

面向缺失点云配准的镜像迭代最近点算法

徐文菲, 金莉, 韩旭, 程浩喆, 田暄

(西安交通大学软件学院, 710049, 西安)

摘要: 面向点云配准任务,以改善重叠度较低的点云对之间的配准效果为研究目的,提出了一种有效的缺失点云配准算法——镜像迭代最近点算法。该算法以建立源点云和目标点云之间的镜像型对应关联性为核心,具体过程为:首先建立源点云到目标点云的前向对应关系,以捕获位于重叠区域的特征点;然后建立重叠区域的后向对应关系,以获取可靠匹配对集合;最后根据可靠匹配对估计最优刚体变换矩阵。此外,通过KD树构建和特征扩展两方面进行优化,以提升算法效率。所提算法仅依赖重叠区域匹配对集合,具有良好的鲁棒性和抗干扰能力。在斯坦福数据集上的实验结果表明:对于较低重叠度的数据集,所提算法在精度和效率上均优于以往的大多数算法;对于较高重叠度的数据集,所提算法使精度平均提升28.8%,使效率平均提升47.9%。实验证明所提算法能快速且可靠地配准缺失点云。

关键词: 缺失点云配准;镜像迭代最近点;有限重叠度;可靠匹配对;特征扩展

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202307019 **文章编号:** 0253-987X(2023)07-0201-12

Mirrored Iterative Closest Point Algorithm for Missing Point Cloud Registration

XU Wenfei, JIN Li, HAN Xu, CHENG Haozhe, TIAN Xuan

(School of Software Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Focusing on point cloud registration tasks, an effective missing point cloud registration algorithm, the mirrored iterative closest point was proposed, to improve the registration between point cloud pairs with low overlap. The core of the proposed algorithm is to establish the mirror-type corresponding correlation between the source point cloud and the target point cloud. The specific process is as follows: firstly, establish a forward correspondence between the source point cloud and the target point cloud to capture the characteristic points located in the overlapping regions. Then, establish a backward correspondence of overlapping regions to obtain a collection of reliable matching pairs. In the end, estimate the optimal rigid transformation matrix based on the reliable matching pairs. In addition, the KD tree construction and feature extension are optimized to improve the algorithm efficiency. The proposed algorithm relies only on matching pair sets in overlapping regions and has excellent robustness and anti-interference. The results of experiment on Stanford dataset show that, for datasets with low overlap, the algorithm is better than the previous algorithms in accuracy and efficiency, while for datasets with high over-

lap, the algorithm improves the accuracy by 28.8% and the efficiency by 47.9% on average. Experiments demonstrate that the algorithm registers missing point clouds quickly and reliably.

Keywords: missing point cloud registration; mirrored iteration closest point; limited overlap degree; reliable matching pairs; feature extension

点云配准是计算机视觉领域^[1-2]的一项基本任务,在机器人学^[3-4]、自动驾驶^[5]和医学图像分析^[6]等领域有着广泛的应用。点云配准的目的在于寻找最优刚体变换,使得不同视角的点云数据能够正确映射到共同的坐标系下。其关键在于建立点云之间的正确对应关系。若存在已知对应关系,则配准任务可转化为优化求解问题。然而,由于有限重叠度、离群值和初始位置变化等不利影响,缺失点云配准仍是一个具有挑战性的热点问题。依据输入点云的数量,该问题可分为双视角点云配准^[7]和多视角点云配准^[8]两类。通常,双视角配准算法是多视角配准算法的基础,关注于两帧点云之间的变换关系。迄今,国内外研究者已提出众多有效的算法来解决双视角点云配准问题。

迭代最近点算法(ICP)^[9]是一种经典且广泛应用的双视角配准算法,具体包含两个操作步骤:建立最近邻对应关系和计算最优刚体变换。该算法虽然精度和效率较高,但存在局部收敛问题,并且无法对缺失点云进行配准。对此,研究者提出了许多该算法的变体^[10]来提高性能。Chen等^[11]提出了点到面的误差度量,将最小化源点到目标点所在平面的距离作为配准准则,提高了算法的收敛速率,但当对象表面存在大量噪声和异常值时,法向量的可靠性会降低。此外,Rusinkiewicz^[12]对点到面ICP算法做了改进,使用对称目标函数,使得在较高重叠度的条件下,该算法能够获得良好的配准结果,但其鲁棒性相对低下。Pavlov等^[13]提出了使用安德森加速的迭代最近点算法,该算法基于安德森加速的思想,将ICP归结为一个不动点问题。在此基础上,Zhang等^[14]引入了基于威尔斯函数的鲁棒误差度量来降低对异常值和缺失数据的敏感度,然而在重叠度较低的情况下,它可能会为错误的匹配对分配较大的权重,从而导致配准精度下降。此外,王丞等^[15]提出了一种完整的自适应Harris角点特征描述、提取和匹配的点云粗配准算法,为精配准提供了良好的初值。

为了实现部分重叠点云的配准,Chetverikov等^[16]提出了裁剪迭代最近点算法,该算法引入重叠参数来估计待配准点云之间的重叠度,从而消除了

非重叠区域对配准结果的影响,但其配准精度受到对重叠度估计的准确度的影响。为了提升对噪声和异常值的鲁棒性,Bouaziz等^[17]提出了稀疏迭代最近点算法,该算法使用p范数代替2范数,从而使目标函数对噪声和异常值具有鲁棒性。但由于刚体变换的优化使用了增广拉格朗日函数法,导致了较高的计算复杂度,因此效率较低。为了解决局部收敛问题,Yang等^[18]提出了Go-ICP算法,通过对整个变换空间进行搜索,应用分支定界策略得到全局最优估计,从而避免陷入局部最小值。虽然能够获得期望的配准效果,但该算法的效率较低。

为进一步提高点云配准精度,研究人员提出了基于概率密度函数的方法,其思想是将点云建模为概率密度函数,则配准任务被重新表述为对齐两个相应分布的问题,通过最小化它们之间的统计差异来估计相应的变换^[19]。Magnusson等^[20]提出了NDT算法,先对目标点云进行体素化,通过最大化源点在目标点云体素化后计算出的正态分布概率密度上的得分进行配准。由于体素划分可能导致每个单元的点数差异较大,因此难以获得较高的配准精度。Li等^[21]提出了刚体变换一致性算法,它以适当的后验概率分配每个点的对应关系,以表明它是位于重叠区域还是非重叠区域,该算法在较低重叠度的数据集上可以获得较好的配准性能。

考虑到不同尺度的点云数据,Sahillioglu等^[22]提出了尺度自适应ICP算法,将尺度因子直接整合到最小二乘问题中,先应用最优旋转,再联合优化平移和缩放,最终实现任意尺度下的鲁棒成对对齐。此外,Efraim等^[23]提出了使用通用流形嵌入(UME)来估计噪声点云的刚体变换,主要思想是待配准点云进行UME低维表示,随后在UME空间中估计刚体变换。该方法将UME框架扩展到三维刚体配准,但它仅适用于解决完全重叠的三维点云配准。

近年来,随着深度学习的发展,研究人员尝试将神经网络应用于点云配准。其基本思想是使用基于学习的模块^[24]取代或者结合传统点云配准方法。Wang等^[25]提出了一种深度最近点方法,通过将点云嵌入网络、注意力机制模块和奇异值分解层相结

合实现双视角配准。对于部分重叠点云, Huang 等^[26]提出了 PREDATOR 深度网络模型,核心是利用重叠注意模块在点云之间交换信息,并选择重叠区域的显著点,以便在低重叠情况下仍能进行鲁棒配准;Arnold 等^[27]则使用逐点特征编码器学习对应关系,并通过基于图的注意力网络进行细化,从而获得了较高的配准性能。基于学习的方法能够有效地表示特征,然而它们属于监督学习的方法,通常需要大量的训练数据来长期地训练深度配准模型。当训练集不够时,深度学习算法无法实现期望的配准精度。

综上所述,点云配准仍然是一个有待深入研究的热点问题。本文在迭代最近点算法框架的基础上,提出了一种基于镜像迭代最近点的缺失点云配准算法。为了区分内点和离群点,该算法从构建镜像型对应关系开始,充分利用源点云和目标点云之间的关联性。首先,对于每个源点,通过最近邻搜索算法与目标点云建立关联得到种子点;随后,将其扩展得到特征点集合,并使用特征点与源点云建立关联得到可靠匹配对。两次建立对应关系,先确定重叠区域的特征点,后建立可靠对应,并使用 KD 树和特征扩展的优化策略以降低算法时间复杂度。最后,通过交替建立镜像型对应关联性和估计刚体变换矩阵,该算法可以实现缺失点云配准。由于算法消除了大量离群值干扰,因此得到的配准结果更加准确。此外,本文算法不需要引入复杂的参数变量,且具有更高的计算效率,是一种相较于先前算法更有效的解决方案。

1 点云配准

1.1 任务定义

给定两帧点云:源点云 $X = \{x_i\}_{i=1}^{N_x}$ 和目标点云 $Y = \{y_i\}_{i=1}^{N_y}$, 配准的目标是寻找最优的刚体变换 $(\mathbf{R}, t)$, 使得源点云 X 正确映射到目标点云 Y 上, 实现最优对齐。因此, 点云配准通常可以表述为如下的最小二乘问题

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{R}, t, c(i) \in \{1, 2, \dots, N_y\}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N_x} \|\mathbf{R}x_i + t - y_{c(i)}\|_2^2 \\ i = 1, 2, \dots, N_x \\ \text{s. t. } \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(x_i, y_{c(i)})$ 是源点云 X 和目标点云 Y 之间建立对应关系得到的匹配对; $\mathbf{R}$ 和 t 分别为旋转矩阵和平移变量作用在源点云 X 上的刚体变换。 $\|\cdot\|_2$

表示 2 范数; $\mathbf{I}$ 为单位矩阵; $\mathbf{I}_3$ 为三阶单位矩阵。由式(1)可知, 对应关系和刚体变换为点云配准问题的两个关键变量, 二者之间相互关联, 已知其中一个变量, 容易求解出另外一个变量。

1.2 迭代最近点算法

为了实现两帧点云的刚体配准, 迭代最近点算法通过迭代的方式求解式(1)。给定源点云 X 的初始变换参数 $(\mathbf{R}_0, t_0)$, 每次迭代包含以下两个步骤。

(1) 建立对应关系: 依据 $(k-1)$ 次刚体变换 $(\mathbf{R}_{k-1}, t_{k-1})$, 寻找变换后源点云 X 中的每个源点 x_i 在目标点云 Y 中的最近点 $y_{c(i)}$, 从而建立对应关系 $(x_i, y_{c(i)})$

$$c_k(i) = \underset{j \in \{1, 2, \dots, N_y\}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{R}_{k-1}x_i + t_{k-1} - y_j\|_2 \quad (2)$$

式中: $c_k(i)$ 为对应点的索引; k 指迭代次数。

(2) 求解刚体变换: 基于当前建立的对应关系, 通过最小化如下目标函数更新刚体变换 $(\mathbf{R}_k, t_k)$

$$(\mathbf{R}_k, t_k) = \underset{\mathbf{R}, t}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N_x} \|\mathbf{R}x_i + t - y_{c_k(i)}\|_2^2 \quad (3)$$

重复上述步骤, 直到目标函数值小于给定阈值或者达到最大迭代次数时, 输出最优刚体变换结果。

当两帧点云高重叠度甚至完全重叠时, 迭代最近点算法具有良好的性能。但在实际应用中, 由于光照变化、视角变换或遮挡等因素, 得到的两帧点云是部分重叠的, 此时该方法无法建立可靠的对应关系, 从而无法得到精确的配准结果。因此, 需要面向缺失点云提出更有效的配准算法。

2 基于镜像迭代最近点的配准方法

2.1 研究动机

由于三维扫描技术的局限性, 点云通常是从不同的角度被捕获, 这样每帧点云都与不同的坐标系相关联, 即两帧点云之间的重叠区域是不完全的。由此可知, 缺失点云配准是三维视觉领域的一项具有挑战性的任务。现有的方法缺乏一种简单的机制来处理离群值和有限重叠度的问题, 在大量缺失的情况下, 通常无法对齐两帧点云。因此, 针对缺失点云配准, 本文从两方面考虑: 确定重叠区域内点、建立可靠对应关系。

2.2 观察发现

给定如图 1 所示两帧部分重叠的点云, 红色表示源点云 X , 蓝色表示目标点云 Y , 实线和虚线分别表示重叠区域和缺失区域, 黑色实心球表示离群点, 即无对应点。通过应用最近邻搜索算法可以建立点云之间的对应关系。对于 X 中的每个源点 x_i , 在 Y

中均可以找到与之对应的最近邻点 $y_{c(i)}$, 如图 1(a) 中红色虚线箭头所示。相反, 以最近邻点 $y_{c(i)}$ 为基准, 可以找到其在 X 中的最近邻点 $x_{r(i)}$, 如图 1(b) 中蓝色虚线箭头所示。通过观察图 1, 容易得出以下两个结论。

结论 1 源点云 X 到目标点云 Y 建立前向对应关系, 得到的最近邻点 $y_{c(i)}$ 是位于点云重叠区域的内点, 称之为特征点, 如图 1(a) 所示。具体来说, 在粗配准的前提下, Y 中的离群点与 X 相距较远, 在 X 到 Y 建立对应关系的过程中这些离群点无法被搜索。因此, 这一过程可以求得位于目标点云重叠区域的特征点。

结论 2 目标点云 Y_s 到源点云 X 建立后向对应关系, 得到的匹配对 $(x_{r(i)}, y_{c(i)})$ 是点云重叠区域的可靠对应, 如图 1(b) 所示。以结论 1 的特征点 $y_{c(i)}$ 为基准, 与 X 建立后向对应关系, 可以规避离群点带来的干扰, 得到可靠匹配对 $(x_{r(i)}, y_{c(i)})$ 。若用图 1(a) 中的对应关系 $(x_i, y_{c(i)})$ 直接求解, 则会产生几何上不一致的匹配对: X 中的离群点和其在 Y 中的最近邻点作匹配。这些点会对增大目标函数值, 降低配准精度。

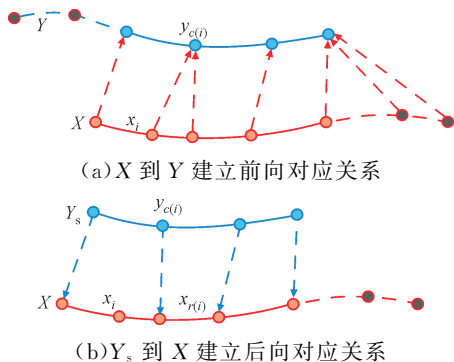


图 1 对应关系示意图

Fig. 1 Schematic diagram of corresponding relationship

基于上述结论, 通过在源点云和目标点云之间建立一种对应关联性, 可以确定位于重叠区域的特征点, 并获得可靠匹配对集合。基于此可以估计最优刚体变换, 从而实现缺失点云配准。由此, 引出本文提出的配准方法——镜像迭代最近点算法。

2.3 镜像迭代最近点算法

针对缺失点云, 本文提出一种镜像迭代最近点算法, 核心是建立源点云和目标点云之间的镜像型对应关联性: 前向对应捕获位于重叠区域的特征点, 后向对应获取可靠匹配对集合。而“镜像型”体现于前向和后向建立对应关系的方式是相同的, 过程是

反向且对称的, 因此称之为镜像迭代最近点算法。其目标函数如下

$$\begin{cases} \underset{\mathbf{R}, t}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N_x} \|\mathbf{R}H(x_i) + t - y_{c(i)}\|_2^2 \\ i = 1, 2, \dots, N_x \\ \text{s. t. } \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $y_{c(i)}$ 表示源点 x_i 到目标点云 Y 的最近邻点; $H(x_i)$ 表示 $y_{c(i)}$ 到源点云 X 的最近邻点; $\mathbf{R}$ 和 t 分别表示旋转矩阵和平移变量; $\|\cdot\|_2$ 表示 2 范数。

通过交替建立镜像型对应关联性和估计刚体变换矩阵, 可以实现缺失点云配准。式(4)中无需预设参数, 并且是式(1)的变形, 因此可以采用与传统迭代最近点算法类似的方法求解。具体求解采用迭代的思想, 给定源点云 X 的初始变换参数 $(\mathbf{R}_0, t_0)$, 每次迭代包括以下 4 个步骤。

(1) 确定目标点云 Y 的特征点: 源点云 X 到目标点云 Y 应用最近邻搜索算法建立前向对应关系, 从而获得重叠区域的特征点 $y_{c_k(i)}$

$$c_k(i) = \underset{j \in \{1, 2, \dots, N_y\}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{R}_{k-1}x_i + t_{k-1} - y_j\|_2 \quad (5)$$

(2) 建立可靠的对应关系: 目标点云 Y_s 到源点云 X 应用最近邻搜索算法建立后向对应关系, 求得 $H(x_i) = x_{r_k(i)}$, 得到可靠匹配对 $(H(x_i), y_{c_k(i)})$

$$r_k(i) = \underset{j \in \{1, 2, \dots, N_x\}}{\operatorname{argmin}} \|y_{c_k(i)} - (\mathbf{R}_{k-1}x_j + t_{k-1})\|_2 \quad (6)$$

(3) 求解刚体变换: 基于当前建立的可靠对应关系, 通过最小化如下函数求解最优刚体变换 $(\mathbf{R}_k, t_k)$

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_k, t_k) = \underset{\mathbf{R}, t}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N_x} \|\mathbf{R}_{k-1} \cdot \mathbf{H}(x_i) + \\ t_{k-1} - y_{c_k(i)}\|_2^2 \end{aligned} \quad (7)$$

(4) 更新源点云: 根据最新的刚体变换参数 $(\mathbf{R}_k, t_k)$, 更新当前源点云

$$\mathbf{X}_k = \{\mathbf{R}_k x_i + t_k\}_{i=1}^{N_x} \quad (8)$$

其中, 步骤(1)和(2)表示建立镜像型对应关联性, 本文采用基于 KD 树的最近邻搜索方法来求解; 步骤(3)表示最小二乘问题, 本文使用基于奇异值分解(SVD)的方法求解。由此, 在给定的初始变换下, 通过重复执行上述 4 个步骤直到满足停止迭代的条件: 前后两次迭代的目标函数差小于给定阈值或者达到最大迭代次数, 最终得到最优的刚体变换结果以实现有效配准。镜像迭代最近点算法的优点是仅依赖于重叠区域的对应集, 能够有效实现缺失点云的良好配准。

2.4 优化策略

本节讲述提高镜像迭代最近点算法效率的优化策略,包括构建 KD 树和特征扩展两个方面。

2.4.1 构建 KD 树

对于式(5),每一次迭代是源点云到目标点云搜索其邻近点,因此可以将目标点云的 KD 树置于开始迭代之前构建,有且只需要构建一次。式(6)是目标点云到源点云中搜索邻近点,然而源点云在迭代过程中是不断更新的,所以其 KD 树要在每一次迭代中不断构建,这样会导致整个算法的效率较低。为了提高配准效率,对式(6)进行如下改进。

$$r_k(i) = \operatorname{argmin}_{j \in \{1,2,\dots,N_x\}} \|(\mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{y}_{c_k(i)} - \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{t}_{k-1}) - \mathbf{x}_j\|_2$$

(9)

在式(9)中,先计算逆变换的目标点云 $T_{k-1}^{-1}(Y) = (\mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{y}_{c_k(i)} - \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \mathbf{t}_{k-1})$,并在源点云中搜索其最近邻点。因此,可以在开始迭代之前构建源点云的 KD 树,有且只需要构建一次。显然,式(6)和式(9)的输出结果相同,而式(9)的效率更高。

综上所述,镜像迭代最近点算法需要构建源点云和目标点云的 KD 树,并且两次构建均在迭代过程开始之前完成,显著提高了计算效率。

2.4.2 特征扩展

为了提高配准效率,本文还引入了特征扩展策略,以加速建立点云间的镜像型对应关联性,具体步骤如下。

(1)均匀采样:对源点云 X 进行均匀采样,获得点云 X_s ,如图 2(a)所示。若使用初始源点云,数据点过于密集,则与目标点云建立对应关系得到的特征点会有大量重复。

(2)搜索种子特征点:源点云 X_s 到目标点云 Y 建立前向对应关系,获得种子特征点,如图 2(b)所示。采样后数据点减少,故而搜索特征点的执行时间也随之减少。

(3)特征点扩展:在建立后向对应关系之前,采用基于 KD 树的最近邻算法搜索所有目标点周围的 N 个邻近点,构成目标点云邻近点集合 Y_N ;随后,在迭代过程中将种子特征点与邻近点集合 Y_N 对应拼接,可以得到扩展的特征点集合 Y_s ,如图 2(c)所示。

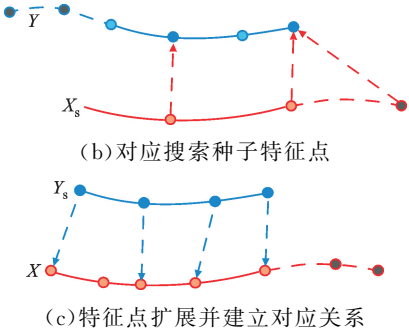
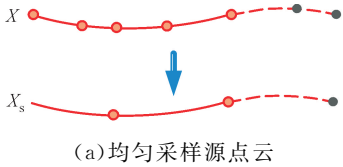


图 2 特征扩展策略示意图

Fig. 2 Schematic diagram of feature expansion strategy

从图 2 可以看出, Y_s 是位于目标点云重叠区域的特征点,与图 1(b)结果相同,但通过特征扩展策略可以减少获取该部分点集的时间。该策略背后的思想是:一方面,均匀采样后的点云可以有效反映点云对象的粗糙结构;另一方面,位于重叠区域的特征点周围聚合了很多正确的特征点也位于重叠区域。如图 2(c)所示,基于上述策略,将扩展后的特征点集合与源点云建立后向对应关系,能够快速获得扩展的可靠匹配对集合,从而完成镜像型对应关联性的建立。

综上,特征扩展策略的引入,加快了迭代步骤的执行时间,可以有效提高配准效率,具体见 3.1 节参数敏感度。

2.5 算法实现

在本文中,最近邻搜索问题均采用基于 KD 树的搜索方法来求解,计算刚体变换则是使用基于奇异值分解(SVD)的方法。此外,通过在 KD 树构建和特征扩展两方面的优化,显著提高了计算效率。由于只计算了相对可靠的对应关系,因此对缺失和异常值是稳健的。以下给出了镜像迭代最近点算法流程的具体描述,其中, k' 设为 200。

输入:目标点云 Y ,源点云 X ,初始变换参数 $(\mathbf{R}_0, \mathbf{t}_0)$;

- 1. 分别构建源点云 X 和目标点云 Y 的 KD 树;
- 2. 寻找 Y 的邻近点集合 Y_N ;
- 3. $k = 0$;

重复:

- 4. $k = k + 1$;
- 5. 对 X 均匀采样得到 X_s ;
- 6. 根据式(5), X_s 到 Y 建立对应关系得到种子特征点;
- 7. 利用种子特征点与 Y_N 对应拼接得到扩展特征点集合 Y_s ;

8. 根据式(9), Y_s 到 X 建立对应关系得到可靠对应集合;
9. 根据式(7), 计算最新的刚体变换($\mathbf{R}_k, t_k$);
10. 根据式(8), 更新当前源点云;

终止:

11. $k \geq k'$ 或前后两次目标函数差值小于给定阈值;

输出: 最优刚体变换($\mathbf{R}, t$)。

3 实验分析与评价

为了评估镜像迭代最近点算法的性能, 使用斯坦福大学图形实验室公开的对象数据集^[28]进行实验。其中, 每个数据集包含多帧不同视角的点云数据以及刚体变换的真实值。为了验证所提出算法的有效性, 本文将它与 6 种当前流行的点云配准算法进行了比较, 包括裁剪迭代最近点^[16]、正态分布变换算法^[20]、稀疏迭代最近点^[17]、对称迭代最近点^[12]、安德森加速迭代最近点^[14]以及刚体变换一致性算法^[21], 依次缩写为 TrICP、NDT、SpICP、SmICP、AAICP、RTC。

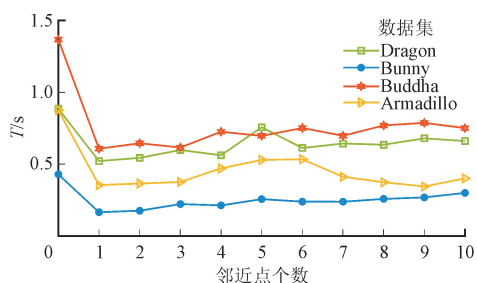
实验结果使用点云均方根误差, 即预测值和真实值之差的平方的期望的算术平方根, 其公式为

$$E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|X_m - X_g\|^2} \quad (10)$$

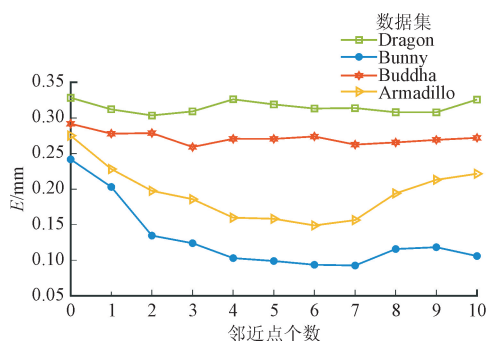
式中: X_m 和 X_g 分别表示应用配准估计值和真实值的源点云。均方根误差 E 越小, 说明算法的精度越高。以下程序均在 MATLAB 中实现, 由一台内存为 8 GB、处理器为 4 核、2.5 GHz 的实验服务器执行。

3.1 参数敏感度

为了确定特征扩展策略中邻近点个数的选取对配准结果的影响, 本文将所提出的算法在斯坦福大学点云数据库的 4 个数据集上进行实验, 包括 Dragon、Bunny、Buddha 和 Armadillo。在开始配准前, 对配准真实值施加扰动($\mathbf{R}_t, t_t$), 以刚体变换($\mathbf{R}_t \cdot \mathbf{R}_g, t_t + t_g$)作为配准初始值。设定邻近点个数 N 的取值范围为自然数 0 到 10, N 取 0 表示算法未使用特征扩展策略。除 N 取值不同外, 程序代码的其他部分完全相同。此外, 为了消除实验随机性, 在同一数据集下进行了 30 次独立实验, 取平均运行时间和平均配准误差进行效率和精度的比较。其中, 配准误差使用上述定义点云均方根误差 E 。图 3 给出了所提出的方法在不同邻近点个数 N 下的点云配准结果。



(a) 平均运行时间



(b) 平均配准误差

图 3 本文算法在不同邻近点个数下的配准结果
Fig. 3 Registration results of the algorithm under different number of neighboring points

在效率方面, 如图 3(a) 所示。当邻近点个数 N 取 0 时, 算法在各数据集上的平均运行时间最长。当使用特征扩展策略, 即 N 取值大于 0 时, 在各数据集上的平均运行时间均有不同程度的减少, 效率高出了 1 倍左右。这一点在 Buddha 数据集上尤为明显, 引入特征扩展策略后, 显著提高了其配准效率。此外, 当邻近点 N 取值 1~10 时, 可以看出其对应的平均运行时间趋于平稳。由此可知, 不同 N 值 ($N \geq 1$) 对运行效率的影响较小。在配准精度上, 如图 3(b) 所示。对于 Dragon 和 Buddha 数据集, N 取不同值对算法的配准误差影响不大; 而对于 Bunny 和 Armadillo 数据集, 特征扩展策略的使用, 对配准精度有不同程度的提高, 特别是 $3 < N < 8$ 时, 精度提高了近 1 倍。这是因为扩展后可能获得更多可靠的匹配对, 所以提高了精度。

基于上述分析可以得出: 特征扩展策略的引入, 显著提高配准效率的同时保证精度不降低; 邻近点个数 N ($N \geq 1$) 的不同取值对本文算法的效率影响甚微, 对配准精度有不同程度提高或者保持稳定。综合考虑效率和精度, 邻近点个数 $3 < N < 8$ 较为合适。

3.2 仿真实验

选择斯坦福 Bunny 数据集中具有 8 171 个点的三维点云来进行仿真实验。为了生成仿真数据集的源点云和目标点云, 对初始 Bunny 数据集进行如下

处理。①生成源点云:首先,随机删除初始点云 5% 的点;随后,随机裁剪掉 x 轴方向上包含 m 个点的点云头部部分;最后,加入高斯零均值噪声。②生成目标点云:首先,随机删除初始点云 5% 的点,并对余下的点云应用随机生成的变换 ($\mathbf{R}_t, t_t$);最后,随机裁剪掉 x 轴方向上包含 m 个点的点云尾部部分。此时,两帧点云的重叠度计算如下

$$\xi = 0.95 \times \frac{0.95M - 2m}{0.95M - m} \quad (11)$$

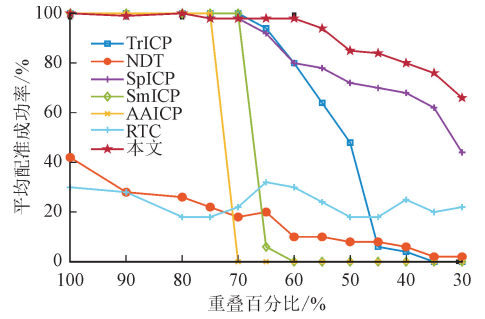
式中 M 表示初始数据集中点的个数。由式(11)可知,通过改变 m 值,可以相应地改变 ξ 。因此,本实验可以仿真不同重叠度下的点云配准。

为了比较不同算法配准结果,引入目标点云的空间分辨率 d ,计算方式如下:点云中的每一个点与其最邻近点之间距离的均方根即为点云的空间分辨率。当且仅当 $E \leq d$ 时,该次配准可以被视为成功。为了消除随机性,本文进行了 100 次蒙特卡罗 (MC) 试验,在不同重叠度的仿真数据集上对所有算法进行了测试。图 4 直观地展示了 7 种配准算法的实验结果,包括配准成功率和平均运行时间。其中,图 4(b)中未展示 SpICP 算法的平均运行时间,其在所有数据集上的结果均大于 10 s。

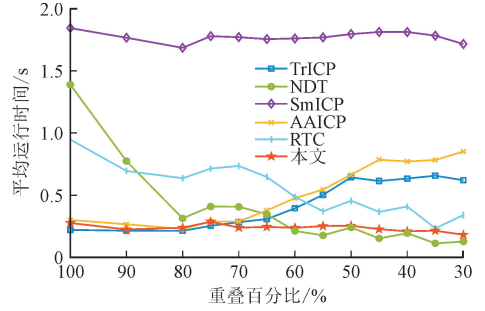
在精度和鲁棒性方面,如图 4(a)所示,首先,NDT 算法和 RTC 算法配准成功率相对较低,但 RTC 算法在低重叠度的数据集上仍然适用,仅次于 SpICP 算法和本文所提出的算法;其次,AAICP 算法和 SmICP 算法仅适用于较高重叠度的数据集,TrICP 算法可以适用于中、高重叠度的数据集,但其鲁棒性随着重叠度的降低而迅速减弱,而 SpICP 算法在重叠度很低的情况下,仍然可以获得良好的配准结果,其鲁棒性随着重叠度的降低而逐渐减弱,虽然 SpICP 算法在仿真数据集上实现了比 TrICP 等算法更精确和有效的配准,但它仍然落后于本文的镜像迭代最近点算法。与上述几种算法相比,本文所使用的方法具有较高的可靠性,即使在重叠度足够低的情况下,仍能获得较高的配准精度,其鲁棒性随着重叠百分比的减少而缓慢下降。

在效率方面,如图 4(b)所示,在较高重叠度的数据集上,所提出算法的运行效率可以与 AAICP 和 TrICP 相媲美。但随着重叠度的降低,后两种算法的运行时间逐渐增加。SpICP 算法的平均运行时间最久,与本文算法存在指数级差距。整体来看,与其他同类方法相比,本文所提出方法的程序运行效率较高且保持稳定。因此,由仿真实验结果可知,本文所提出的算法与所有竞争算法相比具有更优越的

性能,可以实现缺失点云的良好配准。



(a) 平均配准成功率



(b) 平均运行时间

图 4 在不同重叠度数据集上的性能比较

Fig. 4 Performance comparison on datasets with different overlap degrees

3.3 对比实验

本文将所提出的算法和其他 6 种算法在斯坦福的 4 个数据集上进行了测试,包括 Dragon、Bunny、Buddha 和 Armadillo 数据集。每个数据集包含多帧点云数据以及刚体变换的真实值 ($\mathbf{R}_g, t_g$)。为了在不同程度缺失的点云数据上对比这些配准算法的性能,在每个数据集中随机选择了 3 对具有高、中、低不同重叠度的两帧点云进行实验: $\xi \in [0.9, 1.0]$ 视为高重叠, $\xi \in [0.5, 0.7]$ 视为中重叠, $\xi \in [0.3, 0.4]$ 视为低重叠。由于对比实验中所有算法均是局部收敛的,因此需要提供适当的初始值。公平起见,所有方法都使用相同的初始值,具体来讲,在开始配准前,对配准真实值施加扰动 ($\mathbf{R}_t, t_t$),以刚体变换 ($\mathbf{R}_t \cdot \mathbf{R}_g, t_t + t_g$) 作为所有点云配准算法的初始值。为了比较每种算法的精度,本实验使用上述定义了点云均方根误差 E 。

对比实验定量结果见表 1 和表 2,包含配准误差和运行时间。为了用更直观的方式展示配准结果,定性对比如图 5 所示,在 Bunny 低重叠度数据集上,应用不同配准算法得到的对比结果示意图,其中颜色编码展示了应用真实变换与估计变换的源点云之间的位置偏差程度,蓝色表示目标点云,初始对齐中的源点云用红色表示。

表 1 不同算法在不同重叠度的 4 个数据集上的误差对比

Table 1 Error comparison of different algorithms on four datasets with different overlapping degrees

数据集	重叠度	E/mm							
		初始值	TrICP	NDT	SpICP	SmICP	AAICP	RTC	本文
Dragon	高	19.701 4	0. 234 0	19.573 0	0.258 9	0.390 6	0.303 6	0.255 3	0.277 7
	中	9.913 7	1.309 7	9.848 5	0.458 7	4.904 2	4.695 4	0.364 8	0. 209 4
	低	4.286 7	0.690 6	3.499 6	0.766 4	7.886 8	9.761 5	0.632 4	0. 543 6
Bunny	高	15.181 6	0.171 4	13.730 6	0.143 9	0.091 4	0.141 9	0.095 3	0. 090 5
	中	18.361 0	0.654 4	17.716 1	1.277 8	0.551 7	2.792 2	4.841 2	0. 200 8
	低	26.906 7	9.176 1	26.583 5	28.789	6.288 7	10.697	24.686 4	2. 616 8
Buddha	高	19.503 0	0.271 0	19.166 8	0.282 3	0.327 5	0.305 4	0.271 7	0. 222 0
	中	13.476 8	0.478 8	8.316 0	0.512 7	1.045 3	0.791 7	0.497 9	0. 442 5
	低	20.656 7	25.544 8	23.170 0	10.117	3.436 8	25.143 5	17.762 1	0. 944 1
Armadillo	高	15.265 4	0.218 5	10.114 2	0.131 0	0.310 2	0.219 8	0.199 1	0. 113 0
	中	14.099 5	13.949 7	13.592 5	7.372 4	15.895 5	16.220 8	4.722 4	3. 549 2
	低	29.242 0	26.159 2	29.079 3	33.482 3	8.257 8	20.505 8	23.310 7	2. 665 0

注:加粗数据表示最优值。

表 2 不同算法在不同重叠度的 4 个数据集上的运行时间对比

Table 2 Running time comparison of different algorithms on four datasets with different overlapping degrees

数据集	重叠度	T/s						
		TrICP	NDT	SpICP	SmICP	AAICP	RTC	本文
Dragon	高	0.474 3	0.415 1	13.733 5	2.425 1	0.420 7	1.745 0	0. 359 2
	中	0.465 7	0.299 3	9.254 9	3.585 9	0.863 0	0.646 5	0. 259 4
	低	0.236 6	0.502 5	2.770 0	2.097 1	0.221 0	0.218 8	0. 077 1
Bunny	高	0.571 5	0.812 7	22.578 0	2.669 1	0.606 3	1.607 8	0. 375 5
	中	1.178 1	0. 530 0	46.065 9	3.362 6	1.063 5	2.729 3	<u>0. 584 6</u>
	低	1.456 3	0.567 3	25.915 5	5.207 5	1.901 6	2.294 0	0. 494 6
Buddha	高	1.256 5	0. 839 4	44.844 0	5.418 0	1.400 3	7.768 8	<u>1. 151 2</u>
	中	2.235 0	2.638 5	48.775 7	5.975 2	1.490 0	3.677 1	0. 978 8
	低	7.478 8	0. 937 1	44.874 0	9.362 4	5.550 9	6.314 3	<u>1. 792 2</u>
Armadillo	高	0.252 6	1.351 1	11.833 6	1.862 8	0.294 0	0.757 6	0. 230 0
	中	0.676 6	0.300 6	13.282 6	3.537 6	0.686 6	2.557 8	0. 295 6
	低	0.834 9	0. 156 7	42.750 8	4.381 1	0.747 0	3.421 4	0.498 1

注:加粗数据表示最优值;下划线数据表示次优值。

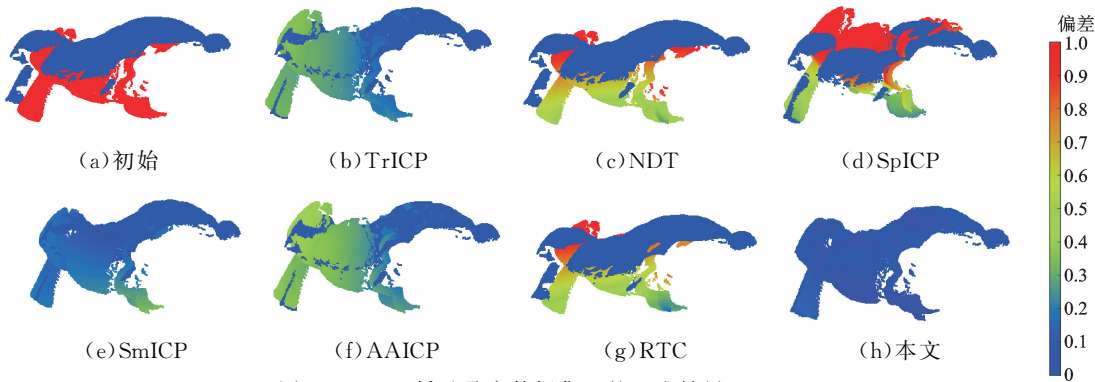


图 5 Bunny 低重叠度数据集上的配准结果

Fig. 5 Registration results on the Bunny low overlap dataset

在配准精度上,如表 1 所示,在高重叠度的数据集上,除 NDT 以外的其他算法均可以获得良好的配准结果。随着重叠度的降低,本文所提出的算法能够获得所有对比算法中最准确的配准结果。此外,从定量对比示意图可以看出,与其他 6 种算法相比,本文的镜像迭代最近点算法在低重叠度数据集上取得了最好的性能。在效率方面,如表 3 所示,本文算法比 SpICP 算法快一个数量级,在部分数据集上慢于 NDT 算法,但比其他 4 种算法的效率都要高。下面分析导致各种配准方法性能存在差异的原因。

给定两帧部分重叠的点云,TrICP 算法引入重叠度参数,以消除非重叠区域对配准结果的影响。虽然该方法在重叠度较高的数据集上能够估计出准确的重叠度,得到期望的配准结果,但其配准精度受到重叠度准确度的影响,因此性能随着重叠度的降低而降低。另外,NDT 算法是对目标点云进行体素化,通过最大化源点在目标点体素化后计算出的正态分布概率密度上的得分进行配准。由于该算法利用正态分布来表示一组源点,这样不可避免地会损失一些局部特征信息,因此难以获得期望的结果。

与上述算法相比,SpICP 算法则是使用 p 范数代替 2 范数,从而使目标函数对噪声和异常值具有鲁棒性,但由于刚体变换的优化使用了增广拉格朗日函数法(ALM),导致计算复杂度较高。因此,该方法的工作效率要低于其他几种同类算法。在 SmICP 算法中,对点到平面 ICP 做了新的改进,使用了对称目标函数,使得在较高重叠度的条件下,该算法能够获得较好的配准结果,但随着重叠度的降低,其配准性能也随之降低。另外,由于对称目标函数中法向量的计算比较耗时,因此效率不及本文所提出的方法。

此外,AAICP 算法使用自适应调整权值的鲁棒刚性配准模型,其中引入了基于威尔斯函数的鲁棒误差度量来降低对异常值和缺失数据的敏感度,并使用安德森加速方法来加快其收敛速度。然而,在重叠度较低的情况下,它可能会为非重叠区域的部分点对分配较大的权重,从而导致配准精度下降。对于 RTC 算法,它以适当的后验概率分配每个点的对应关系,以表明它是位于重叠区域还是非重叠区域,因此它在部分重叠的数据集上能够获得较好的配准结果,但随着重叠度的降低,其配准结果可能变差,由表 1 和表 2 可以看出,对于中、低重叠度,RTC 算法在 Dragon 数据集上表现良好,而在 Bunny 数据集上则精度较低。

综合来看,本文算法在所有数据集上的表现可圈可点。具体来说,本文算法镜像地建立源点云和目标点云之间的对应关系,将注意力集中于重叠区域的特征点,从而规避掉缺失部分和异常值带来的干扰;其次,优化策略的引入,有效提高了算法的运行效率。因此,镜像迭代最近点算法可以获得较好的配准结果,对于较低重叠度的数据集,本文算法在精度和效率上均优于多数算法;对于较高重叠度的数据集,本文算法使精度平均提升 28.8%,使效率平均提升 47.9%。

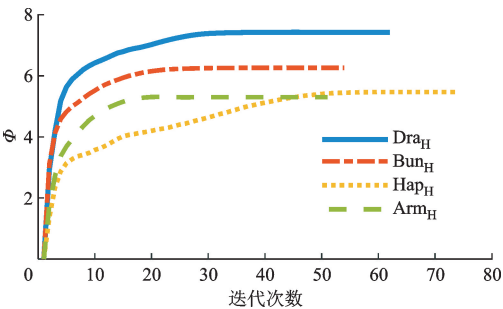
更进一步说,本文算法与 TrICP 算法不同,它不需要引入重叠度变量的估计;与 SpICP 算法和 SmICP 算法相比,它具有更高的计算效率;与 AAICP 算法不同,对于较低重叠度的数据集,它仍然可以获得较好的配准精度;与 RTC 算法相比,随着重叠度的降低,它更加鲁棒。总而言之,与其他算法相比,本文的镜像迭代最近点算法具有更低的误差和更高的效率,是一种简单有效的面向缺失点云的配准方法。综上,本文所提出的方法是所有对比方法中最优越的。

3.4 收敛性和鲁棒性

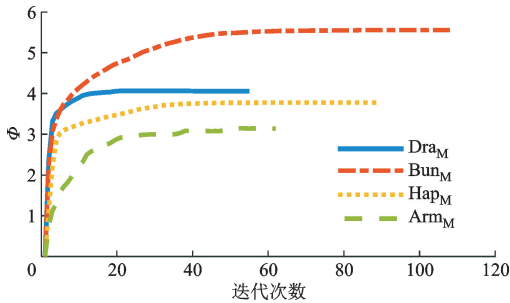
为了验证本文算法的收敛性和鲁棒性,本文在 3.3 节的对比数据集上进行实验。高、中、低重叠度分别用 H、M、L 下标代替,如 Dra_H 、 Bun_H 、 Arm_H 分别表示 Dragon、Buddha、Armadillo 数据集中具有高重叠度的两帧点云。为了便于观察,收敛性分析的实验结果使用式(12)定义

$$\Phi_k = |F_k - F_0| \tag{12}$$

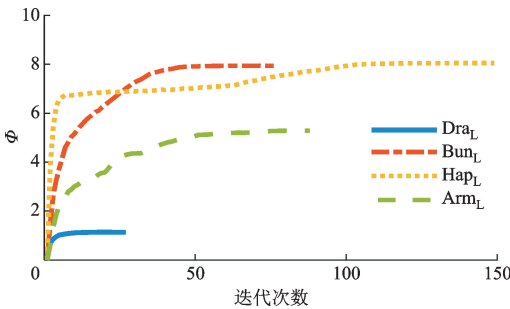
式中: k 表示迭代次数; F_k 表示第 k 次迭代时的目标函数值; Φ_k 表示第 k 次迭代过程的目标函数值减去初始值的绝对值。图 6 为镜像迭代最近点算法在所有数据集上的收敛情况。由图 6 可以看出,镜像迭代最近点算法具有较好的收敛性能。详细证明过程见附录 A。



(a) 高重叠数据集



(b)中重叠数据集



(c)低重叠数据集

图 6 本文算法在所有数据集上的收敛结果

Fig. 6 Convergence results of the present algorithm on all datasets

此外,在 Buddha 和 Armadillo 对比数据集中加入不同程度的随机高斯噪声,通过观察不同算法在噪声数据集上的配准性能,可以验证其对噪声的鲁棒性。其中,加入高斯噪声具体是将每个数据点都用随机产生的高斯噪声进行位移。为了消除实验随机性,不同算法在同一高斯噪声水平下进行了 30 次独立实验,取配准误差 E 的均值和其标准差进行对比。表 4 显示了在加入信噪比为 50、25 dB 的噪声数据集上的配准结果。首先,NDT 算法和 RTC 算法均为概率方法,前者利用正态分布概率密度上的得分进行配准,后者以后验概率分配每个点的对应关系。概率方法对数据噪声更敏感,有可能被困在局部最小值中,鲁棒性较低。其次,SpICP 算法用 p 范数代替 2 范数,SmICP 算法使用对称目标函数,AAICP 算法则引入了基于威尔斯函数的鲁棒误差度量,以上 3 种算法均改变了目标函数使其对噪声更具有鲁棒性。此外,TrICP 算法和本文算法均是通过将注意力聚焦于重叠区域,从而降低对噪声的敏感度。如表 3 所示,在同一噪声水平下,本文的镜像迭代最近点算法获得了相比于其他算法更加准确的配准结果。

表 3 加入不同噪声的 Buddha 和 Armadillo 数据集上的配准结果

Table 3 Registration results on Buddha and Armadillo datasets with different noise

算法	噪声/ dB	E/mm					
		Hap _H	Hap _M	Hap _L	Arm _H	Arm _M	Arm _L
TrICP	50	0.270 0±0.001 7	0.475 0±0.010 8	25.544 9±0.002 4	0.216 4±0.003 9	13.942 5±0.007 0	26.136 4±0.004 1
	25	0.283 2±0.011 0	0.473 8±0.011 0	25.585 1±0.041 4	0.208 7±0.012 0	13.937 5±0.037 3	26.164 9±0.029 7
NDT	50	19.153 6±0.014 7	8.312 8±0.066 3	23.175 6±0.027 1	10.075 7±0.091 5	13.677 8±0.020 1	29.009 7±0.351 1
	25	19.128 2±0.076 2	8.297 0±0.231 1	23.220 9±0.067 9	10.142 8±0.170 3	13.555 7±0.489 8	29.206 2±0.608 0
SpICP	50	0.280 3±0.005 1	0.518 2±0.001 6	10.128 4±0.013 2	0.131 9±0.001 1	7.146 3±0.532 4	33.487 1±0.074 1
	25	0.265 6±0.013 9	0.520 0±0.008 2	10.201 7±0.145 7	7.176 0±0.436 1	0.144 3±0.014 1	34.031 3±0.474 4
SmICP	50	0.326 4±0.000 9	1.051 3±0.010 9	3.431 5±0.022 9	0.310 7±0.000 7	15.420 7±1.627 4	8.245 3±0.060 4
	25	0.324 8±0.003 6	1.054 7±0.066 4	3.936 2±0.246 0	0.197 8±0.010 1	13.214 7±4.093 3	11.035 3±2.896 1
AAICP	50	0.306 9±0.001 3	0.791 7±0.001 9	25.144 2±0.007 8	0.220 1±0.001 0	16.218 6±0.002 1	20.515 0±0.007 5
	25	0.325 0±0.010 2	0.800 6±0.011 1	25.194 7±0.043 5	0.222 8±0.012 8	16.186 1±0.026 0	20.516 7±0.034 8
RTC	50	0.271 6±0.001 4	0.495 3±0.003 0	17.756 6±0.004 8	0.201 6±0.002 8	4.722 3±0.005 7	23.372 2±0.147 5
	25	0.283 6±0.011 6	0.478 4±0.011 0	17.773 9±0.076 9	0.197 8±0.012 1	4.446 0±0.333 6	23.565 1±0.842 1
本文	50	0.222 6±0.002 7	0.434 2±0.003 2	0.946 4±0.005 0	0.115 1±0.002 2	3.553 4±0.004 8	2.550 5±0.152 3
	25	0.233 4±0.007 7	0.445 3±0.040 3	0.975 8±0.032 7	0.116 5±0.008 9	3.523 2±0.078 3	2.607 2±0.160 8

注:Hap_H、Hap_M和 Hap_L分别表示 Buddha 数据集中具有高、中和低重叠度的点云对;Arm_H、Arm_M和 Arm_L分别表示 Armadillo 数据集中具有高、中和低重叠度的点云对;加粗数据表示最优值。

3.5 消融实验

为了验证本文算法及其各个模块的适用性和有效性,本节在 3.3 节中 Dragon 3 个不同重叠度的数据集上进行了消融实验。由于本文算法是 ICP 算法的变体,因此首先与 ICP 算法进行比较,随后验证本文算法的 3 个模块 MICP、 S_{KD} 和 S_{FE} 的主要作用。其中, MICP 表示初始镜像迭代最近点, S_{KD} 和 S_{FE} 分别使用 KD 树和特征扩展的优化策略。本文逐个或组合地将这两部分策略嵌入到 MICP 中,以探索它们对配准结果的影响。总共进行了 5 个单独或交叉验证实验,使用配准误差 E 和运行时间 T 作为评价指标。实验定量结果详见表 4,黑体部分表示最优结果。

表 4 在 Dragon 数据集上的消融实验误差和运行时间
Table 4 Error and runtime for the ablation experiments on the Dragon dataset

算法或数据集	Dra _H		Dra _M		Dra _L	
	E/mm	T/s	E/mm	T/s	E/mm	T/s
ICP	1.624 3	0.656 3	29.133 5	1.390 2	39.706 3	0.730 2
MICP	0.276 0	1.905 3	0.438 3	1.640 9	0.484 4	2.612 9
MICP+ S_{KD}	0.276 0	1.037 6	0.438 3	0.962 6	0.484 4	2.023 2
MICP+ S_{FE}	0.277 7	1.180 2	0.209 4	0.960	0.543 6	0.236 8
MICP+ S_{KD} + S_{FE}	0.277 7	0.359 2	0.209 4	0.259 4	0.543 6	0.077 1

4 结 论

(1)本文算法通过建立镜像型对应关联性,在点云对之间两次建立对应关系,先确定重叠区域特征点,再建立可靠对应,从而避免了大量离群值的引入,保证了配准的精确性。

(2)本文算法结合优化策略,一方面通过逆变换将 KD 树的构建置于迭代开始之前完成,以加速迭代过程,另一方面引入特征扩展策略,通过先均匀采样,再搜索种子特征点,最后进行特征点扩展的过程,以加速镜像型对应关联性的建立,从而保证了配准的高效性。

(3)在公开数据集上的实验结果表明:对于较高重叠度的数据集,本文算法使精度平均提升28.8%,效率提升 47.9%;即使在重叠率较低的情况下,本文算法仍然能快速得到期望的配准结果,具有良好的鲁棒性和抗干扰能力。

参考文献:

[1] MA Jiayi, ZHAO Ji, JIANG Junjun, et al. Locality preserving matching [J]. International Journal of

从表 4 可以看出,与 ICP 算法相比, MICP 算法在不同重叠度数据集上的配准误差更小,特别是在重叠度较低的数据集上, ICP 算法无法成功配准。这是因为 MICP 算法使用镜像型对应关联性,能够避免缺失部分的干扰,从而得到更加准确的配准结果。此外,相比于初始 MICP 算法,引入 S_{KD} 和 S_{FE} 优化策略均可以有效减少算法执行时间,特别是对于重叠度较低的数据集, S_{FE} 策略对于效率的提升更加显著。在精度方面,尽管 S_{FE} 策略可能会稍微改变算法的精度,但其影响甚微,而 S_{KD} 策略则不会影响算法的配准精度。综合考虑精度和效率两方面的实验结果,本文提出的算法(MICP+ S_{KD} + S_{FE})具有最优的配准效果。

Computer Vision, 2019, 127(5): 512-531.
[2] 林伟,孙殿柱,李延瑞,等. 形貌约束的多视角点云分阶配准方法 [J]. 西安交通大学学报, 2020, 54(6): 75-81.
LIN Wei, SUN Dianzhu, LI Yanrui, et al. A hierarchical registration method of Multiview point clouds with shape constraints [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, 54(6): 75-81.
[3] 陆世东,涂美义,罗小勇,等. 基于图优化理论和 GNSS 激光 SLAM 位姿优化算法 [J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(8): 208-217.
LU Shidong, TU Meiyi, LUO Xiaoyong, et al. Laser SLAM pose optimization algorithm based on graph optimization theory and GNSS [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(8): 208-217.
[4] JIANG Zutao, ZHU Jihua, LIN Zhiyang, et al. 3D mapping of outdoor environments by scan matching and motion averaging [J]. Neurocomputing, 2020, 372: 17-32.
[5] WANG Rendong, XU Youchun, SOTELO M A, et al. A robust registration method for autonomous driving pose estimation in urban dynamic environment using LiDAR [J]. Electronics, 2019, 8(1): 43.
[6] RAVIKUMAR N, GOOYA A, ÇIMEN S, et al. Group

- wise similarity registration of point sets using student's t-mixture model for statistical shape models [J]. *Medical Image Analysis*, 2018, 44: 156-176.
- [7] 李建微, 占家旺. 三维点云配准方法研究进展 [J]. *中国图象图形学报*, 2022, 27(2): 349-367.
- LI Jianwei, ZHAN Jiawang. Review on 3D point cloud registration method [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2022, 27(2): 349-367.
- [8] 杨佳琪, 张世坤, 范世超, 等. 多视图点云配准算法综述 [J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2022, 50(11): 16-34, 43.
- YANG Jiaqi, ZHANG Shikun, FAN Shichao, et al. Survey on multi-view point cloud registration algorithm [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology(Natural Science Edition)*, 2022, 50(11): 16-34, 43.
- [9] BESL P J, MCKAY N D. A method for registration of 3-D shapes [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(2): 239-256.
- [10] RUSINKIEWICZ S, LEVOY M. Efficient variants of the ICP algorithm [C]//*Proceedings Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2001: 145-152.
- [11] CHEN Yang, MEDIONI G. Object modelling by registration of multiple range images [J]. *Image and Vision Computing*, 1992, 10(3): 145-155.
- [12] RUSINKIEWICZ S. A symmetric objective function for ICP [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(4): 85.
- [13] PAVLOV A L, OVCHINNIKOV G W, DERBY-SHEV D Y, et al. AA-ICP: iterative closest point with Anderson acceleration [C]//*2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018: 3407-3412.
- [14] ZHANG Juyong, YAO Yuxin, DENG Bailin. Fast and robust iterative closest point [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2022, 44(7): 3450-3466.
- [15] 王丞, 田暄, 郭瑞, 等. 自适应 Harris 角点提取的点云粗配准算法 [J]. *西安交通大学学报*, 2022, 56(3): 33-44.
- WANG Cheng, TIAN Xuan, GUO Rui, et al. Coarse point cloud registration based on adaptive Harris corner extraction [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2022, 56(3): 33-44.
- [16] CHETVERIKOV D, SVIRKO D, STEPANOV D, et al. The trimmed iterative closest point algorithm [C]//*2002 International Conference on Pattern Recognition*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2002: 545-548.
- [17] BOUAZIZ S, TAGLIASACCHI A, PAULY M. Sparse iterative closest point [J]. *Computer Graphics Forum*, 2013, 32(5): 113-123.
- [18] YANG Jiaolong, LI Hongdong, JIA Yunde. Go-ICP: solving 3D registration efficiently and globally optimally [C]//*2013 IEEE International Conference on Computer Vision*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2013: 1457-1464.
- [19] JIAN Bing, VEMURI B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [20] MAGNUSSON M, LILIENTHAL A, DUCKETT T. Scan registration for autonomous mining vehicles using 3D-NDT: research articles [J]. *Journal of Field Robotics*, 2007, 24(10): 803-827.
- [21] LI Zhaolong, WANG Cheng, MA Jieying, et al. Point set registration via rigid transformation consensus [J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2022, 101: 108098.
- [22] SAHILLIOGLU Y, KAVAN L. Scale-adaptive ICP [J]. *Graphical Models*, 2021, 116: 101113.
- [23] EFRAIM A, FRANCOIS J M. Estimating rigid transformations of noisy point clouds using the universal manifold embedding [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2022, 64(4): 343-363.
- [24] ZHANG Zhiyuan, SUN Jiadai, DAI Yuchao, et al. Self-supervised rigid transformation equivariance for accurate 3D point cloud registration [J]. *Pattern Recognition*, 2022, 130: 108784.
- [25] WANG Yue, SOLOMON J. Deep closest point: learning representations for point cloud registration [C]//*2019 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019: 3522-3531.
- [26] HUANG Shengyu, GOJCIC Z, USVYATSOV M, et al. PREDATOR: registration of 3D point clouds with low overlap [C]//*2021 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2021: 4265-4274.
- [27] ARNOLD E, MOZAFFARI S, DIANATI M. Fast and robust registration of partially overlapping point clouds [J]. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2022, 7(2): 1502-1509.
- [28] Anon. The Stanford 3D scanning repository [EB/OL]. (2014-08-19) [2022-12-01]. <https://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>.

(下转第 220 页)

- [23] CHEN Zhaohui, HOU Yilin, YANG Yifeng, et al. A multi-stage fluidized bed strategy for the enhanced conversion of methanol into aromatics [J]. Chemical Engineering Science, 2019, 204: 1-8.
- [24] JIANG Jianrong, ZHANG Dan, FENG Xiao, et al. Process design and analysis of aromatics production from coal via methanol with a high yield [J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2021, 60(15): 5574-5587.
- [25] 李广洋. DCC装置针对干气中 C_3 含量超标原因分析与对策 [J]. 化工管理, 2020(4): 36-38.
- [26] 中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局, 中国国

家标准化管理委员会. 液化石油气: GB 11174—2011[S]. 北京: 中国标准出版社, 2012.

- [27] 国家市场监督管理总局, 国家标准化委员会. 戊烷发泡剂: GB/T 22053—2020[S]. 北京: 中国标准出版社, 2020.
- [28] 陈诗瑶, 申峻, 王玉高, 等. 甲醇制芳烃的工艺流程模拟及换热网络优化 [J]. 洁净煤技术, 2022, 28(1): 129-137.
- CHEN Shiyao, SHEN Jun, WANG Yugao, et al. Process flow simulation of methanol to aromatics and optimization of heat exchange network [J]. Clean Coal Technology, 2022, 28(1): 129-137.

(编辑 杜秀杰)

(上接第 212 页)

附录 A 收敛性证明

镜像迭代最近点算法以 ICP 算法框架为基础, 其思想和数据结构与 ICP 相兼容。此外, 本文提出的优化策略不会影响算法的收敛性, 因为它们只是对算法的实现进行了优化, 而没有改变算法的基本思想。因此, 本文算法的收敛性与 ICP 相似。

定理 镜像迭代最近点算法对于均方镜像距离总是单调收敛到一个局部最小值。

证明 镜像迭代最近点的迭代过程包括以下两个有序操作: ①建立镜像型对应关系 $(H(x_i), y_{c(i)})$; ②计算最优变换 (R, t) 。考虑算法的第 k 次迭代, 令 $m_{i,k-1} = R_{k-1} \cdot H(x_i) + t_{k-1}$ 。首先, 通过基于 KD 树的最近邻搜索方法建立镜像型对应关系 $(m_{i,k-1}, y_{c_k(i)})$, 得到的均方镜像误差如下

$$e_k = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|m_{i,k-1} - y_{c_k(i)}\|_2^2 \quad (A1)$$

随后, 根据当前对应关系计算刚体变换 (R_k, t_k) , 并更新源点云, 从而将源点云向目标点云配准。此时的均方镜像误差为

$$\epsilon_k = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|R_k \cdot H(x_i) + t_k - y_{c_k(i)}\|_2^2 \quad (A2)$$

由于最优变换的应用不会增加均方镜像误差, 由此可以得出 $\epsilon_k \leq e_k$, 当且仅当 $R_k = R_{k-1}$ 且 $t_k = t_{k-1}$ 时, $\epsilon_k = e_k$ 。接着, 假设 $m_{i,k} = R_k \cdot H(x_i) + t_k$, 则均方镜像误差表示为

$$e_{k+1} = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|m_{i,k} - y_{c_{k+1}(i)}\|_2^2 \quad (A3)$$

由于 e_{k+1} 是式(6)的最小值, 则可以得出

$$e_{k+1} = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|m_{i,k} - y_{c_{k+1}(i)}\|_2^2 \leq \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \|R_k \cdot H(x_i) + t_k - y_{c_k(i)}\|_2^2 = \epsilon_k \quad (A4)$$

由于均方误差不为负, 因此, 通过重复上述过程可以得到以下结果

$$0 \leq \dots \leq e_{k+1} \leq \epsilon_k \leq e_k \dots, \quad k \text{ 取任意值} \quad (A5)$$

从上述讨论中可以得出, 均方镜像误差序列是非递增的, 且有下界为 0。根据单调有界定理“单调有界数列必收敛”可以证明: 所提出的镜像迭代最近点算法对于均方镜像距离总是单调收敛到一个局部最小值。此外, 为了避免落入局部极小值, 算法需要提供良好的初始值。

(编辑 亢列梅)