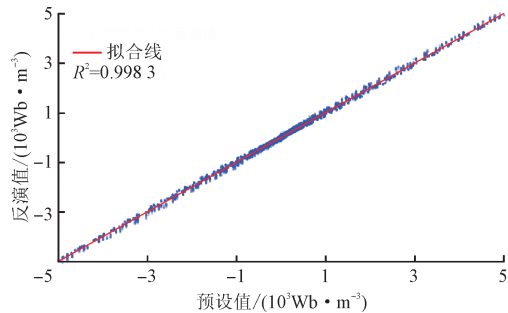
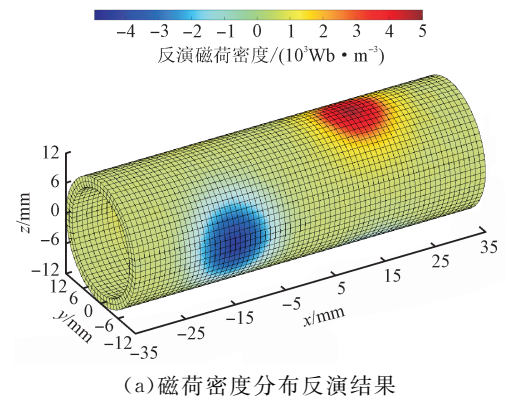


图6 管状模型磁荷密度反演结果(内环探测)

Fig. 6 Inversion results of magnetic charge density for the tubular model (inner-ring detection)



(d) 路径残差的预设-反演结果对比

图7 管状模型磁荷密度反演结果(外环探测)

Fig. 7 Inversion results of magnetic charge density for the tubular model (outer-ring detection)

内、外环探测下,管状模型磁荷密度的预设-反演结果对比分别如表 5 和表 6 所示。由表可见,内、外环探测最大相对误差分别为 2.406%、1.312%,均能满足工程需求。

表 5 管状模型磁荷密度峰值定位预设-反演结果对比(内环探测)

Table 5 Comparison of preset and inversion results for peak location of magnetic charge density in tubular model (inner-ring detection)

编号	预设坐标 $(x,y,z)/$ mm	预设磁荷密度/ ($10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3}$)	反演坐标 $(x,y,z)/$ mm	反演磁荷密度/ ($10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3}$)	相对误差/%
1	(-15,-11,0)	-5	(-15,-11,0)	-4.879 7	2.406
2	(-15,11,0)	5	(-15,11,0)	5.017 9	0.358
3	(15,0,-11)	-5	(15,0,-11)	-4.935 4	1.292
4	(15,0,11)	5	(15,0,11)	4.939 6	1.208

表 6 管状模型磁荷密度峰值定位预设-反演结果对比(外环探测)

Table 6 Comparison of preset and inversion results for peak location of magnetic charge density in tubular model (outer-ring detection)

编号	预设坐标 $(x,y,z)/$ mm	预设磁荷密度/ ($10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3}$)	反演坐标 $(x,y,z)/$ mm	反演磁荷密度/ ($10^3 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-3}$)	相对误差/%
1	(-15,-11,0)	-5	(-15,-11,0)	-5.060 9	1.218
2	(-15,11,0)	5	(-15,11,0)	4.934 4	1.312
3	(15,0,-11)	-5	(15,0,-11)	-4.980 0	0.400
4	(15,0,11)	5	(15,0,11)	4.992 1	0.158

5 结 论

针对电磁无损检测中空间磁化场分布反演的不适定问题展开研究,通过理论推导与仿真验证提出了适用于三维立体结构的磁荷分布反演方法。推导了离散三维磁荷分布的控制方程,引入空间平滑性约束改进最小二乘优化目标,有效抑制了反演结果的非物理振荡。对平板模型和管状模型进行仿真,结果表明:平板模型反演磁荷密度与预设值决定系数达 0.994 1,峰值相对误差最大为 4.925%;管状模型内环/外环探测面反演决定系数均超 0.997 2,峰值相对误差最大为 2.406%,满足工程精度要求。为还原实际工程场景,引入了白噪声模拟实际电磁干扰,得到的反演结果相对误差均符合工程要求,表明该方法具备较强的鲁棒性。

该方法针对传统二维/双层平面模型对于三维立体结构适配性不足的局限,建立了适合于平板、管状等实际工程结构的系统反演方案,为后续应力分布反演、结构状态定量评估提供了一定的理论和算法基础,可支撑基础设施安全检测需求。后续可进一步拓展至含缺陷等构件复杂场景。

参考文献:

[1] Ravan M, Amineh R K, Koziel S, et al. Sizing of multiple

cracks using magnetic flux leakage measurements [J]. IET Science, Measurement & Technology, 2010, 4(1): 1-11.

[2] 田贵云,何贇泽,高斌,等. 电磁无损检测传感与成像 [M]. 北京:机械工业出版社,2020.

[3] 李亚梅,唐东林,赖欣,等. 储罐罐壁缺陷的低速漏磁检测研究 [J]. 科学技术与工程, 2016, 16(15): 154-158.

Li Yamei, Tang Donglin, Lai Xin, et al. Research on low-speed MFL testing to tank wall [J]. Science Technology and Engineering, 2016, 16(15): 154-158.

[4] Wu Dehui, Liu Zhitian, Wang Xiaohong, et al. Composite magnetic flux leakage detection method for pipelines using alternating magnetic field excitation [J]. NDT & E International, 2017, 91: 148-155.

[5] Dai Lianshuang, Feng Hao, Wang Ting, et al. Pipe crack recognition based on eddy current NDT and 2D impedance characteristics [J]. Applied Sciences, 2019, 9(4): 689.

[6] 杨理践,梁成壮,高松巍,等. 管道漏磁内检测的管壁缺陷漏磁场解析模型 [J]. 电子测量与仪器学报, 2021, 35(7): 106-114.

Yang Lijian, Liang Chengzhuang, Gao Songwei, et al. Analytical model of magnetic flux leakage field of pipe wall defects based on magnetic flux leakage internal detection [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2021, 35(7): 106-114.

- [7] 欧阳权, 孙令司, 武新军. 桥梁主缆断丝漏磁检测系统研制 [J]. 科学技术与工程, 2023, 23(32): 13827-13833.
- Ouyang Quan, Sun Lingsi, Wu Xinjun. Development of MFL detection system for broken wire of bridge main cable [J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(32): 13827-13833.
- [8] 刘真伟, 韩文花, 杨婷. 一种快速计算二维缺陷漏磁场的有限元建模和求解方法 [J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(2): 192-202.
- Liu Zhenwei, Han Wenhua, Yang Ting. Fast finite element modeling and solving method for 2D defect magnetic leakage field [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(2): 192-202.
- [9] 杨理践, 耿浩, 高松巍, 等. 高速漏磁检测饱和场建立过程及影响因素研究 [J]. 仪器仪表学报, 2019, 40(10): 1-9.
- Yang Lijian, Geng Hao, Gao Songwei, et al. Study on the establishment process and influence factors of high-speed magnetic flux leakage testing [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019, 40(10): 1-9.
- [10] 李红梅, 李云飞, 陈振茂, 等. 电磁无损检测中的自然磁化分布反演方法: 双层平面分布磁荷重构 [J]. 无损检测, 2011, 33(9): 33-36.
- Li Hongmei, Li Yunfei, Chen Zhenmao, et al. Distribution reconstruction of 3D magnetic charge of double layer structure [J]. Nondestructive Testing, 2011, 33(9): 33-36.
- [11] 时朋朋. 缺陷漏磁场磁偶极子模型的若干解析解 [J]. 无损检测, 2015, 37(3): 1-7.
- Shi Pengpeng. Analytical solutions of magnetic dipole model for defect leakage magnetic fields [J]. Nondestructive Testing, 2015, 37(3): 1-7.
- [12] Coramik M, Ege Y. Discontinuity inspection in pipelines: a comparison review [J]. Measurement, 2017, 111: 359-373.
- [13] Lang Xianming, Han Fucheng. MFL image recognition method of pipeline corrosion defects based on multilayer feature fusion multiscale GhostNet [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71: 1-8.
- [14] Igarashi H, Kost A, Honma T. Reconstruction of planar magnetic charge distribution [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2001, 15(1/4): 257-260.
- [15] Bilicz S. Sensitivity analysis of inverse problems in EM non-destructive testing [J]. IET Science, Measurement & Technology, 2020, 14(5): 543-551.
- [16] Li Hongmei, Chen Zhenmao, Zhang Dongli, et al. Reconstruction of magnetic charge on breaking flaw based on two-layers algorithm [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2016, 52(3/4): 1133-1139.
- [17] Zhang Shizhong, Li Hongmei, Zhao Chuntian. Magnetic-charge element method for magnetic flux leakage inspection [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71: 1-10.
- [18] Priewald R H, Magele C, Ledger P D, et al. Fast magnetic flux leakage signal inversion for the reconstruction of arbitrary defect profiles in steel using finite elements [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2013, 49(1): 506-516.
- [19] Zhang Shizhong, Li Hongmei, Zhao Chuntian. Defect-depth-field algorithm for simulating magnetic flux leakage signals based on discrete magnetic dipole model [J]. NDT & E International, 2023, 139: 102939.
- [20] 高可乐, 殷红, 彭珍瑞. 改进 Tikhonov 正则化方法的载荷识别与结构响应重构 [J]. 机械强度, 2025, 47(6): 99-105.
- Gao Kele, Yin Hong, Peng Zhenrui. Improved Tikhonov regularization method for load identification and structural response reconstruction [J]. Journal of Mechanical Strength, 2025, 47(6): 99-105.
- [21] 张建春, 刘春阳, 赵玉龙. 利用点电流源和 Tikhonov 正则化的潜艇稳恒电场反演方法 [J]. 国防科技大学学报, 2024, 46(4): 212-221.
- Zhang Jianchun, Liu Chunyang, Zhao Yulong. Inversion method of submarine steady electric field using point-type current source and Tikhonov regularization [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2024, 46(4): 212-221.
- [22] 伍晗, 宁杰远. 基于 Tikhonov 正则化方法的背景噪声源反演 [J]. 华北地震科学, 2021, 39(2): 27-33.
- Wu Han, Ning Jieyuan. Inversion of azimuthal noise source energy distribution based on Tikhonov regularization method [J]. North China Earthquake Sciences, 2021, 39(2): 27-33.
- [23] 李泽林, 姚长利, 郑元满, 等. 数据空间磁异常模量三维反演 [J]. 地球物理学报, 2015, 58(10): 3804-3814.
- Li Zelin, Yao Changli, Zheng Yuanman, et al. 3D data-space inversion of magnetic amplitude data [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2015, 58(10): 3804-3814.
- [24] Li Shuling, Li Yaoguo. Inversion of magnetic anomaly on rugged observation surface in the presence of strong

- remanent magnetization [J]. *Geophysics*, 2014, 79(2): J11-J19.
- [25] Nguyen L, Miro J V. An efficient 3-D model for remaining wall thicknesses of cast iron pipes in nondestructive testing [J]. *IEEE Sensors Letters*, 2020, 4(7): 1-4.
- [26] Liu Shuaishuai, Tan Handong, Peng Miao, et al. Three-dimensional limited-memory BFGS inversion of magnetic data based on a multiplicative objective function [J]. *Applied Sciences*, 2023, 13(20): 11198.
- [27] Peng Jiaxiang, Chen Bo, Sun Shida, et al. Inversion of magnetic data based on L1 norm and total variation regularization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2025, 63: 1-8.
- [28] 冯慈璋. 静态电磁场 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1985.
- [29] 时朋朋. 微磁检测应力和塑性区的磁弹塑耦合理论 [J]. *力学学报*, 2021, 53(12): 3341-3353.
- Shi Pengpeng. Theoretical model of magneto-elastoplastic coupling for micro-magnetic non-destructive testing method with stress concentration and plastic zone [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(12): 3341-3353.
- [30] Wang Qinghan, Liu Yang, Liu Cai, et al. Multichannel adaptive deconvolution based on streaming prediction-error filter [J]. *Journal of Geophysics and Engineering*, 2021, 18(6): 825-833.
- (编辑 李慧敏)